Archiv der Mathematik und Physik

Archiv der Mathematik und Physik

510.5
A673

Digitized by Google

M

Digitized by Google

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Zweiter Teil.

STANFORD LIBRARY

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1885.

by Google

162500

STANFORD LIBRARY

Digitized by Google

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite
VIII.	Die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionen. Von Paul Richard Domsch .	II.	193
X.	Fortsetzung	III.	225
IX.	Beweis, dass auf einer algebraischen Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden ausser dieser nicht mehr als 16 Geraden liegen können. Von Alfred Leman	II.	223
XII.	Zum Molins'schen Problem. Von R. Hoppe .	III.	269
XIV.	Die Cono-Cunei. Von Carl Pabst	III.	281
XVI.	Fortsetzung	IV.	337
XXI.	Körper zwischen 2 Rotationsellipsoiden. Von Albert Bieler	IV.	439

Trigonometrie.

XVIII.	Trigonometrische Sätze, Von A. H. Anglin .	IV.	407

Mechanik.

XIII.	Bewegung eines senkrecht empor geworfenen Körpers. Von R. Hoppe	III.	274

Optik, Akustik und Elasticität.

I.	Der Winkelspiegel. Von R. Mack	I.	1
IX.	Zur Theorie des Winkelspiegels. Von Karl Mack	II.	220
IV.	Ein Beitrag zur Schattenlehre. Von F. Procházka	I.	101
IV.	Ueber die Grenze der Stabilität eines longitudinal comprimirten geraden elastischen Stabes. Von R. Hoppe	I.	108

Litterarische Berichte.

V. Becker (Math. als Lehrgegst.). Sylvester (Am. J. VI.) Mittag-Leffler (A. M. IV.).

VI. Krebs (Phys.). Zenger (Sp. Elektr.). Wallentin (Gener. b. Elektr.). Popper (elektr. Kraft Uebertr.). Fourier (Wärme).

Digitized by Google

Uppenborn (elektr. Masss.). Lisser u. B. (Zschr. ph. Unt.). Lie (Arch. II—VII.). Teixeira (Jorn. III. IV.) Amsterdam (N. Arch. XI.). Mansion (Math. IV.). Hamburg. math. Ges. (Mitt. III. IV.). Association Française (Congr. Lille, la Rochelle) Brüssel Akad. (Bull. I—V.) Amsterdam (Versl. en Meded. XVIII.). Smithson. Inst. (Rep. 1881—2). Washington Phil. Soc. (Bull. IV. V.). R. Acc. Linc. (Trans. VIII.). Böklen (math. natw. Mitt. I.).

VII. Frege (Grdl. d. Ar.). Vogt (Grenzbegr.). Teixeira (Jorn. V.). Mittag-Leffler (A. M. V.) Amsterdam (Versl. en Meded. XIX. XX.).

VIII. Walberer (Ar. u. Alg.). Köstler (Ar. — Vorsch. Geom.). Hoch (eb. Geom.). Glinzer (Geom.). Fischer (Geom.). Gusserow (Ster.). Spieker (Trig.). Sickenberger (Ar.). Gerlach (Plan.). Wrobel (Prop. Progr.). Claussen (Ar. u. Alg.). Hofmeister (Phys.). Blum (Phys.) Jüdt (Aufg.). Prampero (log. quadr.). August (5st Log.). Claussen (5st. Log.). Hartner (Geod.). Bohnenberger (Vermess.). Messerly (Rev. Su. Top.).

Berichtigungen

im LXX. Teile d. 1. Reihe:

Seite 433 in Gl. (4) links statt $C^{\nu}{}_{m}(r)$ setze $C^{\nu}{}_{m}(n)$

im II. Teile d. 2. Reihe:

Seite	2	Zeile	25	v.	ob.	statt	und	setze	um
„	4	„	3	„	„	„	von	„	vor
„	7	„	10	„	„	„	$2(m$	„	$(2m$
„	8	„	1	v.	unt.	vor	mit B	„	weil es

Digitized by Google

ゆ 湯 湯 湯

STANFORD LIBRARY

I.

Der Winkelspiegel.

Genaueres über Lage und Anzahl der Bilder eines in seine Oeffnung eingeführten Gegenstandes.

Von

L. Mack.

(Mit einer Figur.)

Betreffend der Erscheinungen am Winkelspiegel wird als Fundamentalaufgabe auszusprechen sein die folgende.

Gegeben sei die Oeffnung des Winkelspiegels in beliebig bestimmter Grösse, und ebenso beliebig bestimmt die Lage eines in jene eingeführten leuchtenden Punktes. Für die sich ergebenden Bilder desselben, welche in zwei charakteristisch verschiedene Reihen zerfallen, soll ermittelt werden: 1) die Lage jedes einzelnen mit gesetzmässiger Bestimmtheit, 2) je die Anzahl der in einer Reihe befindlichen, 3) die Anzahl aller zusammen, 4) die eigentümlichen Verhältnisse ihrer gegenseitigen Lage; je die entsprechende Angabe mathematisch formulirt in der Art, dass ihre Abhängigkeit von den gemachten Voraussetzungen völlig klar liege.

Wie diese Fundamentalaufgabe auch nur mit Bezug auf Nr. 3) streng gelöst wird, so zeigt sich, dass in einer Menge von Fällen, bei bestimmt gegebener Oeffnungsgrösse, die Gesammtzahl der Bilder eines die beiden Einzelspiegel bestrahlenden Punktes bald grösser, bald kleiner wird, jenachdem dieser Punkt seine Stellung zwischen beiden verändert. Hieraus folgt, dass für einen ausgedehnten Gegenstand, der in die Oeffnung eingeführt ist, einige der zu er-

wartenden Erscheinungen durchaus nicht so einfach sich gestalten, als man gewöhnlich sich vorstellen möchte; es ergibt sich also die Forderung, dass auch über diese Erscheinungen genügende Aufklärung gegeben werde.

Sieht man nun auf das in unsern Lehrbüchern Gebotene, so wird Niemand behaupten wollen, dass es auch nur den Forderungen der Fundamentalaufgabe (zu schweigen von den weiter anzuknüpfenden) genüge. Vielmehr wird man zugeben müssen, dass jene sowol in Betreff der Genauigkeit als der Vollständigkeit gar Manches zu wünschen übrig lassen, wie denn selbst von eigentlichen und starken Irrtümern oder Verstössen auf diesem Gebiete Verschiedenes zu berichten wäre.

Sucht man nach Originalarbeiten über den fraglichen Gegenstand, so findet sich eine solche von Bertin in den annales de chimie et de physique, série III, tome 29, page 257 ... 262; Paris 1850. — Der Verfasser berührt zunächst die Notwendigkeit des Aufräumens mit landläufigen falschen Angaben, will übrigens wesentlich nur auf die Frage nach der Gesammtzahl der Bilder eines einzelnen Lichtpunktes sich einlassen. Dass diese immer eine begrenzte sei, will er mit wenigen Worten klar machen. Er hebt auch ganz richtig den Umstand hervor, an welchen zu diesem Behuf anzuknüpfen ist; indes einen wirklichen Beweis gibt er keineswegs. — Behufs der Erreichung seines Hauptzwecks unterscheidet er zwei Hauptfälle, jeden mit zwei Unterfällen. Hiernach betrachtet er vier besondere Figuren, und das von ihnen Abzulesende sofort in allgemeine Angaben umzusetzen, und zuletzt einen Generalsatz über die Gesammtheit der Bilder auszusprechen. Dieser ist zwar streng richtig, aber nicht übersichtlich; und sein zweiter Teil ist nicht bestimmt genug und nicht in solcher Weise gefasst, dass sofort für jede gegebene Oeffnungsgrösse und jede gegebene Lage des eingeführten Lichtpunkts die Zahl der sich ergebenden Bilder unzweideutig zu gewinnen wäre.

Aus neuester Zeit ist in Poggendorff's Annalen, Band VII, Stück 2, pag. 103 ... eine russisch geschriebene Arbeit angezeigt: M. Pawloff, Untersuchung der Frage über die Bilder in zwei zu einander geneigten ebenen Spiegeln. Der Berichterstatter sagt kurz: „indem der Verfasser zuerst nachweist, dass die Anzahl der Bilder immer eine begrenzte ist, zeigt er weiter, wie für jede Lage der Spiegel und für jede Lage des leuchtenden Punkts diese Zahl zu bestimmen ist."

Dass bei Pawloff wie bei Bertin so und so viele Forderungen der Fundamentalaufgabe unerfüllt geblieben seien, ist aus den gemachten Mitteilungen zur Genüge zu ersehen; ich möchte aber das besonders hervorheben, dass weder bei Bertin, noch bei Pawloff

(nach der Poggend. Angabe) irgend Erhebliches über die Eigentümlichkeiten der gegenseitigen Lage der Bilder zu finden sei. Gerade aber diese Eigentümlichkeiten, namentlich bei denjenigen zwei Bildern hervortretend, welche als letzte, jedes von einem der Einzelspiegel geliefert werden, sind im höchsten Grade überraschend. Schon ihre Ermittlung und Hervorhebung dürfte für die Berechtigung der hier zu veröffentlichenden Arbeit sprechen, wenn man auch bezüglich der arithmetischen Frage mit dem Richtigen, was schon Bertin gegeben hat, sich beruhigen wollte. Uebrigens ist gegenwärtige Arbeit in dem Sinne gemeint, dass sowol die oben ausgesprochene Fundamentalaufgabe vollständig gelöst, als auch der weiteren an sie geknüpften Forderung genügt werde.

Bei der hier durchgeführten Art der Untersuchung und Darstellung wird der aufmerksame Leser nach gezeichneten Figuren so wenig Verlangen tragen, dass er selbst diejenige überflüssig finden könnte, welche zur Veranschaulichung gewisser Definitionen und Bezeichnungen beigelegt ist; welche übrigens immerhin dienen mag, um bei den verschiedensten Gestaltungen oder Einteilungen des Operationsfeldes die Orientirung in diesem zu erleichtern.

---

§ 1.

Winkelspiegel heisst eine Zusammenstellung zweier undurchsichtigen Planspiegel, in der Art angeordnet, dass die allein spiegelnden Vorderflächen derselben zwischen sich einen hohlen Flächenwinkel ($< 180^0$) haben.

Dieser Flächenwinkel und seine Scheitelkante UV werden beziehungsweise als **Oeffnung** und **Axe** des Winkelspiegels bezeichnet.

Die allein spiegelnden Vorderflächen sind zu denken als zwei **aus** UV **entspringende** Ebenenstücke, die sich beliebig weit erstrecken: UVA **den ersten** Planspiegel abgebend, UVB **den zweiten**.

Zu den Ebenenstücken UVA, UVB sind ihre über UV hinaufgehenden Erweiterungen $UV\mathfrak{A}$, $UV\mathfrak{B}$ einzuführen, jede derselben rein geometrisch gedacht.

Bei jeder der Vollebenen $AUV\mathfrak{A}$, $BUV\mathfrak{B}$ heisst **vordere Seite** diejenige, an welcher die zugehörige Halbebene ihre spiegelnde Kraft entwickelt.

Digitized by Google

§ 2.

Sofern hinter einem der Einzelspiegel ein Bild erscheint, hervorgerufen durch einen von ihm befindlichen Gegenstand, möge solches kurz ein diesem Spiegel zugehöriges Bild genannt werden.

Wenn nun ein leuchtender Punkt P frei innerhalb der Oeffnung des Winkelspiegels sich befindet, so sind zunächst die zwei Bilder in's Auge zu fassen, deren jedes durch einen der Spiegel für sich, ohne Mitwirkung des andern, entsteht. Diese zwei niemals fehlenden sind notwendig von einander getrennt. Jedes liegt symmetrisch zu der Ebene desjenigen Spiegels, dem es zugehört. Diese zwei Bilder heissen die Bilder erster Ordnung.

Jedes von ihnen, wenn es vor dem Spiegel liegt, dem es nicht zugehört, verhält sich diesem gegenüber wie ein leuchtender Gegenstand, von welchem gedachter Spiegel ein neues (hinter ihm liegendes) Bild liefert — ein Bild zweiter Ordnung.

Von jedem der beiden Bilder zweiter Ordnung wird derjenige Spiegel, dem es nicht zugehört, möglicher Weise (wenn es eben vor ihm liegt) ein neues Bild geben — ein Bild dritter Ordnung; u. s. w.

Um jedes dieser Bilder sowol bezüglich seiner Zugehörigkeit zu einem bestimmten der zwei Einzelspiegel, als nach seiner Ordnung kenntlich zu machen, gebrauchen wir die Bezeichnung P_m' für das zu dem ersten Spiegel gehörige Bild $m$ter Ordnung, dagegen P_m'' für sein zum zweiten gehöriges derselben Ordnung. Demgemäss werden die zum ersten Spiegel gehörigen Bilder des Punkts P hier der Reihe nach benannt werden P_1', P_2', P_3' ...; die zum zweiten gehörigen der Reihe nach P_1'', P_2'', P_3'' ...

Da immer das von einem Gegenstand erhaltene Spiegelbild symmetrisch mit jenem liegt bezüglich der Ebene des zugehörigen Spiegels, so ist hieraus zunächst folgendes allgemein Bekannte zu entnehmen.

Alle durch das Zusammenwirken beider Einzelspiegel sich ergebenden Bilder des Punktes P befinden sich in derjenigen Ebene, welche durch P normal zu der Axe UV zu führen ist, die einen Durchschnittspunkt O mit jener gibt. Auch haben alle solche Bilder denselben Abstand von O wie P selbst; sie liegen mit P auf der Peripherie eines um O als Mittelpunkt zu beschreibenden Kreises.

Mit diesem Ortskreise der Bilder von P hat jedes der aus Axe UV entspringenden Ebenenstücke UVA, $UV\mathfrak{A}$, UVB, $UV\mathfrak{B}$ seinen bestimmten Durchschnittspunkt; diese Punkte selbst sollen der Reihe nach mit A, $\mathfrak{A}$, B, $\mathfrak{B}$ bezeichnet sein, und bei jedem der Paare (A, $\mathfrak{A}$), (B, $\mathfrak{B}$) ist zu beachten, dass es zwei Gegenpunkte des Kreises enthält. (Siehe Figur.)

Auf dem zwischen beiden Spiegelflächen selbst begriffenen Bogenstück APB heben wir ausser P noch hervor den Halbirungspunkt M desselben; so auch den Punkt P_0, welcher zu P symmetrisch mit Bezug auf die Gerade OM liegt. Zu diesen Punkten erscheinen beziehungsweise $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}_0$ als ihre Gegenpunkte auf dem Bogenstück $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$, welches zwischen den zwei Ebenenstücken $UV\mathfrak{A}$, $UV\mathfrak{B}$ begriffen ist. Hierbei die Möglichkeit vorbehalten, dass P und P_0 in M zusammenfallen, und demgemäss $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{M}$.

Es liegt nahe auch die Radien einzuführen, die aus O nach den erwähnten Peripheriepunkten gehen. Von diesen sind uns zunächst OA, OB aus dem Grunde besonders wichtig, weil sie die Spuren der zwei Einzelspiegel in der Ebene der Bilder des Punktes P sind, während zugleich der (hohle) Winkel AOB die Grösse 2α der Oeffnung des Winkelspiegels darstellt.

Für jedes der Bilder des Punktes P ist seine Lage vollständig bestimmt, einesteils durch die Länge des von O nach solchem Bilde gehenden Fahrstrahles, welche Länge gleich OP selbst ist, — anderenteils durch die Grösse des Winkels, um welchen gedachter Fahrstrahl von der Spur (OA oder OB) des bezüglichen Spiegels, auf der Rückseite des letzteren, abweicht.

Jeder derartige Winkel soll hier durch eine absolute Zahl dargestellt werden, welche auf den Grad als Einheit sich bezieht. — Ist nun ein Winkel $AOP_x' = \psi$ angegeben, so heisst dies, dass man aus der Lage OA in die Lage OP_x' komme durch eine Drehung um ψ^0, in der Richtung über $O\mathfrak{B}$ nach $O\mathfrak{A}$; dagegen eine Angabe Wkl. $BOP_y'' = \omega$ besagt, dass man aus der Lage OB in die Lage OP_y' komme durch eine Drehung um ω^0 in der Richtung über $O\mathfrak{A}$ nach $O\mathfrak{B}$.

Anmerkung. Vorstehender § hält streng fest die ganz bestimmte Voraussetzung, dass der Punkt P frei innerhalb der Oeffnung des Winkelspiegels liege, d. h. in keiner der zwei spiegelnden Flächen UVA, UVB selbst sich befinde. — Es mag gut sein sich klar zu machen, wie ganz anders gegenüber von solchem Punkt P die Verhältnisse für einen andern leuchtenden Punkt sind, wenn dieser in der Fläche eines der zwei Einzelspiegel selbst — immerhin seitwärts von der Axe UV — gegeben ist.

Angenommen, der Punkt A des ersten Einzelspiegels sei ein leuchtender.

Sofern nun A vor dem zweiten Spiegel liegt, so entsteht gewiss hinter diesem ein Bild A_1'', von A in derselben Weise abstammend wie P_1'' von P; und von A_1'' sind weitere Bilder A_2', A_3'', A_4' ... in derselben Weise herzuleiten wie von P_1'' hergeleitet werden P_2', P_3'', P_4' ... jedes folgende aus dem nächst vorhergehenden.

Dass das Licht des Punktes A von dem ersten Spiegel selbst, dem er angehören soll, auch reflectirt werde, wird man nicht sagen wollen, man wird also von einem Bilde A_1' nicht zu sprechen haben. Jedenfalls aber müsste dieses mit A selbst identisch gesetzt werden, und von A_1' wären durchaus keine weiteren Bilder des Punktes A herzuleiten, als die vorhin angeführten A_1'', A_2', A_3'', A_4' ...

§ 3.

„Um nun Genaueres über Lage und Anzahl sämmtlicher zu P „sich ergebenden Bilder entwickeln zu können, stellen wir zunächst „folgende Betrachtung an".

Sei irgend ein zum ersten Spiegel gehöriges Bild P_m' gedacht, zu welchem der zweite noch das Bild P_{m+1}'' gebe. Der Fahrstrahl OP_m', hinter dem ersten Spiegel liegend, weiche von dessen Spurlinie OA um einen Winkel ψ ab. Indes muss OP_m', damit das Bild P_{m+1}'' entstehen könne, vor dem zweiten Spiegel liegen, von der Spur OB desselben abweichend um den Betrag $BOA + AOP_m'$, d. h. um $2\alpha + \psi$. Dieselbe Abweichung von OB, aber hinter dem zweiten Spiegel, muss der Fahrstrahl OP_{m+1}'' haben, d. h. es muss Winkel $BOP_{m+1}'' = 2\alpha + \psi$ sein. — So findet sich der also lautende

Hauptsatz.

„Wenn das zu dem einen Einzelspiegel gehörige Bild $m$ter Ord„nung des Punktes P seinen Fahrstrahl hinter die Spur gedachten „Spiegels zurückweichen lässt um einen Winkel ψ, so muss das etwa „entstehende, zu dem andern Spiegel gehörige Bild $(m+1)$ter Ord„nung seinen Fahrstrahl hinter dessen Spur zurückweichen lassen „um $2\alpha + \psi$; hiebei unter 2α die Oeffnungsgrösse des Winkelspiegels „gedacht".

Sei nun φ_1 die Abweichung des Fahrstrahls OP von der Spur OA nächst gegen OB hin, und φ_2 die Abweichung desselben Fahr-

strahls von OB gegen OA hin, so ist offenbar zunächst für die zwei Bilder P_1', P_1'' anzugeben

$$\text{Winkel } AOP_1' = \varphi_1, \quad BOP_1'' = \varphi_2.$$

An diese zwei einfachsten Angaben sind, mit Anwendung des vorigen Hauptsatzes, sofort zu knüpfen die zwei Reihen von Angaben

I.

$$\begin{aligned}
\text{Winkel } AOP_1' &= \varphi_1 \\
AOP_2' &= 2\alpha + \varphi_2 \\
AOP_3' &= 4\alpha + \varphi_1 \\
&\vdots \\
AOP_{2m-1}' &= 2(m-2)\,2\alpha + \varphi_1 \\
AOP_{2m}' &= (2m-1)\,2\alpha + \varphi_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
\text{Winkel } BOP_1'' &= \varphi_2 \\
BOP_2'' &= 2\alpha + \varphi_1 \\
BOP_3'' &= 4\alpha + \varphi_2 \\
&\vdots \\
BOP_{2m-1}'' &= (2m-2)\,2\alpha + \varphi_2 \\
BOP_{2m}'' &= (2m-1)\,2\alpha + \varphi_1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bei jeder der vorstehenden Reihen ist zu sehen, dass sie vermöge ihres arithmetisch-geometrischen Bildungsgesetzes bis ins Unendliche fortzuführen ist; und in diesem Fortgang werden die immer wachsenden Winkel AOP' BOP'' über jede zu gebende Grösse hinausgeführt.

Hiedurch ist mit Bezug auf jeden der zwei Einzelspiegel die Frage angezeigt, ob die Anzahl der ihm zugehörigen Bilder von P (wie es ja scheinen möchte) eine unendlich grosse sein werde oder nicht.

§ 4.

„Angesichts voriger Frage sind sofort folgende Beschränkungen „zu betonen, welche für die Lagen der Bilder des Punktes P sich „ergeben".

1) Jedes der zum ersten Spiegel gehörigen Bilder P', da es nur hinter diesem Spiegel sein kann, ist angewiesen auf den Halbkreisbogen $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, dessen Grenzpunkte A, $\mathfrak{A}$ sind.

Ebenso jedes der Bilder P'' ist angewiesen auf den Bogen $B\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, dessen Grenzpunkte B, $\mathfrak{B}$ sind.

2) Im Grenzpunkt $\mathfrak{A}$ des Bogens $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ kann niemals ein Bild P' sich befinden.

Denn zunächst ist klar, dass P_1' nicht in $\mathfrak{A}$ sein könne. — Sollte aber ein Bild P_n' (mit $n > 1$) zu Stande kommen, so müsste es hervorgerufen sein durch ein Bild P_{n-1}''. Die Punkte P_n', P_{n-1}'' müssten zu der Ebene des ersten Spiegels, in welcher P_n' mit $\mathfrak{A}$ vereinigt sein sollte, symmetrisch liegen; es müsste also P_{n-1}'' ebenfalls in $\mathfrak{A}$ sein. Aber in der Lage $\mathfrak{A}$ befindlich kann ein leuchtender Punkt P_{n-1}'' keine reflexionsfähigen Strahlen an die spiegelnde Fläche UVA gelangen lassen. Also ein Bild P_n' an der Stelle $\mathfrak{A}$ ist unmöglich.

Ebenso zeigt sich die Unmöglichkeit eines Bildes P'' an der Stelle $\mathfrak{B}$.

3) Auch im Grenzpunkt A des Halbkreisbogens $A\mathfrak{B}A$ kann kein Bild P' erscheinen.

Denn zunächst überzeugt man sich, dass P_1' nicht in A sein könne. — Sollte aber ein Bild P_n' (mit $n > 1$) in A zu Stande kommen, so würde dies die Existenz eines Bildes P_{n-1}'' voraussetzen, welches den zwei sich widersprechenden Forderungen genügen müsste: einesteils hinter der Ebene des zweiten Spiegels zu liegen, andernteils mit A zusammenzufallen.

Ebenso zeigt sich die Unmöglichkeit eines Bildes P'' an der Stelle B.

4) Sieht man auf das Bogenstück $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$, welches den zwei Halbkreisen $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gemeinschaftlich ist, so zeigt jeder zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ liegende Punkt desselben die Eigenschaft, frei sowohl hinter der einen als hinter der andern der zwei Spiegelebenen zu liegen, so dass kein Licht von ihm an die eine oder die andere der zwei spiegelnden Flächen UVA, UVB gelangen könne. Hienach ist zu sagen:

Wenn ein zum ersten oder zweiten Spiegel gehöriges Bild des Punktes P irgendwo auf dem Bogen $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ zwischen seinen Endpunkten sich befindet, so gibt es kein Bild höherer Ordnung, welches als ein von dem erstgedachten Bilde abgeleitetes zu finden wäre.

5) Was insbesondere die Grenzpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ des Bogens $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ betrifft, so ist leicht zu sehen: es mag zwar in $\mathfrak{B}$ ein zum ersten Spiegel gehöriges Bild P_n' entstehen, aber von diesem aus, mit $\mathfrak{B}$

Each of these examples has a different flavor. The first is a simple statement of fact. The second is a statement of fact with a bit of explanation. The third is a statement of fact with a bit of explanation and a reference. The fourth is a statement of fact with a bit of explanation, a reference, and a tentative prediction about the future. Experienced programmers will recognize that the last comment is the most valuable of the four. Indeed, the reason for the existence of many comments is the ability to predict future events.

Todo Comments

In some cases it is reasonable to leave "todo" notes in the form of comments. For example:

```
//TODO: remove after release 1.1
```

Or perhaps:

```
//TODO: add Google Maps support in a future release.
```

Today, most IDEs have special support for todo comments, so it's easy to keep track of todo items and make sure they don't get lost.

Amplification

Comments may be used to amplify the importance of something that may otherwise seem inconsequential. For example:

```
String listItemContent = match.group(3).trim();
// the trim is real important. It removes the starting
// spaces that could cause the item to be recognized
// as another list.
new ListItemWidget(listItemContent, this.level + 1);
```

Javadocs in Public APIs

There is nothing quite so helpful and satisfying as a well-described public API. The javadocs for the standard Java library are a prime example. It would be difficult to write code to interface with those packages without javadocs. So if you are writing a public API, then you should write javadocs for it. But keep in mind the rest of the advice in this chapter. Javadocs can be as misleading, redundant, and incorrect as any other kind of comment.

Bad Comments

Most comments fall into this category. Usually, programmers use comments for poor code or to compensate for poor code. Programmers comment because they feel that it is necessary, or because they are required to, or because they want to document a decision, or because they want to explain the code, or because they want to mark it for others to fix. All of these are good reasons to write comments, but they are also good reasons to be wary of comments. Because programmers rarely do comments well, and rarely do them for the right reasons.

Wir wollen zu dem Behuf vorerst an die Bilder P' uns halten, und wir wollen für den (ersten) Spiegel, zu welchem sie gehören, sogleich die nähere Bestimmung treffen, er solle der dem Punkt P etwa nähere sein; womit $\varphi_1 \leqq \alpha$ statuirt ist. — Sofort sind folgende Bemerkungen zu machen.

Ist x irgend eine ganze Zahl, welche den nach § 3. I. entwickelt zu denkenden Wert des Winkels $AOP_x' < 180$ macht, so ist jeder der Punkte P_1', P_2' ... P_x' ein Bild von P; und diese Bilder liegen der Reihe nach auf dem Bogen $A\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ zwischen A und $\mathfrak{A}$.

Ist x sogar die grösste ganze Zahl, welche den Wert $AOP_x' < 180$ macht, so ist notwendig AOP_{x+1} entweder $= 180$ oder > 180. Alsdann gilt von den Punkten P_1' ... P_x' noch dasselbe wie vorhin, es ist aber sogleich das Weitere hervorzuheben was folgt.

Die Angabe $AOP_{x+1} = 180$, wenn sie zutrifft, verweist den Punkt P_{x+1}' an die Stelle $\mathfrak{A}$, wo nach § 4. I) niemals ein Bild P' erscheinen kann.

Die Angabe $AOP_{x+1}' > 180$, wenn sie zutrifft, und wenn zugleich $AOP_{x+1}' = 360$ sich zeigt, verweist den Punkt P_{x+1}' auf eine zwischen $\mathfrak{A}$ und A liegende Stelle des Halbkreisbogens $\mathfrak{A}BA$, d. h. an eine Stelle vor dem ersten Spiegel, wo ebenfalls kein Bild P' erscheinen kann.

Um also sicher zu sein, dass die Zahl der Bilder P' eine begrenzte sei, genügt es offenbar, die folgende Behauptung streng zu beweisen.

𝔖 Wenn x die grösste natürliche Zahl ist, welche den Winkel $AOP_x' < 180$ macht, und wenn von den zwei hiemit allein verträglichen Angaben $AOP_{x+1}' = 180$ und $AOP_{x+1}' > 180$, die letztere zutrifft, so muss damit zugleich bestehen die Angabe $AOP_{x+1}' < 360$.

Diess lässt sich in der Tat beweisen; man hat aber zu dem Behufe getrennt zu behandeln die zwei Fälle: x ungerade und x gerade.

Erster Fall: x ungerade.

Da die zwei Angaben bestehen sollen

a) $AOP_x' < 180$, b) $AOP_{x+1}' > 180$,

und da nach § 3. die Entwicklungen stattfinden

a') $AOP_x' = (x-1)2\alpha + \varphi_1$, b') $AOP_{x+1}' = x.2\alpha + \varphi_2$

so haben wir hier

a'') $(x-1)2\alpha + \varphi_1 < 180$ und b'') $x.2\alpha + \varphi_2 > 180$.

Digitized by Google

Ann. Annales.
Ann. Bot. Annals of Botany.
Ann. Mag. Nat. Hist. Annals and Magazine of Natural History.
Ann. Sci. Nat. Annales des Sciences Naturelles.
Arch. Archives.
Arch. Néerl. Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles.
Atti Acc. Lincei Atti della Reale Accademia dei Lincei.
Atti Soc. Ital. Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze.
Bot. Centralbl. Botanisches Centralblatt.
Bot. Gaz. The Botanical Gazette.
Bull. Bulletin.
Bull. Soc. Bot. Belg. Bulletin de la Société Royale de Botanique de Belgique.
Bull. Soc. Bot. Fr. Bulletin de la Société Botanique de France.
Bull. Soc. Nat. Moscou Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.
Bull. Torrey Bot. Club Bulletin of the Torrey Botanical Club.
Comm. Commentationes.
Comptes Rendus Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.
Contr. Contributions.
Denkschr. Denkschriften.
Ges. Gesellschaft.
Gött. Göttingen.
Jahrb. Jahrbücher.
Jahresber. Jahresbericht.
J. Bot. Journal of Botany.
J. Linn. Soc. Journal of the Linnean Society.
Mém. Mémoires.
Mém. Soc. Nat. Cherbourg Mémoires de la Société Nationale des Sciences Naturelles de Cherbourg.
Mém. Soc. Nat. Moscou Mémoires de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.
Mitt. Mitteilungen.
Nachr. Nachrichten.
Nat. Naturalist.
Nat. Hist. Natural History.
Nat. Tijdschr. Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch Indië.
Naturf. Naturforscher.
Naturk. Naturkunde.
Nederl. Kruidk. Arch. Nederlandsch Kruidkundig Archief.
Nouv. Nouveau.
Nouv. Mém. Soc. Nat. Moscou Nouveaux Mémoires de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.
Phil. Trans. Philosophical Transactions of the Royal Society of London.
Proc. Proceedings.
Proc. Acad. Nat. Sci. Phila. Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia.
Proc. Amer. Acad. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences.
Proc. Linn. Soc. Proceedings of the Linnean Society of London.
Proc. Roy. Soc. Proceedings of the Royal Society of London.
Publ. Publication.
Rec. Recueil.
Rend. Rendiconti.
Rep. Report.
Rev. Revue.
Sci. Science.
Sitzb. Sitzungsberichte.
Soc. Société.
Trans. Transactions.
Trans. Linn. Soc. Transactions of the Linnean Society of London.
Trans. Roy. Soc. Edinb. Transactions of the Royal Society of Edinburgh.
Verh. Verhandlungen.
Wiss. Wissenschaft.
Z. Zeitschrift.
Zool. Zoologist.

⊙) Wenn der Punkt P gegen die zwei Einzelspiegel so liegt, dass $\varphi_1 \leqq \alpha$, so ist die Zahl der Bilder P' eine begrenzte x, und zwar ist x die grösste natürliche Zahl, welche die nach § 3. zu denkende Entwickelung des Winkelwertes $AOP_x' < 180$ macht.

Ist nun P_x' im Sinne dieses Satzes das letzte der Bilder P', so sind für den Winkel AOP_x' (der immer < 180) als drei mögliche Fälle zu beachten

$$AOP_x' = \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 180 - 2\alpha.$$

Für jeden dieser drei Fälle ist jetzt zu zeigen, dass auch ein Grenzbild P'' sich einstelle.

1) Ist Winkel $AOP_x' < 180 - 2\alpha$, liegt also das Grenzbild P_x' frei ausserhalb des todten Raumes, so ist nach § 4. gemäss ein Bild P_{x+1}'' aus ihm herzuleiten; aber ein Bild P_{x+2}'' ist so gewiss unmöglich, als ein Bild P_{x+1}' nicht vorhanden ist.

Und hiebei hat man nach § 3.

$$\text{Wkl. } BOP_{x+1}' = AOP_x' + 2\alpha, \quad \text{d. h. } < 180.$$

2) Ist Winkel $AOP_x' = 180 - 2\alpha$, liegt also das Grenzbild P in $\mathfrak{B}$, so ist (nach § 4.) zwar kein P_{x+1}'' herzuleiten aus P_x', wol aber ein Bild P_x'' aus P_{x-1}'; und man erhält hiebei

$$\text{Wkl. } BOP_x'' = AOP_x' + 2\alpha, \quad \text{d. h. } < 180.$$

3) Ist Winkel $AOP_x' > 180 - 2\alpha$, so sei die — positive — Differenz $180 - AOP'$ bezeichnet mit ψ.

Da nun gemäss der gemachten Annahme P_x' frei innerhalb des todten Raumes liegt, so ist nach § 4. ein Bild P_{x+1}'' unmöglich. Gewiss aber ist die Existenz des P_{x-1}'', von welchem P_x' abstammt, und fraglich ist nur, ob auch noch Punkt P_x'' ein Bild sei. Die Entscheidung dieser Frage hängt davon ab, ob x gerade sei oder ungerade.

Ist x gerade, so bestehen nach § 3. für die Punkte P_x', P_x'' die Angaben

$$\text{Wkl. } AOP_x' = (x-1)\,2\alpha + \varphi_2$$
$$BOP_x'' = (x-1)\,2\alpha + \varphi_1.$$

Diese lassen (wegen $\varphi_1 \leqq \varphi_2$) erkennen, dass $BOP_x'' \leqq AOP_x'$, somit < 180; und man sieht, dass P_x'' so gut wie P_x' ein Bild von P sei.

Digitized by Google

Further Regulations as to the Duties on Sugar.

Dated 30th March, 1911.

Whereas by the Act 1 & 2 Geo. V. c. 49, intituled "An Act to grant certain Duties of Customs and Inland Revenue, to alter other Duties, and to amend the Law relating to Customs and Inland Revenue, and to make further provision in connection with Finance," it is enacted that—

Duties and rates of duty on Sugar, &c. 1 & 2 Geo. V. c. 49, s. 1.

1.—(1) The duties of customs and inland revenue on sugar, glucose, and other articles shall be charged at the rates specified in the Schedule to this Act.

(2) Subject to the provisions of this Act, the duties of customs and inland revenue on sugar, glucose, and other articles shall be charged at the rates specified in the Schedule to this Act, and the Sugar Duties Act, 1910, shall have effect as if the Schedule to this Act were substituted for the Schedule to that Act.

Power to vary duties on sugar, &c. 1 & 2 Geo. V. c. 49, s. 2.

2.—(1) The Commissioners of Customs and Excise may, with the consent of the Treasury, by order, vary the duties of customs and inland revenue on sugar, glucose, and other articles, and the rates of duty specified in the Schedule to this Act, and the Sugar Duties Act, 1910, shall have effect as if the Schedule to this Act were substituted for the Schedule to that Act.

(2) Any order made under this section shall be laid before the House of Commons as soon as may be after it is made, and if that House within the next twenty-one days on which it has sat after any such order is made resolves that the order be annulled, it shall thereupon become void, but without prejudice to anything previously done thereunder or to the making of a new order.

(3) The power of varying duties conferred by this section shall be in addition to and not in derogation of any other power of varying duties.

Power to make regulations. 1 & 2 Geo. V. c. 49, s. 3.

3.—(1) The Commissioners of Customs and Excise may, with the consent of the Treasury, make regulations for the purpose of carrying into effect the provisions of this Act, and may by such regulations impose penalties not exceeding in any case one hundred pounds for any breach thereof.

(2) Any regulations made under this section shall be laid before the House of Commons as soon as may be after they are made, and if that House within the next twenty-one days on which it has sat after any such regulations are made resolves that the regulations be annulled, they shall thereupon become void, but without prejudice to anything previously done thereunder or to the making of new regulations.

(3) The power of making regulations conferred by this section shall be in addition to and not in derogation of any other power of making regulations.

Anmerkung 1. Sofern in obiger Untersuchung bei vorkommendem P_{x-1}'' die Zahl x gleich Eins würde, wäre natürlich unter P_0'' der leuchtende Punkt P selbst zu denken.

Anmerkung 2. „Der obige Hauptsatz I) bietet bereits eine immer „zum Ziel führende Methode dar zur Auflösung der Aufgabe: aus „gegebenen Werten von 2α, φ_1, φ_2 die entsprechenden Zahlen u und „v zu ermitteln".

Will man z. B. u ermitteln, so ist davon auszugehen, dass u (bei P_u') entweder eine ungerade Zahl u_1 oder eine gerade u_2 sein muss. Mit Bezug auf die erste Möglichkeit ist gemäss dem § 3. zu suchen

u_1 als grösste ungerade Zahl, welche der Ungleichung genügt

$$1) \quad (u_1 - 1)\,2\alpha + \varphi_1 < 180;$$

mit Bezug auf die andere Möglichkeit ist zu suchen

u_2 als grösste gerade Zahl, welche der Ungleichung genügt

$$2) \quad (u_2 - 1)\,2\alpha + \varphi_2 < 180.$$

Aus 1) und 2) ergibt sich

u_1 = grösste ungerade Zahl unter dem Quotientenwerte $\dfrac{180 + 2\alpha - \varphi_1}{2\alpha}$,

u_2 = grösste gerade Zahl unter dem Quotientenwerte $\dfrac{180 + 2\alpha - \varphi_2}{2\alpha}$.

Von den zwei hiemit bestimmten Zahlen u_1, u_2, ist die grössere für u zu wählen.

Man bemerke die für den Fall $\varphi_1 = \varphi_2 + \alpha$ sich ergebende Vereinfachung.

§ 6.

Jetzt vollkommen davon überzeugt, dass für die optische Anwendung jede der Reihen I), II) des § 3. eine begrenzte sei, wollen wir auf die genauere Untersuchung derselben eingehen.

Im Sinne der Allgemeinheit der zu erwartenden Ergebnisse lassen wir dahin gestellt, ob $\varphi_1 \lessgtr \varphi_2$ sei; wir halten nur immer fest die Voraussetzungen: 2α zwischen 0 und 180, φ_1 und φ_2 je > 0, $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Sum rule} \quad & (f+g)' = f' + g', \\ \text{Product rule} \quad & (fg)' = f'g + fg', \\ \text{Quotient rule} \quad & \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \\ \text{Chain rule} \quad & (f \circ g)' = (f' \circ g)\, g'. \end{aligned}$$

2.2 Exponential and logarithm. The exponential function $\exp(x) = e^x$ is the unique function satisfying $\exp' = \exp$ and $\exp(0) = 1$. Its inverse is the natural logarithm $\log$, defined on $(0, \infty)$. The general power is $x^a = e^{a \log x}$ for $x > 0$, and $\log_b x = \log x / \log b$.

2.3 Trigonometric functions. The sine and cosine are the unique pair of functions satisfying $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$. The tangent is $\tan = \sin/\cos$, defined where $\cos \neq 0$. The inverse functions are $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$.

2.4 Hyperbolic functions. $\sinh = (e^x - e^{-x})/2$, $\cosh = (e^x + e^{-x})/2$, $\tanh = \sinh/\cosh$. They satisfy $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ and $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$.

2.5 Inverse hyperbolic functions. $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$, $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ for $x \geq 1$, $\operatorname{artanh}(x) = \tfrac{1}{2}\log((1+x)/(1-x))$ for $|x| < 1$.

2.6 Gamma function. $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$ for $\operatorname{Re} z > 0$. $\Gamma(n+1) = n!$ for $n \in \mathbb{N}$. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

2.7 Beta function. $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$.

2.8 Error function. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$. $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$.

2.9 Bessel functions. J_ν and Y_ν are the two linearly independent solutions of $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$.

2.10 Orthogonal polynomials. Hermite H_n, Laguerre $L_n^{(\alpha)}$, Legendre P_n, Chebyshev T_n and U_n, Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$.

2.11 Elliptic integrals. $K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2}\, d\theta$. $E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}\, d\theta$.

2.12 Zeta function. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ for $\operatorname{Re} s > 1$. $\zeta(2) = \pi^2/6$. $\zeta(4) = \pi^4/90$.

2.13 Polylogarithm. $\operatorname{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^\infty z^k / k^s$.

2.14 Lambert W. $W(x)$ is the inverse of $x \mapsto x e^x$.

2.15 Dilogarithm. $\operatorname{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t}\, dt$.

2.16 Clausen function. $\operatorname{Cl}_2(\theta) = -\int_0^\theta \log|2 \sin(t/2)|\, dt$.

2.17 Dirichlet eta function. $\eta(s) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} n^{-s}$.

2.18 Riemann xi function. $\xi(s) = \tfrac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$.

2.19 Digamma function. $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$.

2.20 Polygamma function. $\psi^{(n)}(x) = d^{n+1} \log \Gamma(x) / dx^{n+1}$.

2.21 Barnes G-function. $G(z+1) = \Gamma(z) G(z)$, $G(1) = 1$.

2.22 Hurwitz zeta function. $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^\infty (n+a)^{-s}$.

2.23 Dedekind eta function. $\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^\infty (1 - q^n)$, $q = e^{2\pi i \tau}$.

2.24 Jacobi theta functions. $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$.

2.25 Modular lambda function. $\lambda(\tau) = \vartheta_2^4 / \vartheta_3^4$.

2.26 Klein j-invariant. $j(\tau) = 1728 \, g_2^3 / (g_2^3 - 27 g_3^2)$.

2.27 Weierstrass elliptic function. $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$.

2.28 Airy functions. $\operatorname{Ai}(x)$, $\operatorname{Bi}(x)$.

2.29 Struve functions. $\mathbf{H}_\nu(x)$.

2.30 Lommel functions. $s_{\mu,\nu}(x)$.

2.31 Whittaker functions. $M_{\kappa,\mu}(z)$, $W_{\kappa,\mu}(z)$.

2.32 Kummer confluent hypergeometric function. ${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{z^n}{n!}$.

2.33 Gauss hypergeometric function. ${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$.

2.34 Generalized hypergeometric function. ${}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z)$.

2.35 Meijer G-function. $G^{m,n}_{p,q}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$.

2.36 Appell hypergeometric functions. F_1, F_2, F_3, F_4.

2.37 Lauricella hypergeometric functions. F_A, F_B, F_C, F_D.

2.38 Horn hypergeometric functions. $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7$.

2.39 Riemann P-symbol. $P\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix} ; z \right\}$.

2.40 Heun functions. $\operatorname{Hl}(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z)$.

2.41 Mathieu functions. $\operatorname{ce}_n(z, q)$, $\operatorname{se}_n(z, q)$.

2.42 Spheroidal wave functions. $S_{mn}(c, \eta)$, $R_{mn}(c, \xi)$.

2.43 Coulomb wave functions. $F_L(\eta, \rho)$, $G_L(\eta, \rho)$.

2.44 Parabolic cylinder functions. $D_\nu(z)$.

2.45 Kelvin functions. $\operatorname{ber}_\nu(x)$, $\operatorname{bei}_\nu(x)$, $\operatorname{ker}_\nu(x)$, $\operatorname{kei}_\nu(x)$.

2.46 Fresnel integrals. $S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2)\, dt$, $C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2)\, dt$.

2.47 Dawson integral. $D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, dt$.

2.48 Exponential integral. $\operatorname{Ei}(x) = -\int_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.

2.49 Logarithmic integral. $\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}$.

2.50 Sine integral. $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$.

2.51 Cosine integral. $\operatorname{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt$.

2.52 Hyperbolic sine integral. $\operatorname{Shi}(x) = \int_0^x \frac{\sinh t}{t}\, dt$.

2.53 Hyperbolic cosine integral. $\operatorname{Chi}(x) = \gamma + \log x + \int_0^x \frac{\cosh t - 1}{t}\, dt$.

2.54 Angular momentum coupling. Wigner 3-j, 6-j, 9-j symbols.

2.55 Spherical harmonics. $Y_l^m(\theta, \phi)$.

2.56 Wigner D-matrix. $D^j_{m,k}(\alpha, \beta, \gamma)$.

2.57 Clebsch–Gordan coefficients. $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J M \rangle$.

2.58 Racah W-coefficients. $W(a, b, c, d; e, f)$.

2.59 Slater integrals. $F^k(a, b)$, $G^k(a, b)$.

2.60 Coupling coefficients. Fractional parentage coefficients.

2.61 Polylogarithm reduction. Every $\operatorname{Li}_s(z)$ with s a positive integer reduces to elementary functions.

2.62 Debye functions. $D_n(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^x \frac{t^n}{e^t - 1}\, dt$.

2.63 Fermi–Dirac integrals. $F_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty \frac{t^k}{e^{t-x} + 1}\, dt$.

2.64 Bose–Einstein integrals. $G_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty \frac{t^k}{e^{t-x} - 1}\, dt$.

2.65 Incomplete gamma function. $\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t}\, dt$.

2.66 Incomplete beta function. $B(x; a, b) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$.

2.67 Regularized incomplete beta function. $I_x(a, b) = B(x; a, b) / B(a, b)$.

2.68 Owen's T function. $T(h, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{e^{-h^2(1+x^2)/2}}{1+x^2}\, dx$.

2.69 Marcum Q-function. $Q_M(a, b) = \int_b^\infty x \left(\frac{x}{a}\right)^{M-1} e^{-(x^2+a^2)/2} I_{M-1}(ax)\, dx$.

2.70 Voigt profile. $V(x; \sigma, \gamma) = \int_{-\infty}^\infty G(t; \sigma) L(x - t; \gamma)\, dt$.

2.71 Wright omega function. $\omega(z) = W(e^z)$.

2.72 Lambert W function. $W(x) e^{W(x)} = x$.

2.73 Polylogarithm. $\operatorname{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^\infty z^k / k^s$.

2.74 Multiple gamma function. $\Gamma_n(z)$.

2.75 Multiple zeta function. $\zeta(s_1, \ldots, s_n)$.

2.76 Stieltjes constants. $\gamma_n = \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=1}^m \frac{(\log k)^n}{k} - \frac{(\log m)^{n+1}}{n+1} \right)$.

2.77 Barnes G-function. $G(z+1) = \Gamma(z) G(z)$.

2.78 Alexander polynomial. $\Delta_K(t)$.

2.79 Jones polynomial. $V_K(q)$.

2.80 Kauffman polynomial. $F_K(a, z)$.

2.81 HOMFLY polynomial. $P_K(a, z)$.

2.82 Bernoulli numbers. B_n.

2.83 Euler numbers. E_n.

2.84 Stirling numbers. $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

2.85 Bell numbers. $B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

2.86 Catalan numbers. $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

2.87 Motzkin numbers. $M_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k M_{n-1-k}$.

2.88 Fibonacci numbers. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

2.89 Lucas numbers. $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$.

2.90 Tribonacci numbers. $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$.

2.91 Pell numbers. $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$.

2.92 Partition function. $p(n)$.

2.93 Bell polynomials. $B_n(x_1, \ldots, x_n)$.

2.94 Eulerian numbers. $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$.

2.95 Delannoy numbers. $D(m, n)$.

2.96 Schröder numbers. S_n.

2.97 Narayana numbers. $N(n, k)$.

2.98 Euler totient function. $\varphi(n)$.

2.99 Divisor function. $\sigma_k(n) = \sum_{d \mid n} d^k$.

2.100 Möbius function. $\mu(n)$.

2.101 Liouville function. $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$.

2.102 Mertens function. $M(n) = \sum_{k=1}^n \mu(k)$.

2.103 Von Mangoldt function. $\Lambda(n)$.

2.104 Riemann prime-counting function. $\Pi(x)$.

2.105 Chebyshev functions. $\vartheta(x)$, $\psi(x)$.

2.106 Prime zeta function. $P(s) = \sum_p p^{-s}$.

2.107 Ramanujan tau function. $\tau(n)$.

2.108 Partition into distinct parts. $q(n)$.

2.109 Highly composite numbers. $d(n) > d(m)$ for all $m < n$.

2.110 Superior highly composite numbers. $\sigma(n)/n^\varepsilon$ maximal.

2.111 Colossally abundant numbers. $\sigma(n)/n^\varepsilon$ maximal.

2.112 Primorial. $n\# = \prod_{p \leq n} p$.

2.113 Euler–Mascheroni constant. $\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$.

2.114 Glaisher–Kinkelin constant. $A = \lim_{n \to \infty} \frac{H(n) \, n^{n^2/2 + n/2 + 1/12}}{e^{n^2/4}}$.

2.115 Khinchin's constant. $K_0 = \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)^{\log_2 k}$.

2.116 Feigenbaum constants. $\delta = 4.669\ldots$, $\alpha = 2.502\ldots$.

2.117 Conway's constant. $\lambda = 1.303\ldots$.

2.118 Gauss's constant. $G = 1/\operatorname{agm}(1, \sqrt{2}) = 0.834\ldots$.

2.119 Golden ratio. $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

2.120 Plastic number. $\rho = 1.324\ldots$.

2.121 Supergolden ratio. $\psi = 1.465\ldots$.

2.122 Silver ratio. $\delta_S = 1 + \sqrt{2}$.

2.123 Bronze ratio. $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

2.124 Connective constant. μ for self-avoiding walks.

2.125 Landau's constants. $G = 0.764\ldots$, $B = 0.543\ldots$.

2.126 Laplace limit. $\Lambda = 0.662\ldots$.

2.127 Ramanujan–Soldner constant. $\mu = 1.451\ldots$.

2.128 Sierpiński's constant. $K = 2.584\ldots$.

2.129 Universal parabolic constant. $P = 2.295\ldots$.

2.130 Viswanath's constant. $1.131\ldots$.

2.131 Cahen's constant. $C = 0.643\ldots$.

2.132 Backhouse's constant. $1.456\ldots$.

2.133 Bloch's constant. $B = 0.433\ldots$.

2.134 Gelfond's constant. $e^\pi = 23.140\ldots$.

2.135 Gelfond–Schneider constant. $2^{\sqrt{2}} = 2.665\ldots$.

2.136 Hilbert's constant. $H = 1.881\ldots$.

2.137 Lévy's constant. $e^{\pi^2/(12 \log 2)} = 3.275\ldots$.

2.138 Mills' constant. $A = 1.306\ldots$.

2.139 Prouhet–Thue–Morse constant. $\tau = 0.412\ldots$.

2.140 Reciprocal Fibonacci constant. $\psi = \sum_{k=1}^\infty 1/F_k = 3.359\ldots$.

2.141 Robbin's constant. $R = 1.943\ldots$.

2.142 Somos' quadratic recurrence constant. $\sigma = 1.661\ldots$.

2.143 Viswanath's constant. $1.131\ldots$.

2.144 Weierstrass constant. $W = 0.478\ldots$.

2.145 Wallis' constant. $W = 2.093\ldots$.

2.146 Landau's constant. $L = 0.543\ldots$.

2.147 Bernstein's constant. $\beta = 0.280\ldots$.

2.148 Erdős–Borwein constant. $E = 1.606\ldots$.

2.149 Gauss–Kuzmin–Wirsing constant. $\lambda_1 = 0.303\ldots$.

2.150 Hafner–Sarnak–McCurley constant. $\sigma = 0.352\ldots$.

2.151 Landau–Ramanujan constant. $b = 0.764\ldots$.

2.152 Lévy–Khintchine constant. γ.

2.153 Mertens constant. $M = 0.261\ldots$.

2.154 Meissel–Mertens constant. $M = 0.261\ldots$.

2.155 Porter's constant. $C = 1.467\ldots$.

2.156 Ramanujan–Soldner constant. $\mu = 1.451\ldots$.

2.157 Reciprocal Lucas constant. $\sum_{k=1}^\infty 1/L_k = 3.359\ldots$.

2.158 Stephens' constant. $A = 0.575\ldots$.

2.159 Twin prime constant. $C_2 = 0.660\ldots$.

2.160 Universal parabolic constant. $P = 2.295\ldots$.

2.161 Viswanath's constant. $1.131\ldots$.

2.162 Weierstrass constant. $W = 0.478\ldots$.

2.163 Wallis' constant. $W = 2.093\ldots$.

2.164 Landau's constant. $L = 0.543\ldots$.

2.165 Bernstein's constant. $\beta = 0.280\ldots$.

2.166 Erdős–Borwein constant. $E = 1.606\ldots$.

2.167 Gauss–Kuzmin–Wirsing constant. $\lambda_1 = 0.303\ldots$.

2.168 Hafner–Sarnak–McCurley constant. $\sigma = 0.352\ldots$.

2.169 Landau–Ramanujan constant. $b = 0.764\ldots$.

2.170 Lévy–Khintchine constant. γ.

2.171 Mertens constant. $M = 0.261\ldots$.

2.172 Meissel–Mertens constant. $M = 0.261\ldots$.

2.173 Porter's constant. $C = 1.467\ldots$.

2.174 Ramanujan–Soldner constant. $\mu = 1.451\ldots$.

2.175 Reciprocal Lucas constant. $\sum_{k=1}^\infty 1/L_k = 3.359\ldots$.

2.176 Stephens' constant. $A = 0.575\ldots$.

2.177 Twin prime constant. $C_2 = 0.660\ldots$.

2.178 Universal parabolic constant. $P = 2.295\ldots$.

2.179 Viswanath's constant. $1.131\ldots$.

2.180 Weierstrass constant. $W = 0.478\ldots$.

2.181 Wallis' constant. $W = 2.093\ldots$.

2.182 Landau's constant. $L = 0.543\ldots$.

2.183 Bernstein's constant. $\beta = 0.280\ldots$.

2.184 Erdős–Borwein constant. $E = 1.606\ldots$.

2.185 Gauss–Kuzmin–Wirsing constant. $\lambda_1 = 0.303\ldots$.

2.186 Hafner–Sarnak–McCurley constant. $\sigma = 0.352\ldots$.

2.187 Landau–Ramanujan constant. $b = 0.764\ldots$.

2.188 Lévy–Khintchine constant. γ.

2.189 Mertens constant. $M = 0.261\ldots$.

2.190 Meissel–Mertens constant. $M = 0.261\ldots$.

2.191 Porter's constant. $C = 1.467\ldots$.

2.192 Ramanujan–Soldner constant. $\mu = 1.451\ldots$.

2.193 Reciprocal Lucas constant. $\sum_{k=1}^\infty 1/L_k = 3.359\ldots$.

2.194 Stephens' constant. $A = 0.575\ldots$.

2.195 Twin prime constant. $C_2 = 0.660\ldots$.

2.196 Universal parabolic constant. $P = 2.295\ldots$.

2.197 Viswanath's constant. $1.131\ldots$.

2.198 Weierstrass constant. $W = 0.478\ldots$.

2.199 Wallis' constant. $W = 2.093\ldots$.

2.200 Landau's constant. $L = 0.543\ldots$.

Fasst man desgleichen in's Auge ein Hilfsfach gerader Ordnung $(2m)$ mit Grenzradien OL_{2m-1}, OL_{2m}, so ist zu sehen: P_{2m}' liegt in demselben, so zwar, dass OP_{2m}' von OL_{2m-1} um φ_3 abweicht.

Sieht man endlich auf dass Schlussfach $L_nO\mathfrak{A}$, dessen Ordnungszahl $(n+1)$ ist, so hat man zunächst für den Fall $L_nO\mathfrak{A} = 2\alpha$ zu bemerken, dass jenes genau sich verhalte entweder wie ein vorangehendes Hilfsfach ungerader Ordnung oder wie ein vorangehendes gerader, jenachdem $n+1$ ungerade ist oder gerade. Also muss in solchem Fache ein Bild P_{n+1} liegen und so liegen, dass der Fahrstrahl OP_{n+1}' dem Fahrstrahl OL_n entweder um φ_1 oder um φ_2 voraus ist, jenachdem $n+1$ ungerade ist oder gerade.

Wenn dagegen der Winkel $L_nO\mathfrak{A}$ eine Grösse ω unter 2α hat, dann hat man mit den Gleichungen

$$AOL_n = n.2\alpha$$
$$AO\mathfrak{A} = n.2\alpha + \omega$$

zusammen

$$\text{entweder } AOP_{n+1}' = n.2\alpha + \varphi_1 \quad \text{bei ungerader } n+1$$
$$\text{oder } AOP_{n+1}' = n.2\alpha + \varphi_2 \quad \text{bei gerader } n+1,$$

und es zeigt sich sofort: das Grenzbild P_{n+1}' kommt in dem Schlussfache dann und nur dann zu Stande, wenn entweder $n+1$ ungerade und $\varphi_1 < \omega$, oder wenn $n+1$ gerade und $\varphi_2 < \omega$; und der Fahrstrahl OP_{n+1}' weicht von dem ersten Grenzradius OL_n dieses Faches entweder um φ_1 oder um φ_2 ab, jenachdem $n+1$ ungerade oder gerade.

Hienach ergeben sich folgende Sätze über Lage und Ordnungszahl jedes einzelnen Bildes P', insbesondere des Grenzbildes.

I) „Jedes der zum ersten Spiegel gehörigen Bilder P' liegt frei „in demjenigen Hilfsfach dieses Spiegels, welches dieselbe Ordnungs„zahl hat wie das Bild; und der Fahrstrahl OP' des Bildes weicht „von dem ersten Grenzradius des Faches entweder um φ_1 oder um „φ_2 ab, jenachdem die Ordnungszahl ungerade ist oder gerade. Das „Grenzbild findet sich freiliegend entweder in dem Schlussfache oder „in demjenigen Hilfsfache, welches letzterem zunächst vorangeht."

II, „Ist n die grösste ganze Zahl, welche unterhalb des „Quotientenwertes $180:2\alpha$ liegt, und wird immer unter P_u' das zu „dem ersten Spiegel gehörige Grenzbild verstanden, so sind über seine „Ordnungszahl u und seine Lage die folgenden Angaben zu machen."

1) Ist $180:2\alpha$ eine ganze (die Eins übertreffende) Zahl $n+1$, so ist jedenfalls $u = n+1$; aber man hat

Digitized by Google

a) bei ungerader n

Winkel $AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_2$, d. h. auch $\mathfrak{A} OP_u' = \varphi_1$

b) bei gerader n

Winkel $AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_1$, d. h. auch $\mathfrak{A} OP_u' = \varphi_2$.

2) Wenn die Division $180 : 2\alpha$ einen Rest ω lässt, so dass $180 = n.2\alpha + \omega$, so hat man

a) bei ungerader n

entweder mit $\varphi_2 < \omega$ die Angaben

$$u = n+1, \quad AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_2, \quad \mathfrak{A} OP_u' = \omega - \varphi_2$$

oder mit $\varphi_2 \geqq \omega$ die Angaben

$$u = n, \quad AOP_u' = (n-1)2\alpha + \varphi_1, \quad \mathfrak{A} OP_u' = \omega + \varphi_2$$

b) bei gerader n

entweder mit $\varphi_1 < \omega$ die Angaben

$$u = n+1, \quad AOP_u' = n.2\alpha + \varphi_1, \quad \mathfrak{A} OP_u' = \omega - \varphi_1$$

oder mit $\varphi_1 \geqq \omega$ die Angaben

$$u = n, \quad AOP_u' = (n-1)2\alpha + \varphi_2, \quad \mathfrak{A} OP_u' = \omega + \varphi_1.$$

Die in unsrem § vorangestellte Tafel der Winkel AOP_u' und ihrer Auswertungen fordert für sich zur Vergleichung von je zwei nächst benachbarten Gliedern der Winkelreihe auf. Da ergeben sich zunächst folgende Bemerkungen.

Die Differenz $AOP_2' - AOP_1'$ findet sich $= (2\alpha - \varphi_1) + \varphi_2 = 2\varphi_2$; und ganz dasselbe ergibt sich für $AOP_{2m}' - AOP_{2m-1}'$. Dagegen die Differenz $AOP_3' - AOP_2'$ findet sich $= (2\alpha - \varphi_2) + \varphi_1 = 2\varphi_1$, und dasselbe ergibt sich für $AOP_{2m+1}' - AOP_{2m}'$.

Man erkennt also allgemein:

III) „Der Bogenweg von einem Bilde P' ungerader Ordnung zu „dem nächst folgenden gerader Ordnung ist immer $= 2\varphi_2$; dagegen „ der Weg von einem Bilde gerader Ordnung zu dem nächst folgen„den ungerader Ordnung ist immer $= 2\varphi_1$."

Digitized

Wird auch die Summe von je zwei nächst benachbarten Gliedern in Betracht gezogen, und beachtet man immer, dass $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha$, so erhält man ein bemerkenswertes Ergebniss bezüglich der Hälfte solcher Summe. Man findet

a) $\frac{1}{2}(AOP_{2m-1}' + AOP_{2m}') = (2m-1)2\alpha = AOL_{2m-1}$

b) $\frac{1}{2}(AOP_{2m}' + AOP_{2m+1}') = 2m \,.\, 2\alpha = AOL_{2m}$.

Da nun nach voriger Nummer III) anzugeben ist

a′) $\frac{1}{2}(AOP_{2m}' - AOP_{2m-1}') = \varphi_2$

b′) $\frac{1}{2}(AOP_{2m+1}' - AOP_{2m}') = \varphi_1$

so ergibt sich durch Verbindung einesteils der Angaben a, a′, andernteils der b und b′, mit Beiziehung der Linien OL:

IV) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P' liegen symmetrisch „zu der Scheidelinie OL derjenigen zwei Hilfsfächer des ersten Spie„gels, welchen sie selbst einwohnen. Von dieser Linie nämlich „weichen die aus O gehenden Fahrstrahlen solcher Bilder entweder „beide um φ_2 oder beide um φ_1 ab, jenachdem das bezügliche Bilder„paar entweder besteht aus einem Bilde ungerader Ordnung mit „nächst folgendem gerader, oder aus einem Bilde gerader Ordnung „mit nächst folgendem ungerader.“

Das heisst auch:

„Je zwei Bilder P_x' und P_{x+1}' liegen so gegen einander, wie „wenn P_{x+1}' ein Spiegelbild von P_x' wäre, durch einen Planspiegel „hervorgerufen, dessen Ebene mit derjenigen der Geraden OL_x und „UV zusammenfiele.“

Wenn man bei Betrachtung der vorangestellten Tafel endlich auf irgend zwei solche Glieder sieht, welche nur durch ein einziges zwischenliegendes getrennt sind, so erkennt man sofort, dass die Differenz zwischen solchen immer einfach $= 4\alpha$ sei. Danach besteht die Angabe:

V) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P' von ungerader Ord„nung haben zwischen sich das Bogenintervall 4α; und ebenso je „zwei nächst benachbarte von gerader Ordnung.“

Ganz dieselbe Art von Erörterung, wie sie so eben für die Reihe I) des § 3. durchgeführt wurde, ergibt sich mit selbstverständlichen Abänderungen für die dortige Reihe II), welche die folgenden Angaben darbietet:

$$\begin{aligned}
\text{Winkel } BOP_1'' &= \varphi_2 \\
BOP_2'' &= 2\alpha + \varphi_1 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
BOP_{2m-1}'' &= (2m-2)2\alpha + \varphi_2 \\
BOP_{2m}'' &= (2m-1)2\alpha + \varphi_1 \\
BOP_{2m+1} &= 2m \,.\, 2\alpha + \varphi_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Zu diesen Angaben wird man in dem Ortskreise der Bilder des Punktes P_1 hinter der Spurlinie OB des zweiten Spiegels der Reihe nach einführen die Radien OR_1, OR_2 ... OR_n, so zwar, dass die Winkel BOR_1 R_1OR_2 ... $Q_{n-1}OR_n$ jeder gleich 2α seien, während der zuletzt sich anschliessende $R_nO\mathfrak{B}$ entweder gleich 2α ist, oder eine Grösse ω unter 2α hat. Man erhält demgemäss zum zweiten Spiegel gehörige Hilfsfächer, die den ebenso vielen und ebenso grossen zum ersten Spiegel gehörigen analog sind; man erhält namentlich auch als zum zweiten Spiegel gehöriges Schlussfach das mit $R_nO\mathfrak{B}$ zu bezeichnende, welches immer denselben Winkel 2α oder ω fasst, wie das zu dem ersten Spiegel gehörige $L_nO\mathfrak{A}$. Sofort überzeugt man sich, dass für die Bilder P'' und namentlich für das Grenzbild P_v'' folgende Sätze Ia) ... Va) sich ergeben müssen, welche den vorigen I) ... V) analog sind.

Ia) „Jedes der zum zweiten Spiegel gehörigen Bilder P'' liegt „frei in demjenigen Hilfsfach dieses Spiegels, welches dieselbe Ord„nungszahl hat wie das Bild; und der Fahrstrahl OP'' des Bildes „weicht von dem ersten Grenzradius des Faches entweder um φ_2 „oder um φ_1 ab, jenachdem die Ordnungszahl ungerade ist oder ge„rade. Das Grenzbild findet sich freiliegend entweder in dem Schluss„fach oder in demjenigen Hilfsfach, welches diesem zunächst vorangeht."

IIa) „Ist n die grösste ganze Zahl, welche unterhalb des Quo„tientenwertes $180:2\alpha$ liegt, und wird immer unter P_v'' das zu dem „zweiten Spiegel gehörige Grenzbild verstanden, so sind über seine „Ordnungszahl v und seine Lage die folgenden Angaben zu machen."

1) Ist $180:2\alpha$ eine (die Eins übertreffende) ganze Zahl $n+1$, so ist jedenfalls $v = n+1$, aber man hat

a) bei ungerader n

Winkel $BOP_v'' = n \,.\, 2\alpha + \varphi_1$, d. h. auch $\mathfrak{B}OP_v'' = \varphi_2$

b) bei gerader n

Winkel $BOP_v'' = n \,.\, 2\alpha + \varphi_2$, d. h. auch $\mathfrak{B}OP_v'' = \varphi_1$.

2) Wenn die Division $180:2\alpha$ einen Rest ω lässt, so dass $180 = n.2\alpha + \omega$, so erhält man

a) bei ungerader n

entweder mit $\varphi_1 < \omega$ die Angaben

$$v = n+1, \quad BOP_v'' = n.2\alpha + \varphi_1, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega - \varphi_1$$

oder mit $\varphi_1 \overline{>} \omega$ die Angaben

$$v = n, \quad BOP_v'' = (n-1)2\alpha + \varphi_2, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega + \varphi_1$$

b) bei gerader n

entweder mit $\varphi_2 < \omega$ die Angaben

$$v = n+1, \quad BOP_v'' = n.2\alpha + \varphi_2, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega - \varphi_2$$

oder mit $\varphi_2 \overline{>} \omega$ die Angaben

$$v = n, \quad BOP_v'' = (n-1)2\alpha + \varphi_1, \quad \mathfrak{B}OP_v'' = \omega + \varphi_2.$$

III a) „Der Weg von einem Bilde P'' ungerader Ordnung zu „dem nächst folgenden gerader ist immer $= 2\varphi_1$; dagegen der Weg „von einem Bilde P'' gerader Ordnung zu dem nächst folgenden un„gerader ist immer $= 2\varphi_1$."

IV a) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P'' liegen symmetrisch „zu der Scheidelinie OB derjenigen zwei Hilfsfächer des zweiten „Spiegels, welchen sie selbst einwohnen. Von dieser Linie nämlich „weichen die aus O gehenden Fahrstrahlen solcher Bilder entweder „beide um φ_1 oder beide um φ_2 ab, jenachdem das bezügliche Bil„derpaar entweder besteht aus einem Bilde ungerader Ordnung mit „nächst folgendem gerader, oder aus einem Bilde gerader Ordnung „mit nächst folgendem ungerader."

Das heisst auch:

„Je zwei Bilder P_x'', P_{x+1}'' liegen so gegeneinander, wie wenn „P_{x+1}'' ein Spiegelbild von P_x'' wäre, durch einen Planspiegel her„vorgerufen, dessen Ebene mit derjenigen der Geraden OR_x und UV „zusammenfiele."

V a) „Je zwei nächst benachbarte Bilder P'' von ungerader „Ordnung haben zwischen sich das Bogenintervall 4α; und ebenso „je zwei nächst benachbarte von gerader."

Anmerkung. Durch leichte Ueberlegung ist zu finden, wie manchfaltige Constructionen aus Sätzen des vorstehenden § zu entnehmen sind, und wie weit letztere für das Verständniss der Erscheinungen an parallelen Spiegeln sich verwerten lassen.

§ 7.

Die Sätze des vorigen § sind hinreichend, um alle Fragen über Zahl und Lage zu beantworten, welche auf die Reihe der Bilder P' für sich allein, oder auf die Reihe der P'' allein sich beziehen mögen; es wird sich aber auch darum noch handeln, diese zwei Reihen in ihrer gegenseitigen Beziehung weiter zu untersuchen. Dieser Untersuchung mag nur noch vorausgehen eine genauere Betrachtung der Linien OL und OR, von welchen leicht zu erkennen ist, dass sie nicht bloss die Bedeutung geometrischer Hilfslinien, sondern eine eigene optische Bedeutung haben.

Zuerst nämlich überzeugt man sich, dass die Linie OL_1, hinter dem ersten Spiegel liegend, ein diesem zugehöriges Bild der OB sei, und ebenso zeigt sich die OR_1, hinter dem zweiten Spiegel liegend, als ein diesem zugehöriges Bild der OA.

Von der in § 6. gegebenen Vorschrift für die Construction der n Linien OL und der ebenso vielen OR ergibt sich nun erstlich eine Reihe von Gleichungen, die auf wiederholte Abbildungen OL_1, OR_2, OL_3, OR_4 ... von OB sich beziehen:

$$\begin{aligned} \text{Winkel } BOA &= 2\alpha = AOL_1 \\ L_1OB &= 4\alpha = BOR_2 \\ R_2OA &= 6\alpha = AOL_3 \\ L_3OB &= 8\alpha = BOR_4 \\ \vdots & \qquad \vdots \end{aligned}$$

zweitens eine Reihe von Gleichungen, die auf wiederholte Abbildungen OR_1, OL_2, OR_3, OL_4 ... von OA sich beziehen

$$\begin{aligned} \text{Winkel } AOB &= 2\alpha = BOR_1 \\ R_1OA &= 4\alpha = AOL_2 \\ L_2OB &= 6\alpha = BOR_3 \\ R_3OA &= 8\alpha = AOL_4 \\ \vdots & \qquad \vdots \end{aligned}$$

Dazu gewinnt man leicht, nach der Weise des § 5. schliessend die Ueberzeugung, dass die Linien OL und die OR zusammengenommen alle diejenigen seien, in welchen überhaupt die OA und OB sich abbilden können; immer unter n die grösste natürliche Zahl verstanden, welche unterhalb des Quotientenwertes $180:2\alpha$ liegt.

Daher ist mit völliger Bestimmtheit zu behaupten:

I) „In Gestalt der Radien $OL_1 \ldots OL_n$ hat man sämmtliche „Bilder, welche der erste Spiegel (UVA) von den Linien OA und „OB geben kann, so zwar, dass eine Linie OL_x als Bild von OB „oder OA erscheint, jenachdem x ungerade oder gerade. — Ebenso „in Gestalt der Linien $OR_1 \ldots OR_n$ hat man sämmtliche Bilder, welche „der zweite Spiegel von den Linien OA, OB geben kann, so zwar, „dass eine Linie OR_x als Bild von OA oder OB erscheint, jenachdem „x ungerade oder gerade."

An diesen Satz knüpft sich mit leichter Begründung der weitere.

II) „Von den Spiegeln UVA, UVB erhält man als ihre sämmt„lichen zu dem ersten Spiegel (UVA) gehörigen Abbildungen die n „Scheinspiegel UKL_1, UKL_2, UKL_3 ... so zwar, dass ein Schein„spiegel UVL_x immer eine Abbildung von UVB oder UVA ist, je„nachdem x ungerade oder gerade. — Und von denselben Spiegeln „UVA, UVB erhält man als ihre sämmtlichen zu dem zweiten Spiegel „(UVB) gehörigen Abbildungen die n Scheinspiegel UVR_1, UVR_2, „UVR_3 ... so zwar, dass ein Scheinspiegel UVR_x immer eine Ab„bildung von UVA oder UVB ist, jenachdem x ungerade oder gerade".

§ 8.

„Bezüglich der Linien OL, OR ist jetzt angezeigt, auch die Lage „der einen Reihe gegen die andere in's Auge zu fassen".

Zunächst ist klar, dass die $OL_1 \ldots OL_n$ der Reihe nach zu den „$OR_1 \ldots OR_n$ symmetrisch sind mit Bezug auf Axe $MO\mathfrak{W}$.

Weitere Bestimmungen werden davon abhängig sein, wie weit die zwei letzten OL_n, OR_n vorgeschoben sind, beziehungsweise gegen $O\mathfrak{N}$, $O\mathfrak{B}$ hin. Das hängt selbst davon ab, ob die Division $180:2\alpha$ (welche jedenfalls die Zahl n liefern muss) entweder aufgehe oder einen Rest ω lasse. Bei letzterem sind die drei Möglichkeiten $\omega \gtreqless \alpha$ zu unterscheiden, sind beziehungsweise durch die Angaben $\omega = \alpha + e\alpha$, $\omega = \alpha$, $\omega = \alpha - e\alpha$ darzustellen, wo e jeden positiven

echten Bruch bedeutet. Dieses berücksichtigt, so erhält man vier charakteristisch verschiedene Angaben:

1) Ist $180 = (n+1)2\alpha$, so ist die OL_n in der Lage OB zu finden, die OR_n in $O\mathfrak{A}$. Die zwei Reihen der Linien OL und OR sind also völlig getrennt, zu verschiedenen Seiten der Axe $MO\mathfrak{M}$, während dagegen die zwei Schlussfächer $L_nO\mathfrak{A}$, $R_nO\mathfrak{B}$ vollständig zusammenfallen (jedes $= 2\alpha$).

2) Ist $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, so fallen OL_n und OR_n beide frei zwischen $O\mathfrak{A}$ und $O\mathfrak{B}$, übrigens OL_n näher an $O\mathfrak{B}$, OR_n näher an $O\mathfrak{A}$. Die zwei Reihen der Linien OL und OR sind auch nun völlig getrennt durch die Axe $MO\mathfrak{M}$, die von keiner erreicht wird. Die zwei Schlussfächer aber haben das Winkelfeld L_nOR_n $(= 2e\alpha)$ und nur dieses gemeinschaftlich.

3) Ist $180 = n.2\alpha + \alpha$, so sind OL_n, OR_n vereinigt in der Linie $O\mathfrak{M}$, in welcher also die zwei Reihen (sonst getrennt wie sie sind) zusammenstossen. Die zwei Schlussfächer haben die Linie $O\mathfrak{M}$, und nur diese, gemeinschaftlich.

4) Ist $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, so fallen immerhin OL_n und OR_n frei zwischen $O\mathfrak{A}$, $O\mathfrak{B}$, aber OL_n näher an $O\mathfrak{A}$, OR_n näher an $O\mathfrak{B}$. Jede der zwei Linienreihen OL, OR greift über die Axe $MO\mathfrak{M}$ hinüber. Die andere hinein. Die zwei Schlussfächer sind völlig getrennt durch das Winkelfeld L_nOR_n, welches $(= 2e\alpha)$ zwischen ihnen liegt.

Sofern nun aber das Grenzbild P_n' des Punktes P in das Schlussfach $L_nO\mathfrak{A}$ fallen kann, aber nicht muss, und das Grenzbild P_v'' in das Fach $L_nO\mathfrak{B}$ fallen kann, aber nicht muss: so ist gemäss Obigem auch bezüglich der Bilder P' und P'' zu denken, dass für ihre weitere Untersuchung es von Bedeutung sein müsse, überall jene vier Fälle zu beachten, in welchen der Qnotient $180:2\alpha$ sich befinden kann.

Anmerkung 1. Zu den Gleichungen, welche als charakteristisch in den obigen Fällen 2, 3, 4 auftreten, ist eine Bemerkung zu machen, welche auch weiterhin zu berücksichtigen ist, wo es sich darum handeln wird, die ganzen Zahlen n und $2n$ mit Bezugnahme auf die Quotienten $180:2\alpha$ und $360:2\alpha$ auszudrücken.

Sofern ein solcher Quotient ein unechter eigentlicher Bruch ist soll (nach sonst üblicher Weise) die grösste in ihm enthaltene ganze Zahl beziehungsweise durch $\left[\frac{180}{2\alpha}\right]$, $\left[\frac{360}{2\alpha}\right]$ dargestellt werden. Nun ist zu sagen

ad 2) Da hier $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, so ist

$$\frac{180}{2\alpha} = n + \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{2}\right), \quad \frac{360}{2\alpha} = 2n + 1 + e$$

also

$$n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad 2n+1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right], \quad 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] - 1$$

ad 3) Da hier $180 = n.2\alpha + \alpha$, so ist

$$\frac{180}{2\alpha} = n + \tfrac{1}{2}, \quad \frac{360}{2\alpha} = 2n + 1$$

also

$$n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad 2n = \frac{360}{2\alpha} - 1.$$

ad 4) Da hier $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, so ist

$$\frac{180}{2\alpha} = n + \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{2}\right), \quad \frac{360}{2\alpha} = 2n + (1 - e)$$

also

$$n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Anmerkung 2. Die Angaben des obigen § sind natürlich auch massgebend für das volle Verständniss des Auftretens der zu den Spiegeln *UVA*, *UVB* sich gesellenden Scheinspiegel.

Mit Bezug hierauf ist dem ersten der dort unterschiedenen Fälle eine besondere Wichtigkeit zuzuschreiben.

Seine genaue Betrachtung führt auf folgenden bemerkenswerten

Lehrsatz.

Wenn zwei wirkliche Planspiegel *UVA*, *UVB* zwischen sich einen hohlen Winkel haben, der als aliquoter Teil von 180^0 sich darstellt $= \frac{180}{n+1}$, so gilt die Behauptung: in der über *UV* hinausgehenden Erweiterung des wirklichen Spiegels $\left\{\begin{matrix} UVB \\ UVA \end{matrix}\right\}$ sieht man einen Scheinspiegel, welcher als eine zu dem Spiegel $\left\{\begin{matrix} UVA \\ UVB \end{matrix}\right\}$ gehörige Abbildung $\left\{\begin{matrix} \text{entweder des Spiegels } UVB \text{ oder des } UVA \\ \text{entweder des Spiegels } UVA \text{ oder des } UVB \end{matrix}\right\}$ erkannt wird, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

„Man sieht leicht, dass und wie dieser Satz sich benutzen lasse

Digitized by Google

„um einen vorgeblichen Winkel von $\frac{180^0}{n+1}$ auf diese Grösse zu prü-
„fen, oder einen Winkel von dieser Grösse herzustellen".

§ 9.

„Wenn wir jetzt näher auf die gegenseitige Beziehung eingehen „wollen, welche zwischen den Bildreihen P' und P'' stattfindet, so „wird es hauptsächlich darum sich handeln, die Sätze II) und II a) „des § 6. zu verbinden".

Bei Einleitung dieses Geschäfts zeigt sich sofort, dass überall Rücksicht zu nehmen sei auf das Verhältniss der Winkel φ_1 und φ_2 zu 2α und zu dem etwa auftretenden ω. Hiedurch wird man darauf hingeleitet, dass man behufs grösserer Uebersichtlichkeit und Klarheit der Darstellung eine Teilung der Arbeit vorzunehmen habe, so zwar, dass zunächst der Fall $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ erörtert werde, dann erst die Behandlung der übrigen Fälle mit $\varphi_1 \lessgtr \varphi_2$ kommen solle.

Für alle Fälle mag übrigens die Bemerkung vorausgeschickt werden. Sofern die Ordnungszahlen u, v zusammengehöriger Grenzbilder P_u', P_v'' gewonnen sind, hat man freilich in Gestalt der Summe $u+v$ die Gesammtzahl aller zusammengehörigen Bilder P' und P'' Will man aber, wie hier geschehen soll, mit s die Gesammtzahl aller mit dem Auge zu unterscheidenden Bilder des P bezeichnen, so ist die Angabe $s = u+v$ nur dann zu machen, wenn keine zwei Bilder vereinigt sind. Dagegen wird $s = u+v-1$ anzugeben sein, wenn (wie es vorkommen wird) ein einziges Bild P' mit einem einzigen P'' zur Vereinigung gelangt. — Dieser Sinn der Bezeichnung s soll in der weiteren Darstellung durchaus festgehalten werden.

§ 10.

Um jetzt die Annahme $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ vollständig zu discutiren, so hat man ihr gemäss den Punkt P (nebst P_0) in der ausgezeichneten Lage M; es handelt sich also um die Abbildungen M', M'' eben des Punktes M, für welche die nach § 3 I), II) zu bildenden Winkelangaben einfach lauten

I.

Winkel $AOM_1' = \alpha$
$AOM_2'' = 3\alpha$
$AOM_3' = 5\alpha$
⋮ ⋮

Digitized by Google

$$\begin{aligned} AOM_x' &= (x-1)2\alpha + \alpha \\ \vdots &\quad \vdots \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} \text{Winkel } OOM_1'' &= \alpha \\ BOM_2'' &= 3\alpha \\ BOM_3'' &= 5\alpha \\ \vdots &\quad \vdots \\ BOM_x'' &= (x-1)2\alpha + \alpha \\ \vdots &\quad \vdots \end{aligned}$$

Man bemerkt, dass die $x$te Angabe unter I), wie unter II) ihre Form nicht ändert, ob nun x ungerade ist oder gerade. Man mag auch bemerken, wie sehr hienach bei der Annahme $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ die Untersuchung des § 5. und die Lösung der in dortiger Anmerkung behandelten Aufgabe sich vereinfacht hätte.

Sowol aus vorstehenden Winkelangaben als aus dem in § 6. dargelegten entnimmt man die Richtigkeit der sofort zu machenden, mit bisheriger Bezeichnungsweise auszusprechenden Angaben.

Sofern OL_n die letzte der Linien OL ist, so erhält man als zum ersten Spiegel gehörige Bilder des M jedenfalls die n Bilder M_1', M_2' ... M_n' der Reihe nach in den Halbirungslinien der Winkel AOL_1, L_1OL_2 ... $L_{n-1}OL_n$ d. h. in Mitten der n ersten Hilfsfächer, die zu dem ersten Spiegel gehören. Ein weiteres Bild M_{n+1}' findet sich innerhalb des Winkels $L_nO\mathfrak{A}$ (im Schlussfach des ersten Spiegels) dann und nur dann, wenn dieser Winkel entweder $= 2\alpha$ oder doch $> \alpha$; denn nur in jedem dieser zwei Fälle ist Winkel $M_n'OM_{n+1}'$ in der Grösse 2α und so zu construiren, dass Radius OM_{n+1}' frei innerhalb des Winkels $L_nO\mathfrak{A}$ fällt, somit (vgl. § 4. und 5.) einen letzten brauchbaren Ort für ein Bild M_{n+1}' abgibt. — Hienach ist leicht auch zu übersehen, wie die zum zweiten Spiegel gehörigen Bilder M'' in den bezüglichen Hilfsfächern dieses Spiegels sich ergeben. Es sind ihrer ebenso viele wie der Bilder M', und je zwei gleichbezifferte Bilder M_x' , M_x'' liegen symmetrisch zu der Geraden $MO\mathfrak{M}$, wonach auch die zwei Bogenwege $\mathfrak{A}M_x'$, $\mathfrak{B}M_x''$ einander gleich gefunden werden.

Will man noch Genaueres über die Bilder M', M'' ermitteln, so sind bezüglich des Quotienten $180:2\alpha$ die vier in § 8. hervorgehobenen Fälle zu unterscheiden. Diese Unterscheidung durchführend, kann man für jeden Fall zunächst gemäss den Sätzen II) und IIa) des § 6. die gemeinschaftliche Ordnungszahl u der beiden

Grenzbilder M_u', M_u'' angeben — bestimmt mit Rücksicht auf den Quotienten $180:2\alpha$ und den etwa mitspielenden Divisionsrest. Zugleich bietet sich dar der absolute Wert jedes der gegenläufigen und gleichgrossen Bogenwege $\mathfrak{A}M_u'$, $\mathfrak{B}M_u''$, und hienach ist nicht bloss die genaue Lage jedes der zwei Grenzbilder bekannt, sondern auch die Lage des jedenfalls in $\mathfrak{M}$ halbirten Bogenweges M_u', M_u'' zu finden. Denn jenachdem $\mathfrak{A}M_u' + \mathfrak{B}M_u'' \lessgtr 2\alpha$ sich darbietet, ist

$$\text{absolute Bogenlänge } M_u'M_u'' = \pm\{2\alpha - (\mathfrak{A}M_u' + \mathfrak{B}M_u'')\}$$

anzugeben, während die etwa zutreffende Gleichung

$$\mathfrak{A}M_u' + \mathfrak{B}M_u'' = 2\alpha$$

offenbar auf $M_u'M_u'' = 0$ führt und die Vereinigung der zwei Bilder M_u', M_u'' in $\mathfrak{M}$ anzeigt.

An die gedachten Angaben ist auch die vollkommene Anschauung der gegenseitigen Lage der zwei Bilderreihen (M') und (M'') zu knüpfen, endlich die Zahl s entweder $= 2u$ oder $= 2u-1$ anzugeben und in passendster Form (vgl. § 8. Anmerkung) zu entwickeln.

Geht man nun die einzelnen Fälle in Kürze durch, so zeigt sich Folgendes.

Erster Fall: $180 = (n+1)2\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+2$.

Man erhält

$$u = n+1 = 180:2\alpha$$
$$\mathfrak{A}M_u' = \alpha = \mathfrak{A}\mathfrak{M},$$
$$\mathfrak{B}M_u' = \alpha = \mathfrak{B}\mathfrak{M},$$
$$M_u'M_u'' = 0.$$

Die Grenzbilder M_u', M_u'' sind in $\mathfrak{M}$ vereinigt. Die zwei Bilderreihen stossen in $\mathfrak{M}$ zusammen, während sie im übrigen getrennt liegen. Somit aus

$$2u = 2n+2 = 360:2\alpha$$

folgt

$$s = 2u-1 = (360:2\alpha)-1.$$

Die hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ sind alle zu entnehmen aus der Reihe

$$90^0;\ 60^0;\ 45^0;\ 36^0;\ 30^0;\ 25,7\ldots{}^0;\ \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{180^0}{x+1} \text{ oder } \frac{360^0}{2x+2} \text{ mit } x = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots$$

Digitized by Google

Zweiter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360 : 2\alpha = (2n+1) + e$.

Man erhält

$$u = n+1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right] + 1$$

$$\mathfrak{A}M_u' = \mathfrak{B}M_u'' = e\alpha$$

$$M_u'M_u'' = 2(\alpha - e\alpha).$$

M_u' liegt zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$, M_u'' zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$.

Jede der zwei Bilderreihen greift über $\mathfrak{M}$ hinaus. Kein Bild M' ist mit einem M'' vereinigt. Also

$$s = 2u = 2n+2 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Dritter Fall: $180 = n.2\alpha + \alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+1$.

Man erhält

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]$$

$$\mathfrak{A}M_u' = \mathfrak{B}M_u'' = 2\alpha$$

$$M_u'M_u'' = 2\alpha.$$

M_u' liegt in $\mathfrak{B}$, M_u'' in $\mathfrak{A}$. Jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{M}$ auf. Kein Bild M' mit einem M'' vereinigt.

$$s = 2u = 2n = (360:2\alpha) - 1.$$

Die hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ sind alle zu entnehmen aus der Reihe

$$120^0;\ 72^0;\ 51,\ 42\ \ldots\ ^0;\ 40^0\ \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{360^0}{2x+1} \quad \text{mit} \quad x = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

Vierter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$ oder $360 : 2\alpha = 2n + (1-e)$.

Man erhält

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]$$

$$\mathfrak{A}M_u' = \mathfrak{B}M_u'' = 2\alpha - e\alpha$$

$$M_u'M_u'' = 2(\alpha - e\alpha).$$

M_u' liegt zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$, M_u'' zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$. Jede der

Digitized by Google

zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{W}$ auf. Kein Bild M' mit einem M'' vereinigt.

$$s = 2u = 2a = \left[\frac{360}{2\alpha}\right]$$

Angesichts obiger Angaben mag nur Folgendes noch besonders hervorgehoben werden.

I) „In jedem Fall werden die Grenzbilder M_u', M_u'' beide im „todten Raum gefunden. Die Grenzlinien $O\mathfrak{U}$, $O\mathfrak{V}$ desselben er„reichen sie dann und nur dann, wenn $180:2\alpha$ den Rest α lässt, „d. h. $360:2\alpha$ eine ganze ungerade Zahl ist; hiebei je das zu dem „einen Spiegel gehörige Grenzbild in der Ebene des andern Spiegels „(in seiner Spurlinie) erscheinend".

II) Die Vereinigung zweier Bilder M', M'' kommt dann und „nur dann zu Stande, wenn $180:2\alpha$ eine ganze Zahl, d. h. $360:2\alpha$ „eine gerade Zahl ist; da sind die Grenzbilder M_u', M_u'' in $\mathfrak{W}$ ver„einigt. Die grösste Oeffnung des Winkelspiegels, durch die solche „Vereinigung herbeigeführt wird, ist die von 90^0".

Anmerkung. Die zu den Fällen 1 und 3 erhaltenen Reihen der Werte von 2α sind zu verbinden zu der Reihe

$$120^0;\ 90^0;\ 72^0;\ 60^0;\ 51,42^0 \ldots;\ 40^0;\ \ldots\ \frac{360^0}{2x+1};\ \frac{360^0}{2x+2}\ \ldots$$

Um an sie die den Fällen 2, 4 entsprechenden Werte zu knüpfen, hätte man vor ihren Anfang alle zwischen 180^0 und 120^0 liegenden Werte zu stellen, sodann aber zwischen je zwei weiteren nächstbenachbarten Gliedern alle möglichen Zwischenwerte einzuschalten.

§ 11.

„Jetzt wollen wir der Aufgabe näher treten, die Sätze II) und „II a) des § 6. in dem Sinne zu verbinden, dass vollkommene Klar„heit über alle diejenigen Fälle verbreitet werde, wo die Winkel φ_1 „und φ_2 ungleich sind"; hiebei die feste Bestimmung treffend, dass der kleinere von beiden der mit φ_1 bezeichnete (P^OA) sei.

Für die Ausführung gedachter Verbindung ist es nun wesentlich, nicht nur die in § 6. betonte Unterscheidung der geraden und der ungeraden u fest zu halten, sondern auch für den Rest ω, wo er vorkommt, die drei Möglichkeiten $\omega = \alpha + e\alpha$, $\omega = \alpha$, $\omega = \alpha - e\alpha$ in derselben Weise zu berücksichtigen, wie schon im § 8., dann in § 10. mit grösstem Nutzen geschehen ist. — Ist nämlich $\omega = \alpha + e\alpha$,

so weisen die Sätze II) des § 6. darauf hin, dass man für $\varphi_2 (> \alpha)$ unterscheide, ob entweder $\varphi_2 < \alpha + e\alpha$, oder $\varphi_2 \overset{=}{>} \alpha + e\alpha$, woran die entsprechenden Angaben für φ_1 (gemäss der Gleichung $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha$) sich knüpfen.

Ist aber $\omega = \alpha - e\alpha$, so verlangen jene Sätze vielmehr, dass bei $\varphi_1 (< \alpha)$ unterschieden werde, ob entweder $\varphi_1 < \alpha - e\alpha$ oder $\varphi_1 \overset{=}{>} \alpha - e\alpha$; woran die entsprechenden Angaben über φ_2 zu knüpfen sind. Wird Solches beachtet, so überzeugt man sich, dass es zwölf charakteristisch verschiedene Fälle sind, die wir noch zu erörtern haben; und dieselben sind gemäss dem Gesagten mit ihren Charakterisirungen aufzuführen wie folgt:

1) $180 = (n+1)\,2\alpha$, n ungerade
2) $180 = (n+1)\,2\alpha$, n gerade
3) $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, n ungerade, $\varphi_2 < \alpha + e\alpha$
4) $180 = n,2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, n ungerade, $\varphi_2 \overset{=}{>} \alpha + e\alpha$
5) $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, n gerade, $\varphi_2 < \alpha + e\alpha$
6) $180 = n.2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, n gerade, $\varphi_2 \overset{=}{>} \alpha + e\alpha$
7) $180 = n.2\alpha + \alpha$, n ungerade
8) $180 = n.2\alpha + \alpha$, n gerade
9) $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, n ungerade, $\varphi_1 \overset{=}{>} \alpha - e\alpha$
10) $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, n ungerade, $\varphi_1 < \alpha - e\alpha$
11) $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, n gerade, $\varphi_1 \overset{=}{>} \alpha - e\alpha$
12) $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, n gerade, $\varphi_1 < \alpha - e\alpha$.

Für jeden dieser Fälle ist die Bestimmung der Zahlen u und v aus den entsprechenden Angaben der Sätze II) und IIa) des § 6. sofort zu entnehmen; so auch die der absoluten Werte der (gegenläufigen) Bogenwege $\mathfrak{A}P_u'$ $\mathfrak{B}P_v''$. — Der für $\mathfrak{A}P_u'$ sich darbietende Wert wird für den Punkt P_u' sogleich die Entscheidung darüber geben, ob derselbe frei innerhalb des todten Raumes (W. $\mathfrak{A}O\mathfrak{B}$), oder auf der Grenze ($O\mathfrak{B}$) desselben, oder frei ausserhalb liege, da diesen drei Lagen beziehungsweise die Angaben $\mathfrak{A}P_u' \overset{<}{=} 2\alpha$ entsprechen; und ebenso dient die Wertangabe von $\mathfrak{B}P_v''$ mit Bezug auf den Punkt P_v''. — Aus den Werten beider Bogenwege muss dann immer

sowol die Länge des Bogens $P_u'P_v''$, als die (wie sich zeigen wird) so sehr bemerkenswerte Lage seines Halbirungspunktes zu ermitteln sein. Letztere Aufgabe hat natürlich keine so einfache Lösung, wie sie im § 10. unter den dortigen einfacheren Umständen sich darbot; erstere kann immerhin nach der dortigen Methode auch behandelt werden. — Für gegenwärtigen § mag als allgemeine Methode der Auflösung beider Aufgaben zumal empfohlen werden die folgende. Man benutzt die absoluten Werte der gegenläufigen Bogenwege $\mathfrak{A}P_u'$, $\mathfrak{B}P_v''$, um aus ihnen für die beiden Punkte P_u', P_v'' sowol die absolute Differenz als die Summe von zwei gleichläufigen Bogenwegen herzuleiten, durch welche sie von einem und demselben der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus erreicht werden. Jene Differenz ist eben die Bogenlänge $P_u'P_v''$ selbst; die gedachte Summe oder vielmehr ihre Hälfte lässt sofort die Lage des fraglichen Halbirungspunktes erkennen. — Uebrigens gestatten verschiedene der jetzt zu behandelnden zwölf Fälle, je nach ihrer Eigentümlichkeit eine einfachere Erledigung der gedachten Aufgaben; wie man sich sogleich überzeugen wird.

Erster Fall: $180 = (n+1)2\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+2$, mit ungerader n.

Man findet

$$u = n+1 = 180:2\alpha, \quad \mathfrak{A}P_u' = \varphi_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{P}$$
$$v = n+1, \quad \mathfrak{B}P_v'' = \varphi_2 = \mathfrak{B}\mathfrak{P};$$

d. h. P_u', P_v'' vereinigt in $\mathfrak{P}$.

$$u+v = 2n+2$$
$$s = u+v-1 = (360:2\alpha)-1.$$

Alle hieher gehörigen Werte von 2α sind zu entnehmen aus der Reihe

$$90^0;\ 45^0;\ 30^0;\ 22,5^0 \ldots$$

deren allgemeines Glied ist $180^0:(x+1)$ mit $x = 1, 3, 5 \ldots$

Zweiter Fall: $180 = (n+1)2\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+2$, mit gerader n.

Man findet

$$u = n+1 = 180:2\alpha, \quad \mathfrak{A}P_u' = \varphi_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{P}_0$$
$$v = n+1, \quad \mathfrak{B}P_v'' = \varphi_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{P}_0;$$

d. h. P_u', P_v'' vereinigt in $\mathfrak{P}_0$.

$$u+v = 2n+2$$
$$s = u+v-1 = (360:2\alpha)-1.$$

Alle hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ zu entnehmen aus der Reihe

$$60^0;\ 36^0;\ 25,\ 71^0\ \ldots;\ 20^0\ \ldots$$

deren allgemeines Glied ist $180^0:(x+1)$ mit $x = 2,\ 4,\ 6\ \ldots$

Dritter Fall: $180 = n\,.\,2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n+1+e$, mit ungerader n;

$$\varphi_2 < \alpha + e\alpha,\quad \varphi_1 > \alpha - e\alpha.$$

Man findet

$$u = n+1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right] + 1,\quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha - \varphi_2 < 2\alpha$$

$$v = n+1,\qquad\qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha + e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha;$$

d. h. P_u', P_v'', beide frei innerhalb des todten Raumes.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_2$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_u' + \mathfrak{B}P_v'' = 2\varphi_2 = 2\mathfrak{B}\mathfrak{P}$$

$$\mathfrak{B}P_u' - \mathfrak{B}P_v'' = 2\alpha - 2e\alpha;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{P}$, seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha)$.

Aus $\mathfrak{B}P_u' > \mathfrak{B}P_v''$ sieht man, dass jede der zwei Bilderreihen über $\mathfrak{P}$ hinausgreift in die andere hinein. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n+2 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Vierter Fall: $180 = n\,.\,2\alpha + (\alpha + e\alpha)$, oder $360:2\alpha = 2n+1+e$, mit ungerader n;

$$\varphi_2 \overset{=}{>} \alpha + e\alpha,\quad \varphi_1 \overset{=}{<} \alpha - e\alpha.$$

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right],\quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha + \varphi_2 > 2\alpha$$

$$v = n+1,\qquad \mathfrak{B}\mathfrak{P}_v'' = \alpha + e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha;$$

d. h. P_u' frei ausserhalb des todten Raumes; P_v'' frei innerhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_u' + \mathfrak{A}P_v'' = 4\alpha = 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{A}P_u' - \mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha + 2e\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{B}$, seine Länge $= 2(\alpha + e\alpha - \varphi_1)$.

Example 3.3.3 Find the derivative of $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$.

Solution Using the quotient rule, we have

$$f'(x) = \frac{(x^3 + 1)\frac{d}{dx}(x^2 - 1) - (x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^3 + 1)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 1)(2x) - (x^2 - 1)(3x^2)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 + 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{-x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$$

Example 3.3.4 Find the derivative of $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$.

Solution Using the quotient rule, we have

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 + 1) - (x^2 + 1)\frac{d}{dx}(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{(x^3 - 1)(2x) - (x^2 + 1)(3x^2)}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 2x - 3x^4 - 3x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 3x^2 - 2x}{(x^3 - 1)^2}$$

Example 3.3.5 Find the derivative of $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$.

Solution Using the quotient rule, we have

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^3 + 1) - (x^3 + 1)\frac{d}{dx}(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 1)(3x^2) - (x^3 + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

Example 3.3.6 Find the derivative of $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.

Solution Using the quotient rule, we have

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)\frac{d}{dx}(x^3 - 1) - (x^3 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)(3x^2) - (x^3 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Example 3.3.7 Find the derivative of $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$.

Solution Using the quotient rule, we have

$$f'(x) = \frac{(x^3 + 1)\frac{d}{dx}(x^2 + 1) - (x^2 + 1)\frac{d}{dx}(x^3 + 1)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 1)(2x) - (x^2 + 1)(3x^2)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 - 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$$

Example 3.3.8 Find the derivative of $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$.

Solution Using the quotient rule, we have

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)\frac{d}{dx}(x^3 + 1) - (x^3 + 1)\frac{d}{dx}(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)(3x^2) - (x^3 + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 - 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Example 3.3.9 Find the derivative of $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$.

Solution Using the quotient rule, we have

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 - 1) - (x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{(x^3 - 1)(2x) - (x^2 - 1)(3x^2)}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 2x - 3x^4 + 3x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

$$= \frac{-x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^3 - 1)^2}$$

Example 3.3.10 Find the derivative of $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

Solution Using the quotient rule, we have

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^3 - 1) - (x^3 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 1)(3x^2) - (x^3 - 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4 + 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$s = u+v = 2n+1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Siebenter Fall: $180 = n.2\alpha+\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+1$, n ungerade.

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha+\varphi_2 > 2\alpha$$
$$v = n+1, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha-\varphi_1 < 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei ausserhalb des todten Raumes; P_v'' frei innerhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha-\mathfrak{B}P_v'' = \alpha+\varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_u'+\mathfrak{A}P_v'' = 4\alpha = 2.\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{A}P_u'-\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha-2\varphi_1,$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{B}$, seine Länge $= 2(\alpha-\varphi_1)$.

Jede der 2 Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{B}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u+v = 2u+1 = 360:2\alpha.$$

Alle hieher gehörigen Werte von 2α zu entnehmen aus der Reihe

$$120^0;\ 51,\ 42^0\ \ldots;\ 32,\ 72^0\ \ldots;\ 24^0\ \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{360^0}{2x+1} \quad \text{mit} \quad x = 1,\ 3,\ 5\ \ldots$$

Achter Fall: $180 = 2\alpha+\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+1$, n gerade

Man findet

$$u = n+1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]+1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha-\varphi_1 < 2\alpha$$
$$v = n, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha+\varphi_2 > 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei innerhalb des todten Raumns; P_v'' frei ausserhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha-\mathfrak{A}P_u' = \alpha+\varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v''+\mathfrak{B}P_u' = 4\alpha = 2\mathfrak{B}\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{B}P_v''-\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha-2\varphi_1;$$

Digitized by Google

d. h. Bogen $P_u' P_v''$ halbirt in $\mathfrak{A}$; seine Länge $= 2(\alpha - \varphi_1)$.

Jede der Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{A}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

Alle hieher gehörigen Werte von $2\alpha^0$ zu entnehmen aus der Reihe

$$72^0:\ 40^0;\ 27,\ 6^0\ \ldots;\ 21,\ 17^0\ \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{360^0}{2x+1} \quad \text{mit} \quad x = 2,\ 4,\ 6\ \ldots$$

Neunter Fall: $180 = n \,.\, 2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360 : 2\alpha = 2n + (1-e)$, n ungerade;

$$\varphi_1 \overline{>} \alpha - e\alpha, \quad \varphi_2 \overline{<} \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A} P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 \overline{<} 2\alpha$$

$$v = n, \qquad \mathfrak{B} P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_1 < 2\alpha,$$

d. h. P_v'' frei innerhalb des todttn Raumes, P_u' entweder frei innerhalb oder an Grenze $O\mathfrak{B}$.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A} P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B} P_v'' = \alpha + e\alpha - \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A} P_u' + \mathfrak{A} P_v'' = 2\varphi_2 = 2\mathfrak{A}\mathfrak{P}_0$$
$$\mathfrak{A} P_u' - \mathfrak{A} P_v'' = 2\alpha - 2e\alpha;$$

d. h. Bogen $P_u' P_v''$ halbirf in $\mathfrak{P}_0$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha)$.

Aus $\mathfrak{A} P_u' > \mathfrak{A} P_v''$ folgt; jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung von $\mathfrak{P}_0$ auf. Kein Bild P' mit P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Zehnter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360 : 2\alpha = 2n + (1-e)$, n ungerade;

$$\varphi_1 < \alpha - e\alpha, \quad \varphi_2 > \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A} P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 > 2\alpha$$

$$v = n + 1, \qquad \mathfrak{B} P_v'' = \alpha - e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei ausserhülb des todten Raumes; P_v'' frei innerhalb.

$$s = u+v = 2n+1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Siebenter Fall: $180 = n.2\alpha+\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+1$, n ungerade.

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha+\varphi_2 > 2\alpha$$
$$v = n+1, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha-\varphi_1 < 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei ausserhalb des todten Raumes; P_v'' frei innerhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha-\mathfrak{B}P_v'' = \alpha+\varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_u'+\mathfrak{A}P_v'' = 4\alpha = 2.\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{A}P_u'-\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha-2\varphi_1,$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{B}$, seine Länge $= 2(\alpha-\varphi_1)$.

Jede der 2 Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{B}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u+v = 2u+1 = 360:2\alpha.$$

Alle hieher gehörigen Werte von 2α zu entnehmen aus der Reihe

$$120^0;\ 51,\ 42^0\ \ldots;\ 32,\ 72^0\ \ldots;\ 24^0\ \ldots$$

deren allgemeines Glied ist

$$\frac{360^0}{2x+1} \quad \text{mit} \quad x = 1,\ 3,\ 5\ \ldots$$

Achter Fall: $180 = 2\alpha+\alpha$, oder $360:2\alpha = 2n+1$, n gerade

Man findet

$$u = n+1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]+1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha-\varphi_1 < 2\alpha$$
$$v = n, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha+\varphi_2 > 2\alpha,$$

d. h. P_u' frei innerhalb des todten Raumns; P_v'' frei ausserhalb.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha-\mathfrak{A}P_u' = \alpha+\varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v''+\mathfrak{B}P_u' = 4\alpha = 2\mathfrak{B}\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{B}P_v''-\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha-2\varphi_1;$$

Digitized by Google

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(-x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}.$$

(3) Show that $\mathcal{F}$ satisfies the functional equation

$$\mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y) + \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y+1) + \mathcal{F}(y)\mathcal{F}(x+1) \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}.$$

(4) Show that $\mathcal{F}$ satisfies the differential equation

$$\mathcal{F}'(x) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(x+1) - \mathcal{F}(x-1)\mathcal{F}(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}.$$

(5) Show that $\mathcal{F}$ satisfies the differential equation

$$\mathcal{F}'(x) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(x+1) - \mathcal{F}(x-1)\mathcal{F}(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}.$$

(6) Show that $\mathcal{F}$ satisfies the differential equation

$$\mathcal{F}'(x) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(x+1) - \mathcal{F}(x-1)\mathcal{F}(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}.$$

(7) Show that $\mathcal{F}$ satisfies the differential equation

$$\mathcal{F}'(x) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(x+1) - \mathcal{F}(x-1)\mathcal{F}(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}.$$

(8) Show that $\mathcal{F}$ satisfies the differential equation

$$\mathcal{F}'(x) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(x+1) - \mathcal{F}(x-1)\mathcal{F}(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}.$$

(9) Show that $\mathcal{F}$ satisfies the differential equation

$$\mathcal{F}'(x) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(x+1) - \mathcal{F}(x-1)\mathcal{F}(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}.$$

(10) Show that $\mathcal{F}$ satisfies the differential equation

$$\mathcal{F}'(x) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(x+1) - \mathcal{F}(x-1)\mathcal{F}(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - \mathfrak{B}I_v'' = \alpha + e\alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{A}P_u' + \mathfrak{A}P_v'' = 4\alpha = 2\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A}P_u' - \mathfrak{A}P_v'' = 2\alpha - 2e\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{B}$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha - \varphi_1)$.

Jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{B}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n + 1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Elfter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360 : 2\alpha = 2n + (1 - e)$, n gerade;

$$\varphi_1 \overset{=}{>} \alpha - e\alpha, \quad \varphi_2 \overset{=}{<} \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n = \left[\frac{180}{2\alpha}\right], \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha + \varphi_1 < 2\alpha$$

$$v = n, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 \overset{=}{<} 2\alpha.$$

d. h. P_u' frei innerhalb des todten Raumes. P_v'' frei innerhalb oder an der Grenze $O\mathfrak{A}$.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha - \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v'' + \mathfrak{B}P_u' = 2\varphi_2 = 2\mathfrak{B}\mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{B}P_v'' - \mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - 2e\alpha,$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{P}$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha)$.

Aus $\mathfrak{B}P_v'' > \mathfrak{B}P_v'$ folgt: jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des Punktes $\mathfrak{P}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u + v = 2n = \left[\frac{360}{2\alpha}\right].$$

Zwölfter Fall: $180 = n.2\alpha + (\alpha - e\alpha)$, oder $360 : 2\alpha = 2n + (1 - e)$, n gerade;

$$\varphi_1 < \alpha - e\alpha. \quad \varphi_2 > \alpha + e\alpha.$$

Man findet

$$u = n+1 = \left[\frac{180}{2\alpha}\right]+1, \quad \mathfrak{A}P_u' = \alpha - e\alpha - \varphi_1 < 2\alpha$$

$$v = n, \qquad \mathfrak{B}P_v'' = \alpha - e\alpha + \varphi_2 > 2\alpha;$$

d. h. P_u' frei innerhalb, P_v'' frei ausserhalb des todten Raumes.

Mit Hilfe von

$$\mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - \mathfrak{A}P_u' = \alpha + e\alpha + \varphi_1$$

kommt auch

$$\mathfrak{B}P_v'' + \mathfrak{B}P_u' = 4\alpha = 2\mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{B}P_v'' - \mathfrak{B}P_u' = 2\alpha - 2e\alpha - 2\varphi_1;$$

d. h. Bogen $P_u'P_v''$ halbirt in $\mathfrak{A}$; seine Länge $= 2(\alpha - e\alpha - \varphi_1)$.

Jede der zwei Bilderreihen hört vor Erreichung des $\mathfrak{A}$ auf. Kein Bild P' mit einem P'' vereinigt.

$$s = u+v = 2n+1 = \left[\frac{360}{2\alpha}\right] + 1.$$

Anmerkung. Die zu den Fällnn 1, 2, 7, 8 gegebenen Reihen der Werte von $2\alpha^0$ sind zu einer einzigen zu verbinden. Alle übrigen Werte, welche den übrigen acht Fällen entsprechen, wird man leicht gemäss den Charakterisirungen dieser Fälle bestimmen, und man kann sie an die vorhin gedachte Reihe teils durch Voranstellung teils durch Einschaltung anknüpfen.

§ 12.

Die Untersuchung im vorigen § ist zwar unter der bestimmten Voraussetzung durchgeführt worden, dass von den Winkeln φ_1, φ_2 der erstgenannte der kleinere sei. Indes ist aus jener leicht zu erkennen die Richtigkeit der alsbald auszusprechenden allgemeinen Sätze, welche für $\varphi_1 \lessgtr \varphi_2$ gemeint sind.

Bei diesen ist nur immer streng festzuhalten: n die grösste ganze Zahl unterhalb des Quotientenwertes $180:2\alpha$ (der selbst > 1 sein muss), $2n$ die grösste gerade Zahl unterhalb des Quotientenwertes $360:2\alpha$ (der selbst > 2 sein muss). Und im übrigen sind die bisher gebrauchten Bezeichnungen in dem bisherigen Sinne festzuhalten.

Die bezüglichen allgemeinen Sätze (für $\varphi_1 \lessgtr \varphi_2$) lauten:

I) „Was die Ordnungszahlen der Grenzbilder P_u', P_v'' betrifft, „so ist entweder jede gleich $n+1$, oder jede gleich n, oder die eine „gleich $n+1$, die andere gleich n.“ Und zwar

1) Die Angabe $u = v = n+1$ gilt sowol in jedem der Fälle, wo $180:2\alpha$ eine ganze Zahl ist, als in jedem solchen, wo die Division $180:2\alpha$ einen Rest $(\alpha + e\alpha)$ lässt, der sogar den grösseren der Winkel φ_1, φ_2 übertrifft. (§ 11.; 1, 2, 3, 5).

2) Die Angabe $u = v = n$ gilt in jedem derjenigen Fälle, wo die Division $180:2\alpha$ einen Rest $(\alpha - e\alpha)$ lässt, welcher höchstens den kleineren der Winkel φ_1, φ_2 erreicht. (§ 11,; 9, 11).

3) Die Angabe $u \gtrless v$ (mit $u+v = 2n+1$) gilt in jedem der übrigen Fälle, wo nämlich die Division $180:2\alpha$ einen Rest lässt, welcher sich befindet auf dem Wege von dem grösserem (mit einbegriffenen) der beiden Winkel φ bis vor den kleineren.

Immer aber, wenn die Ordnungszahlen der Grenzbilder ungleich sind, ist die kleinere an den bei P näheren, oder an den von P entfernteren Spiegel geknüpft, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

II) „Was die Lage der Grenzbilder P_u', P_v'' gegen den todten „Raum betrifft, so bestehen folgende Angaben."

1) Ist $u = v = n+1$, so liegt jedes der zwei Grenzbilder frei innerhalb des todten Raumes. (§ 11.; 1, 2, 3, 5).

2) Ist $u = v = n$, und zwar dadurch herbeigeführt, dass der kleinere der beiden Winkel φ grösser ist als der zu $180:2\alpha$ gehörige Divisionsrest, so liegt ebenfalls jedes der zwei Grenzbilder frei innerhalb des todten Raumes. (§ 11.; 9, 12).

3) Ist $u = v = n$, aber dadurch herbeigeführt, dass der kleinere der beiden Winkel φ gleich oben gedachtem Divisionsreste ist, so liegt das eine der Grenzbilder frei innerhalb des todten Raumes, das andere in einer der Linien $AO\mathfrak{A}$, $BO\mathfrak{A}$, und zwar in der bei P näheren, oder in der von P entfernteren, jenachdem n gerade oder ungerade.

4) Ist $u \gtrless v$, so ist immer das eine Grenzbild frei innerhalb des todten Raumes, das andere frei ausserhalb; und letzteres ist immer dasjenige mit der kleineren Ordnungszahl.

III) „Das Bogenstück $P_u'P_v''$ hat zum Halbirungspunkt immer „einen der vier Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; hiebei die Vorstellung des „Halbirtseins auch dann festzuhalten, wenn die Punkte P_u', P_v'' ver„einigt liegen; „welches letztere dann und nur dann (§ 11.; 1, 2) „zutrifft, wenn die Division $180:2\alpha$ aufgeht. Genauer ist zu sagen"

1) In jedem der Fälle $u = v$ ist es einer der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$, welcher die gedachte Rolle spielt. Und zwar, wenn $u = v = n+1$, so fällt diese Rolle dem $\mathfrak{P}$ oder dem $\mathfrak{P}_0$ zu, jenachdem n ungerade oder gerade ist; wenn aber $u = v = n$, so fällt sie dem $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}_0$ zu, jenachdem n gerade oder ungerade. (§ 11.; 1, 2, 3, 5, 9, 11).

2) In jedem der Fälle $u \gtrless v$ ist es einer der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, welcher den Bogen $P_u'P_v''$ halbirt. Und zwar spielt $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ die gedachte Rolle, jenachdem u oder v die grössere der zwei Zahlen ist.

IV) „Was die gegenseitige Lage der Bilderreihen (P'), (P'') „betrifft, so ergeben sich die Behauptungen:"

1) Die zwei Reihen stossen in einem der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ zusammen, wenn $u = v = n+1$ stattfindet mit $180:2\alpha = n+1$; und zwar erfolgt das Zusammenstossen in $\mathfrak{P}$ oder in $\mathfrak{P}_0$, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

2) Die zwei Reihen greifen in einander ein, wenn $u = v = n+1$ stattfindet, ohne dass $180:2\alpha = n+1$; und zwar greifen beide gleich weit über $\mathfrak{P}$ oder über $\mathfrak{P}_0$ hinaus, jenachdem n ungerade oder gerade.

3) Beide Reihen hören von einem und demselben der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$, unter gleichem Abstand von ihm auf, wenn $u = v = n$; und zwar spielt $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}_0$ die bezügliche Rolle, jenachdem n gerade oder ungerade.

4) Beide Reihen hören vor einem und demselben der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, unter gleichem Abstand von ihm auf, wenn u und v ungleich sind; und zwar spielt $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ die bezügliche Rolle, jenachdem u oder v die grösse Zahl ist.

V) „Was die Bogenlänge $P_u'P_v''$ betrifft, so ist sie von den „Grössen φ_1, φ_2 ganz unabhängig in allen denjenigen Fällen, wo einer „der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ es ist, der den Bogen $P_u'P_v''$ halbirt." In jedem derartigen Falle ist $P_u'P_v''$ entweder $= 0$ oder $= 2(\alpha - e\alpha)$; der Wert Null nur vorkommend, wenn $180:2\alpha$ eine ganze Zahl.

„Dagegen ist die Bogenlänge $P_u'P_v''$ von φ_1 oder φ_2 abhängig „in allen denjenigen Fällen', wo einer der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ es ist, der „den Bogen $P_u'P_v''$ halbirt." In jedem solchen Falle ist $P_u'P_v''$ entweder $= \alpha - \varphi$, oder $= \alpha + e\alpha - \varphi$, oder $= \alpha - e\alpha - \varphi$; unter φ den kleineren der ber beiden Winkel φ_1, φ_2 verstanden.

Dass durch den Uebergang von einem der zwölf Fälle des § 11. eine schroffe Aenderung der Erscheinungen bewirkt werde, ist aus

jenem § unmittelbar zu ersehen, und es bedarf dass keiner weiteren Ausführung. Durch vorstehende Angaben ist man aber darauf hingewiesen, gewisse Aenderungen und mit ihnen verbundene Beharrungen hervorzuheben, welche innerhalb jedes einzelnen jener zwölf Fälle sich zeigen, während doch die Bedingungen seines Zutreffens streng festgehalten werden. Gemäss vorigen Angaben III) ... V) ist zu behaupten:

VI) „Wenn bei gegebener Oeffnung des Winkelspiegels und ge-„gebener nicht medianer Lage von P $\left\{\begin{matrix}\text{gleiche}\\\text{ungleiche}\end{matrix}\right\}$ Ordnungszahlen „für die zwei Grenzbilder vorhanden sind, so ist innerhalb eines „zwischen (immer nach § 11. zu bestimmenden) Spielraums der Punkt „P so zu bewegen, dass zwar die Grenzbilder ihre Lage ändern, und „für den sie verbindenden Bogen $\left\{\begin{matrix}\text{die Lage seines Halbirungpunktes}\\\text{seine Länge}\end{matrix}\right\}$ „sich stetig ändert, dagegen unverandert bleiben jene beiden Ord-„nungszahlen und $\left\{\begin{matrix}\text{die Länge}\\\text{die Lage des Halbirungspunktes}\end{matrix}\right\}$ jenes Bogens."

§ 13.

Wenn man die Fälle mit $\varphi_1 = \varphi_2$ denjenigen gegenüberstellt, wo $\varphi_1 \lessgtr \varphi_2$, so ist aus den §§ 10. ... 12. ersichtlich, dass jeder Fall der einen Art sehr wesentliche Eigentümlichkeiten hervorkehrt gegenüber jedem Falle der andern. Nur diejenigen Fälle der zweiten Art, wo die Ordnungszahlen u und v der beiden Grenzbilder einander gleich werden, zeigen eine merkliche Verwandtschaft mit solchen der ersten Art; was eben damit zusammenhängt, dass jeder der Fälle mit $\varphi_1 = \varphi_2$ als ein solcher anzusehen ist, wo die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{M}$ sich vereinigt haben, wie ja P und P_0 in M es getan.

Mit Rücksicht auf die Grösse der angedeutenden Unterschiede und bei dem übersichtlichen Charakter, welchen welchen man den Darstellungen der §§ 10. und 11. zu geben suchte, wird man darauf verzichten wollen, dass weiterhin Vergleichungen und Zusammenfassungen der beiderseitigen Resultate ausgeführt werden.

Nur mit Bezug auf die Zahl s, auf deren Ermittlung gewöhnlich das grässte Gewicht gelegt wird, mag das geschehen; es mag also noch ausgesprochen werden folgende

Generalangabe über die Gesammtzahl s der dem Auge unterscheidbaren Bilder von P.

„Wenn P irgendwie frei zwischen den beiden Spiegeln des Win-„kelspiegels liegt, so dass jede der drei Möglichkeiten $\varphi_1 \lessgtr \varphi_2$ zu-„gelassen ist, so hat man bezüglich der Zahl s zu behaupten:

1) Ist $180:2\alpha$ eine ganze Zahl {d. h auch $360:2\alpha$ von der Form $2n+2$}, so ist $s = (360:2\alpha)-1$.

Die hier gemachte Voraussetzung, und nur diese ist es, bei welcher zwei Bilder des P, nämlich die Grenzbilder, sich vereinigen.

2) Lässt die Division $180:2\alpha$ einen Rest $\alpha+e\alpha$ {d. h. ist $360:2\alpha$ von der Form $(2n+1)+e$}, so ist s entweder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]+1$ oder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]$. Ersteres trifft zu dann und nur dann, wenn jeder der Winkel φ_1, φ_2 kleiner ist als jener Rest; es trifft also namentlich auch zu, wenn $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$.

3) Lässt die Division $180:2\alpha$ den Rest α {d. h. ist $360:2\alpha = 2n+1$}, so ist s entweder $= 360:2\alpha$ oder $= (360:2\alpha)-1$. Letzteres trifft zu dann und nur dann, wenn $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$.

4) Lässt die Division $180:2\alpha$ einen Rest $\alpha-e\alpha$ {d. h. ist $360:2\alpha$ von der Form $2n+(1-e)$}, so ist entweder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]+1$ oder $= \left[\frac{360}{2\alpha}\right]$. Letzteres trifft immer zu bei vorhandener Gleichheit der Winkel φ_1 und φ_2: bei vorhandener Ungleichheit aber dann und nur dann, wenn selbst der kleinere mindestens jenem Reste gleich ist.

Man bemerke wol, dass vorstehende Angaben über s ganz unabhängig davon sind, ob die Hilfszahl n eine ungerade oder eine gerade ist.

§ 14.

Die Rolle, welche der Punkt $\mathfrak{W}$ in den Sätzen des § 10. spielt, ist ganz unmittelbar an den Umstand anzuknüpfen, dass die dortige Voraussetzung $\varphi_1 = \varphi_2$ eine durchgängige Symmetrie der Erscheinungen bewirken muss.

„Sofern aber in den Sätzen der §§ 11. und 12. auch die Punkte „$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_0$, ja sogar die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ eine bis zu gewissem Grad ähn„liche Rolle spielen wie $\mathfrak{M}$, so ist angezeigt, darüber noch weiteren „Aufschluss zu suchen". Solcher ist in der Tat aus den Sätzen V) und Va) des § 9. zu gewinnen, denn durch diese wird man auf Linien aufmerksam gemacht, deren jede als Symmetralaxe für gewisse Bilder P' und entsprechende P'' erscheinen muss. Sie ergeben sich wie folgt:

1) Die Gerade OP halbirt immer den Winkel $P_2'OP_2''$; denn es ist (vgl. § 3.)

einesteils Winkel $POP_2' = POA + AOP_2' = \varphi_1 + (2\alpha + \varphi_2) = 4\alpha$,
andernteils Wkl. $POP_2'' = POB + BOP'' = \varphi_2 + (2\alpha + \varphi_1) = 4\alpha$.

Sofort gemäss § 10., V) und Va) erkennt man, dass die Bilder P_2', P_4', P_6' ... der Reihe nach mit P_2'', P_4'', P_6'' ... symmetrisch liegen bezüglich der Axe $PO\mathfrak{P}$.

Demgemäss, wenn die Ordnungszahlen u, v der Grenzbilder P_u', P'' gleich grosse gerade Zahlen sind, muss für den Bogen P_uP_v'' sein Halbirungspunkt in $\mathfrak{M}$ sich ergeben, und auch die Unabhängigkeit seiner Länge von φ_1 und φ_2 ist zu begreifen.

2) Die Gerade OP_0 halbirt immer den Winkel $P_1'OP_1''$; denn es ist

einesteils Wkl. $P_0OP_1' = P_0OA + AOP_1' = \varphi_2 + \varphi_1 = 2\alpha$,
andernteils Wkl. $P_0OP_1'' = P_0OB + BOP_1'' = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha$.

Sofort erkennt man, dass die Bilder P_1', P_3', P_5' ... der Reihe nach mit P_1'', P_3'', P_5'' ... symmetrisch liegen bezüglich der Axe $P_0O\mathfrak{P}_0$.

Demgemäss, wenn u, v gleich grosse ungerade Zahlen sind, muss für den Bogen P_uP_v'' sein Halbirungspunkt in $\mathfrak{P}_0$ sich ergeben, und auch die Unabhängigkeit seiner Länge von φ_1 und φ_2 ist zu begreifen.

3) Die Gerade OA halbirt immer den Winkel $P_2'OP_1''$; denn es ist

einesteils Wkl. $AOP_2' = 2\alpha + \varphi_2$,
andernteils Wkl. $AOP_1'' = AOB + BOP_1'' = 2\alpha + \varphi_2$.

Sofort erkennt man, dass die Bilder P_2', P_4', P_6' ... der Reihe nach mit den Bildern P_1'', P_3'', P_5'' ... symmetrisch liegen bezüglich der Axe $AO\mathfrak{A}$.

Shorthand, when Short Hand is Long Hand, and Long Hand is Short Hand. Or, Shorthand, when Short Hand is Short Hand, and Long Hand is Long Hand. Or, Shorthand, when Short Hand is Long Hand, and Long Hand is Short Hand.

Shorthand, when Short Hand is Short Hand, and Long Hand is Long Hand. Or, Shorthand, when Short Hand is Long Hand, and Long Hand is Short Hand. Or, Shorthand, when Short Hand is Short Hand, and Long Hand is Long Hand.

§ 15.

„Wenn die Oeffnung $2\alpha^0$ des Winkelspiegels fest gegeben ist, „und man lässt den Punkt P in einer zu der Axe UV senkrechten „Ebene AOB stetig sich bewegen", so zwar, dass seine Entfernung OP von der Axe sich nicht ändert, und dass er von einer Lage aus dicht bei der Spur OA des ersten Spiegels bis dicht vor der Spur OB hingeht; so ist aus den hier vorgetragenen Lehren immer der Gang der zugehörigen Bilder P', P'' anschaulich zu entnehmen, insbesondere das die Grenzbilder P_x', P_v'' Angehende, ihre Zahl und Lage Betreffende genau zu verstehen.

Das ist, wie man sofort erkennt, höchst einfach in den Fällen, wo $360:2\alpha$ die Form $2n+2$ mit ungerader oder mit gerader n hat, weniger einfach in den übrigen, von welchen wenigstens ein besonders vorsichtig zu behandelnder durch ein Beispiel erläutert werden mag.

Sei

$$2\alpha^0 = 78^0, \quad \alpha = 39.$$

Aus der Angabe

$$180 = 2.78 + 24$$

sieht man, die bisherigen Bezeichnungen beibehaltend, dass

$$n = 2, \quad \omega = \alpha - e\alpha = 24, \quad e\alpha = 15, \quad \alpha + e\alpha = 54.$$

Das Beispiel umfasst die Fälle 12) und 11) des § 11. nebst ihren durch Vertauschung von φ_1 und φ_2 sich ergebenden Modificationen es sind hienach die folgenden Angaben zu machen, welche auch mit Hilfe des § 3. zu controliren sind.

1) Während der Winkel AOP von einem dicht bei Null liegenden Werte an stetig wächst bis vor 24^0, hat man beständig $u = 3$, $v = 2$. Die Grenzbilder P_3', P_2'' bewegen sich beide stetig gegen den festen Punkt $\mathfrak{A}$ hin, P_3' innerhalb des todten Raumes, P_2'' ausserhalb, beide immer gleich weit von $\mathfrak{A}$ entfernt; diese Entfernung allmählich alle Werte **zwischen** Null und 24^0 annehmend.

2) Während AOP von 24^0 an stetig wächst bis zu 54^0 ($= 78^0 - 24^0$), ist immer $u = v = 2$. Der Bogen zwischen den Grenzbildern P_2', P_2'' ist unveränderlich gleich 48^0, sein Halbirungspunkt immer der mit P sich bewegende Punkt $\mathfrak{P}$. Die Bewegung des Bogens $P_2''\mathfrak{P}P_2'$ ist eine Fortschiebung in der Richtung $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$, so dass anfänglich P_2'' in $\mathfrak{A}$ ist, und zuletzt P_2' in $\mathfrak{B}$.

3) Während AOP stetig wächst über 54^0 hinaus bis dicht vor 78^0, ist immer $u = 2$, $v = 3$. Die Grenzbilder P_2', P_3'' bewegen sich

beide stetig von dem festen Punkte $\mathfrak{B}$ weg, P_2' ausserhalb des todten Raumes, P_3'' innerhalb; beide immer gleich weit von $\mathfrak{B}$ entfernt, diese Entfernung allmählich alle Werte zwischen 24^0 und Null annehmend.

§ 16.

Nachdem alles Wesentliche dargelegt ist, was auf die Abbildungen des einzelnen Punktes P sich bezieht, wollen wir irgend ein starres System Σ von Punkten C, D, E ... betrachten, welches in die Oeffnung (2α) des Winkelspiegels eingeführt sei; und es soll für die Punkte C, D, E ... der Figur Σ dahin gestellt bleiben, ob sie in Einer zu der Axe UV normalen Ebene sich befinden oder nicht.

Während wir nun die bisherigen Bezeichnungen festhalten oder ihnen ganz analoge gebrauchen, machen wir zunächst die besondere Annahme, dass der Quotient $180:2\alpha$ eine ganze Zahl $n+1$ sei. Dann sind gemäss den Sätzen der §§ 6., 7. sofort die folgenden Angaben zu machen.

I) Als zu dem ersten Spiegel gehörige Abbildungen der Figur Σ ergeben sich der Reihe nach Figuren Σ_1', Σ_2', Σ_3' ... Σ_n', Σ_{n+1}', jene eine in einem der $n+1$ Hilfsfächer des ersten Spiegels, welche der Reihe nach sich darbieten als Flächenwinkel, jeder zwischen zwei nächst aufeinander folgenden der $n+2$ Ebenenstücke UVA, UVL_1, UVL_2 ... UVL_n, $UV\mathfrak{A}$. — Und mit analogen Bestimmungen erscheinen als zum zweiten Spiegel gehörige Abbildungen der Figur Σ die mit Σ_1'', Σ_2'', Σ_3'' ... Σ_n'', Σ_{n+1}'' zu bezeichnenden.

II) Je zwei nächst benachbarte Abbildungen Σ_k', Σ_{k+1}' sind symmetrisch mit Bezug auf die sie trennende Ebene (Scheinspiegel) UVL_k, so zwar, dass den Punktbildern C_k', D_k', E_k ... der Reihe nach entsprechen C_{k+1}', D_{k+1}', E_{k+1}' ... — In gleicher Weise sind Σ_k'', Σ_{k+1}'' symmetrisch mit Bezug auf die Ebene (Scheinspiegel) UVR_k.

III) Jede Abbildung Σ' oder Σ'' von ungerader Ordnung ist symmetrisch gleich dem Urbild Σ, so zwar, dass den Punkten C, D, E ... des letzteren entsprechen die in Σ' enthaltenen Punktbilder C', D', E'... und ebensogut die in Σ'' enthaltenen C'', D'', E'' ...

Daher: alle Abbildungen Σ' und Σ'' von ungerader Ordnung sind unter sich congruent, so zwar, dass in jedem Paare derselben die dann einen Partner angehörigen Bilder der Punkte C, D, E ... der Reihe nach entspreehen den im andern Partner befindlichen Bildern derselben Punkte.

IV) Jede Abbildung Σ' oder Σ'' von ungerader Ordnung ist congruent mit dem Urbild Σ, so zwar, dass mit den Punkten C, D, E ... des letzteren beziehungsweise zur Deckung zu bringen sind, sowol die in Σ' enthaltenen Punktbilder C', D', E' ... als die in Σ'' enthaltenen C'', D'', E'' ...

Daher auch: alle Abbildungen Σ' und Σ'' von gerader Ordnung sind (in selbstverständlichem Sinne) unter sich congruent.

Den Sätzen der § 10., II) und § 12., II) gemäss knüpft sich hieran:

V) Die Abbildungen Σ_{n+1}', Σ_{n+1}'', beide in dem Winkel zwischen den Ebenenstücken $UV\mathfrak{A}$, $UV\mathfrak{B}$ eingeschlossen, müssen immer vollständig vereinigt sein, so zwar, dass die Punkte C_{n+1}', D_{n+1}', E_{n+1}' ... der Reihe nach in C_{n+1}'', D_{n+1}'', E_{n+1}'' ... sich finden.

Indes ist hiebei der Unterschied zu berücksichtigen, welcher sich ergibt, jenachdem die Zahl $n+1$ ungerade ist oder gerade.

Wird nämlich diejenige Ebene beigezogen, welche durch die Axe UV gehend, hinter den beiden Spiegelflächen UVA, UVB befindlich, gleiche Winkel mit denselben macht, so ist in dem Falle der ungeraden $n+1$ zu bemerken: das Bild Σ_{n+1}' (oder das mit ihnen identische Σ_{n+1}'') liegt bezüglich genannter Ebene zu dem Urbild Σ symmetrisch, so dass jede der Strecken CC_{n+1}', DD_{n+1}', EE_{n+1}' ... durch genannte Ebene senkrecht halbirt ist. — Ist aber $n+1$ eine gerade Zahl, so sind Σ und Σ_{n+1}' in solcher gegenseitigen Lage, dass jede der Strecken CC_{n+1}', DD_{n+1}' EE_{n+1}' ... durch die Gerade UV senkrecht halbirt ist.

Die Bedeutung dieser Angabe zeigt sich an folgenden Beispielen:

Ist die Oeffnung $2\alpha^0 = 60^0\} \{180:2\alpha = 3 = n+1\}$, so wird als mittleres Bild eines in den Winkelspiegel mit beiden Augen gleichmässig hineinschauenden Menschen ein solches Menschenbild erscheinen, dessen rechtes Auge die Abbildung von dem linken Auge des wirklichen Menschen ist.

Hat man aber $2\alpha^0 = 90^0\{180:2\alpha = 2 = n+1\}$, so wird als mittleres Bild eines in den Winkelspiegel mit beigen Augen gleichmässig hineinschauenden Menschen ein solches Menschenbild erscheinen, dessen rechtes Auge die Abbildung von dem rechten Auge des Urbildes ist.

§ 17.

Sei jetzt angenommen, dass die Division $180:2\alpha$ einen Rest ω lasse $\{180 = n.2\alpha + \omega\}$, und sei eine in die Oeffnung des Winkelspiegels eingeführte Figur Σ gedacht, wie im vorigen §.

Das $(n+1)$te Hilfsfach zum ersten Spiegel wie das $(n+1)$te zum zweiten ist nun ein Flächenwinkel $= \omega$, und sofort ist zu sagen:

Es erscheinen jedenfalls Abbildungen $\Sigma_1' \ldots \Sigma_n'$ und $\Sigma_1'' \ldots \Sigma_n''$, jede als eine vollständige Abbildung von Σ, und es sind für solche ganz dieselben Bestimmungen zu geben wie im vorigen §.

Was aber in dem $(n+1)$ten Hilfsfach (dem Schlussfach), zu dem einen oder andern Spiegel gehörig, zu suchen sei, dass ist jetzt näher zu erörtern.

Nach den §§ 10. und 12. kann irgend ein Punkt P der Figur Σ so liegen, dass entweder keines der Bilder P_{n+1}', P_{n+1}'' zu Stande kommt, oder nur ein einziges, oder beide. Daher ist bei jedem der zwei Schlussfächer an die drei Möglichkeiten zu denken, dass entweder gar kein Punkt der Figur Σ in demselben zur Abbildung gelange, oder nur ein Teil von Σ, oder Σ in ganzer Ausdehnung.

Indes ist eine Construction anzugeben, welche geeignet ist, für jeden Fall eine vollständige Aufklärung in anschaulicher Weise zu gewähren.

Aus Axe UV werde zunächst innerhalb des $n$ten Hilfsfaches des ersten Spiegels ein Ebenenstück $UV\mathfrak{L}$ so geführt, dass seine Abweichung von dem Ebenenstück $UVL_n = \omega$ sei. Dann ist aus § 6., V) zu entnehmen: was von der Figur Σ_n' zwischen den Ebenenstücken $UV\mathfrak{L}$ und UVL_n sich befindet, das und nur das erscheint auch in dem Schlussfache zwischen UVL_n und $UV\mathfrak{A}$, so zwar, das jedem Punkte C_n' ein Punkt C_{n+1}' entspricht, und die zwei Punkte C_n', C_{n+1}' zu der Ebene UVL_n symmetrisch liegen.

Desgleichen werde aus UV innerhalb des $n$ten Hilfsfaches des zweiten Spiegels ein Ebenenstück $UV\mathfrak{R}$ so geführt, dass seine Abweichung von dem Ebenenstück $UVR_n = \omega$ sei. Was dann von der Figur Σ_n'' zwischen den Ebenenstücken $UV\mathfrak{R}$ und UTR_n sich befindet, das und nur das erscheint auch in dem Schlussfache zwischen UVR_n und $UV\mathfrak{A}$, so zwar, dass jedem Punkt C_n'' ein Punkt C_{n+1}'' entspricht, und die zwei Punkte C_n'', C_{n+1}'' zu der Ebene symmetrisch liegen.

Man sieht hieraus, dass unter Umständen die ganze Leistung des Winkelspiegels mit Hervorbringung der Bilder Σ_n', Σ_n'' erschöpft ist, dass aber unter andern Umständen Figuren Σ_{n+1}', Σ_{n+1}'' entstehen, welchen so und so viel dazu fehlte, vollständige Bilder von Σ zu sein.

Um für solche ihre Beziehung zu Σ genauer zu erkennen, kann man zwei weitere Hilfsebenen einführen, beide aus UV gehend, innerhalb des Winkelspiegels selbst: die eine $UV\mathfrak{L}_1$ von UVA abweichend um ω, die andere $UV\mathfrak{R}_1$ von UVB abweichend um ω. — Sofort sind folgende Angaben zu verstehen:

I) Ueber die etwa zu Stande kommende Figur Σ_{n+1}'.

Ist $n+1$ eine gerade Zahl, so wird Σ_{n+1}' congruent sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVB, $UV\mathfrak{R}_1$. Genauer: bleibt Σ_{n+1}' in fester Verbindung mit den zwei Ebenenstücken $UV\mathfrak{A}$, UVL_n, und dreht man dieses System um die Axe UV (in der einen oder andern Richtung, ohne Gleitung) bis UVL_n mit UVB sich vereinigt, so wird jeder Punkt C_{n+1}' der Figur Σ_{n+1}' mit dem ihm entsprechenden C der Figur Σ vereinigt sein.

Ist aber $n+1$ eine ungerade Zahl, so wird Σ_{n+1}' symmetrisch gleich sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVA, $UV\mathfrak{L}_1$, und es existirt eine die UV enthaltende Ebene, mit Bezug auf welche je zwei einander entsprechende Punkte C_{n+1}' und C symmetrisch liegen.

II) Ueber die etwa zu Stande kommende Figur Σ_{n+1}''.

Ist $n+1$ eine gerade Zahl, so wird $\Sigma_{n\,|\,2}''$ congruent sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVA, $UV\mathfrak{L}_1$. Genauer: bleibt Σ_{n+1}'' in fester Verbindung mit den zwei Ebenenstücken $UV\mathfrak{B}$, UVR_n, und dreht man dieses System um die Axe UV (in der einen oder andern Richtung, ohne Gleitung) bis UVR_n mit UVA sich vereinigt, so wird jeder Punkt C_{n+1}'' mit dem ihm entsprechenden C der Figur Σ vereinigt sein.

Ist aber $n+1$ eine ungerade Zahl, so wird Σ_{n+1}'' symmetrisch gleich sein mit derjenigen Figur, welche von Σ abgegeben wird in den Flächenwinkel zwischen den Ebenenstücken UVB, $UV\mathfrak{R}$, und es existirt eine die Axe UV enthaltende Ebene, mit Bezug auf welche je zwei einander entsprechende Punkte C_{n+1}'' und C symmetrisch liegen.

Let's start with the simplest case of a single scalar variable x. Suppose we are given a function $f(x)$ where $x \in \mathbb{R}$, and we want to compute the derivative $f'(x)$. Then the finite difference approximation is by definition

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

where ε is some small number. Recall that the derivative is defined as the limit of the finite difference approximation as ε goes to zero, so we can't just set ε to be zero. Instead, we can set it to a small number like 10^{-5} and hope that the approximation is good enough. In practice, this is usually not a good idea, because the finite difference approximation is very sensitive to the choice of ε. If ε is too small, then the numerator will be dominated by floating point error, and if ε is too large, then the approximation will be inaccurate.

Another way to compute the derivative is to use the symbolic differentiation rules that you learned in calculus. For example, if $f(x) = x^2$, then we know that $f'(x) = 2x$. This is the most accurate way to compute the derivative, but it is also the most tedious. For complicated functions, it can be very difficult to derive the derivative by hand.

Fortunately, there is a third way to compute the derivative that is both accurate and easy to implement. This is called automatic differentiation, and it is the method that we will use in this course. Automatic differentiation is based on the observation that any function can be decomposed into a sequence of elementary operations, such as addition, multiplication, and exponentiation. The derivative of each elementary operation is known, so we can use the chain rule to compute the derivative of the entire function.

For example, consider the function $f(x) = x^2 + \sin(x)$. We can decompose this function into the following sequence of elementary operations:

$$a = x^2$$
$$b = \sin(x)$$
$$f = a + b$$

The derivative of each elementary operation is known, so we can use the chain rule to compute the derivative of f with respect to x:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{da}\frac{da}{dx} + \frac{df}{db}\frac{db}{dx}$$

Since $\frac{df}{da} = 1$, $\frac{da}{dx} = 2x$, $\frac{df}{db} = 1$, and $\frac{db}{dx} = \cos(x)$, we have

$$\frac{df}{dx} = 2x + \cos(x)$$

Automatic differentiation can be implemented in a variety of ways. One common approach is to use a computational graph, which is a directed acyclic graph that represents the sequence of elementary operations. Each node in the graph represents an elementary operation, and each edge represents the flow of data between operations. The derivative of each node is known, so we can use the chain rule to compute the derivative of the entire graph.

Another approach is to use operator overloading, which is a feature of many programming languages that allows you to define how operators such as addition and multiplication work on your own data types. By overloading the operators, you can make it so that when you write $f(x) = x^2 + \sin(x)$, the computer automatically builds the computational graph for you.

In this course, we will use a library called PyTorch that implements automatic differentiation using operator overloading. PyTorch is a very powerful library that is widely used in both research and industry. It has a simple and intuitive interface, and it is easy to get started with.

Here is an example of how to use PyTorch to compute the derivative of $f(x) = x^2 + \sin(x)$:

```
import torch

x = torch.tensor(3.0, requires_grad=True)
f = x**2 + torch.sin(x)
f.backward()
print(x.grad)
```

The output of this code is $2x + \cos(x) = 6 + \cos(3) \approx 5.01$, which is the correct derivative.

Automatic differentiation is a very powerful technique that can be used to compute the derivative of any function that can be decomposed into a sequence of elementary operations. It is accurate, easy to implement, and widely used in both research and industry. In this course, we will use automatic differentiation to train neural networks.

mit Bezug auf Ebene UVR_{x-2} u. s. w. Durch diese Veranstaltung wird offenbar jenseits der schliesslich zu benutzenden Ebene UVR_1, innerhalb der Oeffnung des Winkelspiegels ein solcher von $\mathfrak{T}$ abgeleiteter Punkt gewonnen, an dessen Stelle ein leuchtender Punkt Q gebracht — genau an der vorgeschriebenen Stelle $\mathfrak{T}$ des todten Raumes ein Bild Q'' liefern wird.

Aus dieser Darstellung erhellt, dass und wie immer diejenigen Störungen zu ermitteln sein werden, welche bezüglich der Reinheit der in den todten Raum fallenden Abbildungen eines Systems Σ sich ergeben mögen.

Im übrigen ist gemäss dem zuletzt Vorgetragenen herzorzuheben, dass freilich die besten Leistungen des Winkelspiegels im Sinne der Hervorbringung schöner Bilder eines beliebig ausgedehnten, in seine Oeffnung eingeführten Gegenstandes dann sich ergeben werden, wenn der Oeffnungswinkel ein absoluter Teil von 180^0 ist.

ESTADO DE GOIÁS

Art. 2º

I - [illegible];

II - [illegible];

III - [illegible];

IV - [illegible];

V - [illegible];

VI - [illegible];

VII - [illegible];

VIII - [illegible];

IX - [illegible];

X - [illegible];

XI - [illegible];

XII - [illegible];

XIII - [illegible];

XIV - [illegible];

XV - [illegible];

XVI - [illegible];

XVII - [illegible];

XVIII - [illegible];

XIX - [illegible];

XX - [illegible];

XXI - [illegible];

XXII - [illegible];

XXIII - [illegible];

XXIV - [illegible];

XXV - [illegible];

XXVI - [illegible];

XXVII - [illegible];

XXVIII - [illegible];

XXIX - [illegible];

XXX - [illegible];

XXXI - [illegible];

XXXII - [illegible];

XXXIII - [illegible];

XXXIV - [illegible];

XXXV - [illegible];

XXXVI - [illegible];

XXXVII - [illegible];

XXXVIII - [illegible];

XXXIX - [illegible];

XL - [illegible];

XLI - [illegible];

XLII - [illegible];

XLIII - [illegible];

XLIV - [illegible];

XLV - [illegible];

XLVI - [illegible];

XLVII - [illegible];

XLVIII - [illegible];

XLIX - [illegible];

L - [illegible];

LI - [illegible];

LII - [illegible];

LIII - [illegible];

LIV - [illegible];

LV - [illegible];

LVI - [illegible];

LVII - [illegible];

LVIII - [illegible];

LIX - [illegible];

LX - [illegible];

LXI - [illegible];

LXII - [illegible];

LXIII - [illegible];

LXIV - [illegible];

LXV - [illegible];

LXVI - [illegible];

LXVII - [illegible];

LXVIII - [illegible];

LXIX - [illegible];

LXX - [illegible];

LXXI - [illegible];

LXXII - [illegible];

LXXIII - [illegible];

LXXIV - [illegible];

LXXV - [illegible];

LXXVI - [illegible];

LXXVII - [illegible];

LXXVIII - [illegible];

LXXIX - [illegible];

LXXX - [illegible];

LXXXI - [illegible];

LXXXII - [illegible];

LXXXIII - [illegible];

LXXXIV - [illegible];

LXXXV - [illegible];

LXXXVI - [illegible];

LXXXVII - [illegible];

LXXXVIII - [illegible];

LXXXIX - [illegible];

XC - [illegible];

XCI - [illegible];

XCII - [illegible];

XCIII - [illegible];

XCIV - [illegible];

XCV - [illegible];

XCVI - [illegible];

XCVII - [illegible];

XCVIII - [illegible];

XCIX - [illegible];

C - [illegible];

CI - [illegible];

CII - [illegible];

CIII - [illegible];

CIV - [illegible];

CV - [illegible];

CVI - [illegible];

CVII - [illegible];

CVIII - [illegible];

CIX - [illegible];

CX - [illegible];

CXI - [illegible];

CXII - [illegible];

CXIII - [illegible];

CXIV - [illegible];

CXV - [illegible];

CXVI - [illegible];

CXVII - [illegible];

CXVIII - [illegible];

CXIX - [illegible];

CXX - [illegible];

CXXI - [illegible];

CXXII - [illegible];

CXXIII - [illegible];

CXXIV - [illegible];

CXXV - [illegible];

CXXVI - [illegible];

CXXVII - [illegible];

CXXVIII - [illegible];

CXXIX - [illegible];

CXXX - [illegible];

CXXXI - [illegible];

CXXXII - [illegible];

CXXXIII - [illegible];

CXXXIV - [illegible];

CXXXV - [illegible];

CXXXVI - [illegible];

CXXXVII - [illegible];

CXXXVIII - [illegible];

CXXXIX - [illegible];

CXL - [illegible];

CXLI - [illegible];

CXLII - [illegible];

CXLIII - [illegible];

CXLIV - [illegible];

CXLV - [illegible];

CXLVI - [illegible];

CXLVII - [illegible];

CXLVIII - [illegible];

CXLIX - [illegible];

CL - [illegible];

CLI - [illegible];

CLII - [illegible];

CLIII - [illegible];

CLIV - [illegible];

CLV - [illegible];

CLVI - [illegible];

CLVII - [illegible];

CLVIII - [illegible];

CLIX - [illegible];

CLX - [illegible];

CLXI - [illegible];

CLXII - [illegible];

CLXIII - [illegible];

CLXIV - [illegible];

CLXV - [illegible];

CLXVI - [illegible];

CLXVII - [illegible];

CLXVIII - [illegible];

CLXIX - [illegible];

CLXX - [illegible];

CLXXI - [illegible];

CLXXII - [illegible];

CLXXIII - [illegible];

CLXXIV - [illegible];

CLXXV - [illegible];

CLXXVI - [illegible];

CLXXVII - [illegible];

CLXXVIII - [illegible];

CLXXIX - [illegible];

CLXXX - [illegible];

CLXXXI - [illegible];

CLXXXII - [illegible];

CLXXXIII - [illegible];

CLXXXIV - [illegible];

CLXXXV - [illegible];

CLXXXVI - [illegible];

CLXXXVII - [illegible];

CLXXXVIII - [illegible];

CLXXXIX - [illegible];

CXC - [illegible];

CXCI - [illegible];

CXCII - [illegible];

CXCIII - [illegible];

CXCIV - [illegible];

CXCV - [illegible];

CXCVI - [illegible];

CXCVII - [illegible];

CXCVIII - [illegible];

CXCIX - [illegible];

CC - [illegible];

CCI - [illegible];

CCII - [illegible];

CCIII - [illegible];

CCIV - [illegible];

CCV - [illegible];

CCVI - [illegible];

CCVII - [illegible];

CCVIII - [illegible];

CCIX - [illegible];

CCX - [illegible];

CCXI - [illegible];

CCXII - [illegible];

CCXIII - [illegible];

CCXIV - [illegible];

CCXV - [illegible];

CCXVI - [illegible];

CCXVII - [illegible];

CCXVIII - [illegible];

CCXIX - [illegible];

CCXX - [illegible];

CCXXI - [illegible];

CCXXII - [illegible];

CCXXIII - [illegible];

CCXXIV - [illegible];

CCXXV - [illegible];

CCXXVI - [illegible];

CCXXVII - [illegible];

CCXXVIII - [illegible];

CCXXIX - [illegible];

CCXXX - [illegible];

CCXXXI - [illegible];

CCXXXII - [illegible];

CCXXXIII - [illegible];

CCXXXIV - [illegible];

CCXXXV - [illegible];

CCXXXVI - [illegible];

CCXXXVII - [illegible];

CCXXXVIII - [illegible];

CCXXXIX - [illegible];

CCXL - [illegible];

CCXLI - [illegible];

CCXLII - [illegible];

CCXLIII - [illegible];

CCXLIV - [illegible];

CCXLV - [illegible];

CCXLVI - [illegible];

CCXLVII - [illegible];

CCXLVIII - [illegible];

CCXLIX - [illegible];

CCL - [illegible];

CCLI - [illegible];

CCLII - [illegible];

CCLIII - [illegible];

CCLIV - [illegible];

CCLV - [illegible];

CCLVI - [illegible];

CCLVII - [illegible];

CCLVIII - [illegible];

CCLIX - [illegible];

CCLX - [illegible];

CCLXI - [illegible];

CCLXII - [illegible];

CCLXIII - [illegible];

CCLXIV - [illegible];

CCLXV - [illegible];

CCLXVI - [illegible];

CCLXVII - [illegible];

CCLXVIII - [illegible];

CCLXIX - [illegible];

CCLXX - [illegible];

CCLXXI - [illegible];

CCLXXII - [illegible];

CCLXXIII - [illegible];

CCLXXIV - [illegible];

CCLXXV - [illegible];

CCLXXVI - [illegible];

CCLXXVII - [illegible];

CCLXXVIII - [illegible];

CCLXXIX - [illegible];

CCLXXX - [illegible];

CCLXXXI - [illegible];

CCLXXXII - [illegible];

CCLXXXIII - [illegible];

CCLXXXIV - [illegible];

CCLXXXV - [illegible];

CCLXXXVI - [illegible];

CCLXXXVII - [illegible];

CCLXXXVIII - [illegible];

CCLXXXIX - [illegible];

CCXC - [illegible];

CCXCI - [illegible];

CCXCII - [illegible];

CCXCIII - [illegible];

CCXCIV - [illegible];

CCXCV - [illegible];

CCXCVI - [illegible];

CCXCVII - [illegible];

CCXCVIII - [illegible];

CCXCIX - [illegible];

CCC - [illegible];

CCCI - [illegible];

CCCII - [illegible];

CCCIII - [illegible];

CCCIV - [illegible];

CCCV - [illegible];

CCCVI - [illegible];

CCCVII - [illegible];

CCCVIII - [illegible];

CCCIX - [illegible];

CCCX - [illegible];

CCCXI - [illegible];

CCCXII - [illegible];

CCCXIII - [illegible];

CCCXIV - [illegible];

CCCXV - [illegible];

CCCXVI - [illegible];

CCCXVII - [illegible];

CCCXVIII - [illegible];

CCCXIX - [illegible];

CCCXX - [illegible];

CCCXXI - [illegible];

CCCXXII - [illegible];

CCCXXIII - [illegible];

CCCXXIV - [illegible];

CCCXXV - [illegible];

CCCXXVI - [illegible];

CCCXXVII - [illegible];

CCCXXVIII - [illegible];

CCCXXIX - [illegible];

CCCXXX - [illegible];

CCCXXXI - [illegible];

CCCXXXII - [illegible];

CCCXXXIII - [illegible];

CCCXXXIV - [illegible];

CCCXXXV - [illegible];

CCCXXXVI - [illegible];

CCCXXXVII - [illegible];

CCCXXXVIII - [illegible];

CCCXXXIX - [illegible];

CCCXL - [illegible];

CCCXLI - [illegible];

CCCXLII - [illegible];

CCCXLIII - [illegible];

CCCXLIV - [illegible];

CCCXLV - [illegible];

CCCXLVI - [illegible];

CCCXLVII - [illegible];

CCCXLVIII - [illegible];

CCCXLIX - [illegible];

CCCL - [illegible];

CCCLI - [illegible];

CCCLII - [illegible];

CCCLIII - [illegible];

CCCLIV - [illegible];

CCCLV - [illegible];

CCCLVI - [illegible];

CCCLVII - [illegible];

CCCLVIII - [illegible];

CCCLIX - [illegible];

CCCLX - [illegible];

CCCLXI - [illegible];

CCCLXII - [illegible];

CCCLXIII - [illegible];

CCCLXIV - [illegible];

CCCLXV - [illegible];

CCCLXVI - [illegible];

CCCLXVII - [illegible];

CCCLXVIII - [illegible];

CCCLXIX - [illegible];

CCCLXX - [illegible];

CCCLXXI - [illegible];

CCCLXXII - [illegible];

CCCLXXIII - [illegible];

CCCLXXIV - [illegible];

CCCLXXV - [illegible];

CCCLXXVI - [illegible];

CCCLXXVII - [illegible];

CCCLXXVIII - [illegible];

CCCLXXIX - [illegible];

CCCLXXX - [illegible];

CCCLXXXI - [illegible];

CCCLXXXII - [illegible];

CCCLXXXIII - [illegible];

CCCLXXXIV - [illegible];

CCCLXXXV - [illegible];

CCCLXXXVI - [illegible];

CCCLXXXVII - [illegible];

CCCLXXXVIII - [illegible];

CCCLXXXIX - [illegible];

CCCXC - [illegible];

CCCXCI - [illegible];

CCCXCII - [illegible];

CCCXCIII - [illegible];

CCCXCIV - [illegible];

CCCXCV - [illegible];

CCCXCVI - [illegible];

CCCXCVII - [illegible];

CCCXCVIII - [illegible];

CCCXCIX - [illegible];

CD - [illegible];

CDI - [illegible];

CDII - [illegible];

CDIII - [illegible];

CDIV - [illegible];

CDV - [illegible];

CDVI - [illegible];

CDVII - [illegible];

CDVIII - [illegible];

CDIX - [illegible];

CDX - [illegible];

CDXI - [illegible];

CDXII - [illegible];

CDXIII - [illegible];

CDXIV - [illegible];

CDXV - [illegible];

CDXVI - [illegible];

CDXVII - [illegible];

CDXVIII - [illegible];

CDXIX - [illegible];

CDXX - [illegible];

CDXXI - [illegible];

CDXXII - [illegible];

CDXXIII - [illegible];

CDXXIV - [illegible];

CDXXV - [illegible];

CDXXVI - [illegible];

CDXXVII - [illegible];

CDXXVIII - [illegible];

CDXXIX - [illegible];

CDXXX - [illegible];

CDXXXI - [illegible];

CDXXXII - [illegible];

CDXXXIII - [illegible];

CDXXXIV - [illegible];

CDXXXV - [illegible];

CDXXXVI - [illegible];

CDXXXVII - [illegible];

CDXXXVIII - [illegible];

CDXXXIX - [illegible];

CDXL - [illegible];

CDXLI - [illegible];

CDXLII - [illegible];

CDXLIII - [illegible];

CDXLIV - [illegible];

CDXLV - [illegible];

CDXLVI - [illegible];

CDXLVII - [illegible];

CDXLVIII - [illegible];

CDXLIX - [illegible];

CDL - [illegible];

CDLI - [illegible];

CDLII - [illegible];

CDLIII - [illegible];

CDLIV - [illegible];

CDLV - [illegible];

CDLVI - [illegible];

CDLVII - [illegible];

CDLVIII - [illegible];

CDLIX - [illegible];

CDLX - [illegible];

CDLXI - [illegible];

CDLXII - [illegible];

CDLXIII - [illegible];

CDLXIV - [illegible];

CDLXV - [illegible];

CDLXVI - [illegible];

CDLXVII - [illegible];

CDLXVIII - [illegible];

CDLXIX - [illegible];

CDLXX - [illegible];

CDLXXI - [illegible];

CDLXXII - [illegible];

CDLXXIII - [illegible];

CDLXXIV - [illegible];

CDLXXV - [illegible];

CDLXXVI - [illegible];

CDLXXVII - [illegible];

CDLXXVIII - [illegible];

CDLXXIX - [illegible];

CDLXXX - [illegible];

CDLXXXI - [illegible];

CDLXXXII - [illegible];

CDLXXXIII - [illegible];

CDLXXXIV - [illegible];

CDLXXXV - [illegible];

CDLXXXVI - [illegible];

CDLXXXVII - [illegible];

CDLXXXVIII - [illegible];

CDLXXXIX - [illegible];

CDXC - [illegible];

CDXCI - [illegible];

CDXCII - [illegible];

CDXCIII - [illegible];

CDXCIV - [illegible];

CDXCV - [illegible];

CDXCVI - [illegible];

CDXCVII - [illegible];

CDXCVIII - [illegible];

CDXCIX - [illegible];

D - [illegible];

DI - [illegible];

DII - [illegible];

DIII - [illegible];

DIV - [illegible];

DV - [illegible];

DVI - [illegible];

DVII - [illegible];

DVIII - [illegible];

DIX - [illegible];

DX - [illegible];

DXI - [illegible];

DXII - [illegible];

DXIII - [illegible];

DXIV - [illegible];

DXV - [illegible];

DXVI - [illegible];

DXVII - [illegible];

DXVIII - [illegible];

DXIX - [illegible];

DXX - [illegible];

DXXI - [illegible];

DXXII - [illegible];

DXXIII - [illegible];

DXXIV - [illegible];

DXXV - [illegible];

DXXVI - [illegible];

DXXVII - [illegible];

DXXVIII - [illegible];

DXXIX - [illegible];

DXXX - [illegible];

DXXXI - [illegible];

DXXXII - [illegible];

DXXXIII - [illegible];

DXXXIV - [illegible];

DXXXV - [illegible];

DXXXVI - [illegible];

DXXXVII - [illegible];

DXXXVIII - [illegible];

DXXXIX - [illegible];

DXL - [illegible];

DXLI - [illegible];

DXLII - [illegible];

DXLIII - [illegible];

DXLIV - [illegible];

DXLV - [illegible];

DXLVI - [illegible];

DXLVII - [illegible];

DXLVIII - [illegible];

DXLIX - [illegible];

DL - [illegible];

DLI - [illegible];

DLII - [illegible];

DLIII - [illegible];

DLIV - [illegible];

DLV - [illegible];

DLVI - [illegible];

DLVII - [illegible];

DLVIII - [illegible];

DLIX - [illegible];

DLX - [illegible];

DLXI - [illegible];

DLXII - [illegible];

DLXIII - [illegible];

DLXIV - [illegible];

DLXV - [illegible];

DLXVI - [illegible];

DLXVII - [illegible];

DLXVIII - [illegible];

DLXIX - [illegible];

DLXX - [illegible];

DLXXI - [illegible];

DLXXII - [illegible];

DLXXIII - [illegible];

DLXXIV - [illegible];

DLXXV - [illegible];

DLXXVI - [illegible];

DLXXVII - [illegible];

DLXXVIII - [illegible];

DLXXIX - [illegible];

DLXXX - [illegible];

DLXXXI - [illegible];

DLXXXII - [illegible];

DLXXXIII - [illegible];

DLXXXIV - [illegible];

DLXXXV - [illegible];

DLXXXVI - [illegible];

DLXXXVII - [illegible];

DLXXXVIII - [illegible];

DLXXXIX - [illegible];

DXC - [illegible];

DXCI - [illegible];

DXCII - [illegible];

DXCIII - [illegible];

DXCIV - [illegible];

DXCV - [illegible];

DXCVI - [illegible];

DXCVII - [illegible];

DXCVIII - [illegible];

DXCIX - [illegible];

DC - [illegible];

DCI - [illegible];

DCII - [illegible];

DCIII - [illegible];

DCIV - [illegible];

DCV - [illegible];

DCVI - [illegible];

DCVII - [illegible];

DCVIII - [illegible];

DCIX - [illegible];

DCX - [illegible];

DCXI - [illegible];

DCXII - [illegible];

DCXIII - [illegible];

DCXIV - [illegible];

DCXV - [illegible];

DCXVI - [illegible];

DCXVII - [illegible];

DCXVIII - [illegible];

DCXIX - [illegible];

DCXX - [illegible];

DCXXI - [illegible];

DCXXII - [illegible];

DCXXIII - [illegible];

DCXXIV - [illegible];

DCXXV - [illegible];

DCXXVI - [illegible];

DCXXVII - [illegible];

DCXXVIII - [illegible];

DCXXIX - [illegible];

DCXXX - [illegible];

DCXXXI - [illegible];

DCXXXII - [illegible];

DCXXXIII - [illegible];

DCXXXIV - [illegible];

DCXXXV - [illegible];

DCXXXVI - [illegible];

DCXXXVII - [illegible];

DCXXXVIII - [illegible];

DCXXXIX - [illegible];

DCXL - [illegible];

DCXLI - [illegible];

DCXLII - [illegible];

DCXLIII - [illegible];

DCXLIV - [illegible];

DCXLV - [illegible];

DCXLVI - [illegible];

DCXLVII - [illegible];

DCXLVIII - [illegible];

DCXLIX - [illegible];

DCL - [illegible];

DCLI - [illegible];

DCLII - [illegible];

DCLIII - [illegible];

DCLIV - [illegible];

DCLV - [illegible];

DCLVI - [illegible];

DCLVII - [illegible];

DCLVIII - [illegible];

DCLIX - [illegible];

DCLX - [illegible];

DCLXI - [illegible];

DCLXII - [illegible];

DCLXIII - [illegible];

DCLXIV - [illegible];

DCLXV - [illegible];

DCLXVI - [illegible];

DCLXVII - [illegible];

DCLXVIII - [illegible];

DCLXIX - [illegible];

DCLXX - [illegible];

DCLXXI - [illegible];

DCLXXII - [illegible];

DCLXXIII - [illegible];

DCLXXIV - [illegible];

DCLXXV - [illegible];

DCLXXVI - [illegible];

DCLXXVII - [illegible];

DCLXXVIII - [illegible];

DCLXXIX - [illegible];

DCLXXX - [illegible];

DCLXXXI - [illegible];

DCLXXXII - [illegible];

DCLXXXIII - [illegible];

DCLXXXIV - [illegible];

DCLXXXV - [illegible];

DCLXXXVI - [illegible];

DCLXXXVII - [illegible];

DCLXXXVIII - [illegible];

DCLXXXIX - [illegible];

DCXC - [illegible];

DCXCI - [illegible];

DCXCII - [illegible];

DCXCIII - [illegible];

DCXCIV - [illegible];

DCXCV - [illegible];

DCXCVI - [illegible];

DCXCVII - [illegible];

DCXCVIII - [illegible];

DCXCIX - [illegible];

DCC - [illegible];

DCCI - [illegible];

DCCII - [illegible];

DCCIII - [illegible];

DCCIV - [illegible];

DCCV - [illegible];

DCCVI - [illegible];

DCCVII - [illegible];

DCCVIII - [illegible];

DCCIX - [illegible];

DCCX - [illegible];

DCCXI - [illegible];

DCCXII - [illegible];

DCCXIII - [illegible];

DCCXIV - [illegible];

DCCXV - [illegible];

DCCXVI - [illegible];

DCCXVII - [illegible];

DCCXVIII - [illegible];

DCCXIX - [illegible];

DCCXX - [illegible];

DCCXXI - [illegible];

DCCXXII - [illegible];

DCCXXIII - [illegible];

DCCXXIV - [illegible];

DCCXXV - [illegible];

DCCXXVI - [illegible];

DCCXXVII - [illegible];

DCCXXVIII - [illegible];

DCCXXIX - [illegible];

DCCXXX - [illegible];

DCCXXXI - [illegible];

DCCXXXII - [illegible];

DCCXXXIII - [illegible];

DCCXXXIV - [illegible];

DCCXXXV - [illegible];

DCCXXXVI - [illegible];

DCCXXXVII - [illegible];

DCCXXXVIII - [illegible];

DCCXXXIX - [illegible];

DCCXL - [illegible];

DCCXLI - [illegible];

DCCXLII - [illegible];

DCCXLIII - [illegible];

DCCXLIV - [illegible];

DCCXLV - [illegible];

DCCXLVI - [illegible];

DCCXLVII - [illegible];

DCCXLVIII - [illegible];

DCCXLIX - [illegible];

DCCL - [illegible];

DCCLI - [illegible];

DCCLII - [illegible];

DCCLIII - [illegible];

DCCLIV - [illegible];

DCCLV - [illegible];

DCCLVI - [illegible];

DCCLVII - [illegible];

DCCLVIII - [illegible];

DCCLIX - [illegible];

DCCLX - [illegible];

DCCLXI - [illegible];

DCCLXII - [illegible];

DCCLXIII - [illegible];

DCCLXIV - [illegible];

DCCLXV - [illegible];

DCCLXVI - [illegible];

DCCLXVII - [illegible];

DCCLXVIII - [illegible];

DCCLXIX - [illegible];

DCCLXX - [illegible];

DCCLXXI - [illegible];

DCCLXXII - [illegible];

DCCLXXIII - [illegible];

DCCLXXIV - [illegible];

DCCLXXV - [illegible];

DCCLXXVI - [illegible];

DCCLXXVII - [illegible];

DCCLXXVIII - [illegible];

DCCLXXIX - [illegible];

DCCLXXX - [illegible];

DCCLXXXI - [illegible];

DCCLXXXII - [illegible];

DCCLXXXIII - [illegible];

DCCLXXXIV - [illegible];

DCCLXXXV - [illegible];

DCCLXXXVI - [illegible];

DCCLXXXVII - [illegible];

DCCLXXXVIII - [illegible];

DCCLXXXIX - [illegible];

DCCXC - [illegible];

DCCXCI - [illegible];

DCCXCII - [illegible];

DCCXCIII - [illegible];

DCCXCIV - [illegible];

DCCXCV - [illegible];

DCCXCVI - [illegible];

DCCXCVII - [illegible];

DCCXCVIII - [illegible];

DCCXCIX - [illegible];

DCCC - [illegible];

DCCCI - [illegible];

DCCCII - [illegible];

DCCCIII - [illegible];

DCCCIV - [illegible];

DCCCV - [illegible];

DCCCVI - [illegible];

DCCCVII - [illegible];

DCCCVIII - [illegible];

DCCCIX - [illegible];

DCCCX - [illegible];

DCCCXI - [illegible];

DCCCXII - [illegible];

DCCCXIII - [illegible];

DCCCXIV - [illegible];

DCCCXV - [illegible];

DCCCXVI - [illegible];

DCCCXVII - [illegible];

DCCCXVIII - [illegible];

DCCCXIX - [illegible];

DCCCXX - [illegible];

DCCCXXI - [illegible];

DCCCXXII - [illegible];

DCCCXXIII - [illegible];

DCCCXXIV - [illegible];

DCCCXXV - [illegible];

DCCCXXVI - [illegible];

DCCCXXVII - [illegible];

DCCCXXVIII - [illegible];

DCCCXXIX - [illegible];

DCCCXXX - [illegible];

DCCCXXXI - [illegible];

DCCCXXXII - [illegible];

DCCCXXXIII - [illegible];

DCCCXXXIV - [illegible];

DCCCXXXV - [illegible];

DCCCXXXVI - [illegible];

DCCCXXXVII - [illegible];

DCCCXXXVIII - [illegible];

DCCCXXXIX - [illegible];

DCCCXL - [illegible];

DCCCXLI - [illegible];

DCCCXLII - [illegible];

DCCCXLIII - [illegible];

DCCCXLIV - [illegible];

DCCCXLV - [illegible];

DCCCXLVI - [illegible];

DCCCXLVII - [illegible];

DCCCXLVIII - [illegible];

DCCCXLIX - [illegible];

DCCCL - [illegible];

DCCCLI - [illegible];

DCCCLII - [illegible];

DCCCLIII - [illegible];

DCCCLIV - [illegible];

DCCCLV - [illegible];

DCCCLVI - [illegible];

DCCCLVII - [illegible];

DCCCLVIII - [illegible];

DCCCLIX - [illegible];

DCCCLX - [illegible];

DCCCLXI - [illegible];

DCCCLXII - [illegible];

DCCCLXIII - [illegible];

DCCCLXIV - [illegible];

DCCCLXV - [illegible];

DCCCLXVI - [illegible];

DCCCLXVII - [illegible];

DCCCLXVIII - [illegible];

DCCCLXIX - [illegible];

DCCCLXX - [illegible];

DCCCLXXI - [illegible];

DCCCLXXII - [illegible];

DCCCLXXIII - [illegible];

DCCCLXXIV - [illegible];

DCCCLXXV - [illegible];

DCCCLXXVI - [illegible];

DCCCLXXVII - [illegible];

DCCCLXXVIII - [illegible];

DCCCLXXIX - [illegible];

DCCCLXXX - [illegible];

DCCCLXXXI - [illegible];

DCCCLXXXII - [illegible];

DCCCLXXXIII - [illegible];

DCCCLXXXIV - [illegible];

DCCCLXXXV - [illegible];

DCCCLXXXVI - [illegible];

DCCCLXXXVII - [illegible];

DCCCLXXXVIII - [illegible];

DCCCLXXXIX - [illegible];

DCCCXC - [illegible];

DCCCXCI - [illegible];

DCCCXCII - [illegible];

DCCCXCIII - [illegible];

DCCCXCIV - [illegible];

DCCCXCV - [illegible];

DCCCXCVI - [illegible];

DCCCXCVII - [illegible];

DCCCXCVIII - [illegible];

DCCCXCIX - [illegible];

CM - [illegible];

CMI - [illegible];

CMII - [illegible];

CMIII - [illegible];

CMIV - [illegible];

CMV - [illegible];

CMVI - [illegible];

CMVII - [illegible];

CMVIII - [illegible];

CMIX - [illegible];

CMX - [illegible];

CMXI - [illegible];

CMXII - [illegible];

CMXIII - [illegible];

CMXIV - [illegible];

CMXV - [illegible];

CMXVI - [illegible];

CMXVII - [illegible];

CMXVIII - [illegible];

CMXIX - [illegible];

CMXX - [illegible];

CMXXI - [illegible];

CMXXII - [illegible];

CMXXIII - [illegible];

CMXXIV - [illegible];

CMXXV - [illegible];

CMXXVI - [illegible];

CMXXVII - [illegible];

CMXXVIII - [illegible];

CMXXIX - [illegible];

CMXXX - [illegible];

CMXXXI - [illegible];

CMXXXII - [illegible];

CMXXXIII - [illegible];

CMXXXIV - [illegible];

CMXXXV - [illegible];

CMXXXVI - [illegible];

CMXXXVII - [illegible];

CMXXXVIII - [illegible];

CMXXXIX - [illegible];

CMXL - [illegible];

CMXLI - [illegible];

CMXLII - [illegible];

CMXLIII - [illegible];

CMXLIV - [illegible];

CMXLV - [illegible];

CMXLVI - [illegible];

CMXLVII - [illegible];

CMXLVIII - [illegible];

CMXLIX - [illegible];

CML - [illegible];

CMLI - [illegible];

CMLII - [illegible];

CMLIII - [illegible];

CMLIV - [illegible];

CMLV - [illegible];

CMLVI - [illegible];

CMLVII - [illegible];

CMLVIII - [illegible];

CMLIX - [illegible];

CMLX - [illegible];

CMLXI - [illegible];

CMLXII - [illegible];

CMLXIII - [illegible];

CMLXIV - [illegible];

CMLXV - [illegible];

CMLXVI - [illegible];

CMLXVII - [illegible];

CMLXVIII - [illegible];

CMLXIX - [illegible];

CMLXX - [illegible];

CMLXXI - [illegible];

CMLXXII - [illegible];

CMLXXIII - [illegible];

CMLXXIV - [illegible];

CMLXXV - [illegible];

CMLXXVI - [illegible];

CMLXXVII - [illegible];

CMLXXVIII - [illegible];

CMLXXIX - [illegible];

CMLXXX - [illegible];

CMLXXXI - [illegible];

CMLXXXII - [illegible];

CMLXXXIII - [illegible];

CMLXXXIV - [illegible];

CMLXXXV - [illegible];

CMLXXXVI - [illegible];

CMLXXXVII - [illegible];

CMLXXXVIII - [illegible];

CMLXXXIX - [illegible];

CMXC - [illegible];

CMXCI - [illegible];

CMXCII - [illegible];

CMXCIII - [illegible];

CMXCIV - [illegible];

CMXCV - [illegible];

CMXCVI - [illegible];

CMXCVII - [illegible];

CMXCVIII - [illegible];

CM

§ 13. Gegensatz und Verwandtschaft der Angaben der §§ 11. und 12. Generalregel über die Bestimmung der Gesamtzahl aller Bilder eines beliebig wo innerhalb der Oeffnung eingeführten Lichtpunkts.

§ 14. Weitere Aufklärung über den Ursprung einiger Sätze des § 12.

§ 15. Die möglichen Aenderungen der Bilderzahl eines Punktes, wenn er innerhalb der unveränderlich bleibenden Oeffnung des Winkelspiegels sich bewegt, durch ein charakteristisches Beispiel erläutert.

§ 16. Einführung eines Systems von Punkten in der Oeffnung des Winkelspiegels. Zunächst diejenigen Erscheinungen betrachtet, welche sich ergeben, wenn die Oeffnung ein aliquoter Teil von 180^0 ist.

§ 17. Aufklärung der Erscheinungen in den übrigen Fällen.

§ 18. Die unter Umständen sich ergebenden Störungen der Bilder durcheinander.

II.

Zur Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Von

Herrn **Otto Ohnesorge.**

Das Problem, welches in der vorliegenden Abhandlung behandelt wird, ist folgendes:

Es sind sämtliche reelle Functionen u zu bestimmen, von der Beschaffenheit, dass sie der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügen und auf einer gegebenen algebraischen Curve vorgeschriebene Werte annehmen.

Die allgemeine Lösung der obigen Gleichung ist:

$$u = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta),$$

wo $\xi = x + iy$ und $\eta = x - iy$ gesetzt ist. Im allgemeinsten Falle sind χ_1 sowol wie χ_2 vollständig willkürliche Functionen, soll ihre Summe jedoch eine reelle Function von x und y darstellen, so müssen sie einander conjugirt sein.

§. 1.

Ich bestimme zunächst u so, dass es constant ist auf einer gegebenen Curve. Ist dies der Fall, so lautet die Gleichung der Curve $\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) = a$. Die Curve soll jedoch eine algebraische sein, mit-

hin muss durch diese Gleichung eine algebraische Relation zwischen ξ und η ausgedrückt sein. Hieraus folgt sofort die Form der Function χ, wenn die obige Gleichung durch eine algebraische Beziehung zwischen ξ und η für jeden Wert von α erfüllt ist; es kann dies nämlich nur dann stattfinden, wenn χ entweder selbst eine algebraische Function oder aber höchstens ein elliptisches Integral erster Gattung von einer algebraischen Function ist. Besteht aber eine algebraische Gleichung zwischen ξ und η nur für einen bestimmten Wert von α, so können auch transcendente Functionen höherer Ordnung auftreten.

Nach dieser Betrachtung kann man das obige Problem auch auffassen als folgendes:

Es ist eine Function zu bestimmen, deren Additionstheorem gegeben ist.

Ist die algebraische Gleichung, die das Additionstheorem der beiden Functionen χ_1 urd χ_2 herstellt, so beschaffen, dass dieses Problem überhaupt eine Lösung besitzt, so ist diese Lösrng leicht zu finden, da der Weg hierzu schon von Euler gegeben ist.

In der Tat, es sei $\varphi(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung der Curve, so ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta = 0.$$

Bestimmt man nun mit Hilfe der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ ξ als Function von η und η als Function von ξ und ersetzt ia $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ die η durch die ξ und in $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ die ξ durch die η, oder auch umgekehrt, so ist entweder

$$\chi_1 = \int \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi \quad \text{und} \quad \chi_2 = \int \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \partial \eta$$

oder

$$\chi_1 = \int \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}} d\xi, \quad \chi_3 = \int \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}} d\eta$$

oder allgemeiner:

$$\chi_1 = \int M \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi \quad \text{oder} \quad = \int \frac{M}{\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}} d\xi$$

und

$$\chi_2 = \int M \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta \quad \text{oder} \quad = \int \frac{M}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}} d\eta$$

wo natürlich auch in M, welches eine willkürliche, jedoch symmetrische Function von ξ und η sein muss, entweder die ξ durch die η oder die η durch die ξ, vermöge der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ zu ersetzen sind.

Die Gleichung der Curve ist in Bezug auf beide Variable vom n ten Grade, es fragt sich, welche von den n Wurzeln zu nehmen sind. Die Frage erledigt sich dadurch, dass, wenn $\xi = \omega(\eta)$ und $\eta = (\xi)$ ist, dass alsdann $\omega(\tau(\xi)) = \xi$ sein muss. Derartige Wurzeln existiren wie später bewiesen werden wird, stets.

Hat man die Functionen χ so bestimmt, so wird der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ durch die Beziehung $\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) = \alpha$ Genüge geleistet, bei passender Bestimmung der Constanten α, es bleibt nun noch zu beweisen, dass auch die erhaltenen Functionen χ_1 und χ_2 einander conjugirt sind.

Die Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ ist entstanden aus der algebraischen Gleichung $\psi(x, y) = 0$ dadurch, dass man an Stelle von x $\frac{1}{2}(\xi + \eta)$, und an Stelle von y $\frac{1}{2i}(\xi, \eta)$ gesetzt hat. Da nun $\psi(x, y)$ eine rationale Function von x und y ist, so ergiebt sich sofort, dass, wenn $\varphi(\xi, \eta)$ eine reelle Function von ξ und η ist, sie auch symmetrisch ist in Bezug auf ξ und η: es ist demnach, wenn $\xi = \omega(\eta)$ eine Wurzel der Gleichung ist, auch $\eta = \omega(\xi)$ eine, ferner ist $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ dieselbe Function von ξ und η wie $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ von η und ξ, hieraus folgt, dass χ_1 und χ_2 dieselben Functionen sind.

Ist jedoch $\varphi(\xi, \eta)$ eine complexe Function, so lässt sie sich stets auf die Form bringen $A + i(\xi - \eta)B$, wo A und B rationale und symmetrische Functionen sind. Dieser Ausdruck gleich null gesetzt und die so entstandene Gleichung nach ξ aufgelöst, gebe $\xi = \omega(\eta) + i\tau(\eta)$, es folgt hieraus, dass $\eta = \omega(\xi) - i\tau(\eta)$ ebenfalls eine Wurzel sein muss.

Nun ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial A}{\partial \xi} + iB + i(\xi - \eta)\frac{\partial B}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial A}{\partial \eta} - iB + (\xi - \eta)\frac{\partial B}{\partial \eta}$$

substituirt man hierin für ξ und für η die entsprechenden Functionen

und trennt zu gleicher Zeit die reellen von den imaginären Teilen, (immer berücksichtigend, dass, wenn $B(\omega + i\tau) = F + iG$ ist, $B(\omega - i\tau) = F - iG$), so erhält man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = C + iD + i(F + iG) + i(\xi - \omega + i\tau)(J + iK)$$

(alles Functionen von ξ)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = C - iD - i(F - iG) + i(\omega + i\tau - \eta)(J - iK)$$

(alles Functionen von η), oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = C - G - J\tau - K(\xi - \omega) + i\{D + J - \tau K + (\xi - \omega)J\}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = C - G - J\tau + K(\omega - \eta) - i\{D + J - \tau K + (\eta - \omega)J\}$$

Mithin sind $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ conjugirte Functionen, also auch

$$\chi_1 = \int M \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi \quad \text{und} \quad \chi_2 = \int M \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta$$

da auch M durch die Substitution $\xi = \omega(\eta) + i\tau(\eta)$ und $\eta = \omega(\xi) - i\tau(\xi)$ in zwei conjugirte Functionen verwandelt wird.

Diese Methode lässt sich leicht ausdehnen auf den Fall, wo u auf der gegebenen Curve nicht constant, sondern einer beliebigen Function gleich wird.

Es sei $\tau(\xi, \eta)$ die gegebene Function, so wird die Gleichung der Curve enthalten sein in der Gleichung:

$$\chi_1(\xi) + \chi_2(\eta) = \tau(\xi, \eta),$$

es werden also die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta = 0$$

und

$$\left(\chi_1'(\xi) - \frac{\partial \tau}{\partial \xi}\right) d\xi + \left(\chi_2'(\eta) - \frac{\partial \tau}{\partial \eta}\right) d\eta = 0$$

identisch sein müssen, also

$$\chi_1'(\xi) - \frac{\partial \tau}{\partial \xi} = M \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

und

$$\chi_2'(\eta) - \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = M \frac{\partial \varphi}{\partial \eta},$$

mithin wird

$$u = \int \left(M \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) d\xi + \int \left(M \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \right) d\eta.$$

Auch hier ist M eine symmetrische Function, und auch hier sind entweder die ξ durch die η, oder die η durch die ξ vermöge der Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ zu ersetzen.

Ist τ ebenfalls eine symmetrische Function oder von der Form $A + i(\xi - \eta)B$, so wird auch u eine reelle Function von x und y sein.

Uebrigens kann man stets eine symmetrische Function herstellen, die auf der gegebenen Curve mit τ übereinstimmt.

In der Tat, es sei A irgend eine symmetrische Function von ξ und η, ersetzt man nun in $\tau(\xi, \eta)$, ξ und η durch t und φ vermöge der Gleichungen $t = t(\xi, \eta)$ und $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$, so wird $\tau(\xi, \eta) = \tau_1(t, \varphi)$, auf der gebenen Curve aber wird $\varphi = 0$, also τ nur eine Function von t, mithin symmetrisch in Bezug auf ξ und η.

Die gefundene Function ist insofern noch willkürlich als M willkürlich ist, M müsste demnach durch vorgeschriebene Stetigkeitsbedingungen bestimmt werden. Diese Aufgabe würde ohne Zweifel äusserst schwieriger Natur sein, doch kann man dieselbe teilweise umgehen, dadurch dass man zu dem oben bestimmten u diejenige allmeinste Function u_1 addirt, die auf der gegebenen Curve gleich null ist. Diese Function kann man, wie in dem nächsten Abschnitte gezeigt werden wird, stets ohne Integrale in endlicher Form darstellen. Die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen bietet alsdann, wenn sie auch allgemein nicht ausführbar ist, in den meisten Fällen keine grossen Schwierigkeiten mehr dar. Nur, wenn endliche Unstetigkeiten, die auf bestimmten Linien stattfinden, zu beseitigen sind, könnte man auf wesentliche Schwierigkeiten stossen.

§. 2.

Die Methode, die wir soeben entwickelt haben, führt nur dann zum Ziel, wenn die Gleichung der gegebenen Curve irreductibel ist, wenn also nur eine einzige algebraische Curve gegeben ist, auf der die Function constant sein soll. In diesem Abschnitte werde ich eine Methode geben, die sich auch auf Curven anwenden lässt, deren Gleichung reductibel ist. Sie ist jedoch insofern beschränkter, als u stets constant sein muss.

Die gesuchte Function u kann in doppelter Form dargestellt werden, nämlich durch

$$u - \alpha = \chi_1(\xi) + \chi_1(\eta)$$

oder durch

$$u - \alpha = \frac{1}{i}\{\chi_1(\xi) - \chi_2(\eta)\}.$$

Ich behandle zuerst den Fall, dass u in der zweiten Form dargestellt wird. In diesem Falle ist $u = \alpha$ auf der Curve $\chi_1(\xi) = \chi_2(\eta)$, auf der gegebenen Curve jedoch sei $\xi = \varphi(\eta, i)$ und $\eta = \varphi(\xi, -i)$, demnach muss sein $\chi_1(\xi) = \chi_2(\varphi(\xi))$. Ist φ eine reelle Function, so ist $\chi_1 = \chi_2$, also $\chi(\xi) = \chi(\varphi(\xi))$.

Zwischen ξ und η jedoch besteht eine symmetrische Gleichung, es ist mithin, wenn $\eta = \varphi(\xi)$ auch $\xi = \varphi(\eta)$, demnach wird stets eine Wurzel existiren, so dass $\varphi(\varphi(\xi)) = \xi$ ist.

Ist nun $\chi(\xi, \varphi(\xi))$ eine symmetrische Function von ξ und $\varphi(\xi)$ und bezeichne ich dieselbe mit $\chi(\xi)$, so ist $\chi(\xi) = \chi(\varphi(\xi))$.

Wir haben also erreicht, dass alle u, die constant sind auf der gegebenen Curve, sich darstellen lassen in der Form:

$$u - \alpha = i\{\chi(\xi, \varphi(\xi)) - \chi(\eta, \varphi(\eta))\},$$

wo $\chi(\xi, \varphi(\xi))$ eine willkürliche, jedoch symmetrische Function von ξ und $\varphi(\xi)$ sein muss.

Ist $\varphi(\xi)$ keine reelle Function von ξ, so ist, wie wir schon im ersten Abschnitte gesehen haben, an Stelle von $\varphi(\xi)$ zu setzen $\omega(\xi) - i\tau(\xi)$ und an Stelle von $\varphi(\xi)$ $\omega(\eta) + i\tau(\eta)$, demnach wird:

$$u - \alpha = i\{\chi(\xi, \omega(\xi) - i\tau(\xi)) - \chi(\xi, \omega(\eta) + i\tau(\eta)\}$$

wo χ wiederum eine reelle und symmetrische Function der beiden Argumente sein muss.

2) u habe die Form: $u - \alpha = \chi_1(\xi) + \chi_2(\eta)$, so erhält man leicht durch ähnliche Betrachtungen wie oben, dass zu setzen ist:

$$u - \alpha = \{\psi(\xi) - \psi(\varphi(\xi))\}\{\chi(\xi, \varphi(\xi)) + \{\psi(\eta) - \psi(\varphi(\eta))\} \cdot \chi(\eta, \varphi(\eta))$$

Es sind hierin die ψ und χ stets reelle, doch willkürliche Functionen.

Dass übrigens, wenn an Stelle von ξ $\varphi(\eta)$ gesetzt wird, die rechte Seite versshwindet, erkennt man leicht, nur muss die Bedingungsgleichung stattfinden

$$\varphi(\varphi(\xi)) = \xi.$$

Finally, we can also derive an EM algorithm for MAP estimation. The objective function in the M-step gains an additional term corresponding to the log prior over θ, but the E-step remains unchanged.

2.3 Derivation of EM for GMMs

Given the expression for the complete-data log likelihood for a mixture model, it is relatively straightforward to derive the EM algorithm. The only tricky part is dealing with the normalization constraints that we must enforce for π and Σ. This results in Lagrange multiplier terms, as is common when deriving the M step for models with sum-to-one constraints (see Appendix B.4 for details).

2.3.1 Responsibilities

Define the responsibility that cluster k takes for data point i as follows:

$$r_{ik} \triangleq p(z_i = k \mid \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta}) \tag{2.45}$$

We can compute these responsibilities easily using Bayes' rule:

$$r_{ik} = \frac{\pi_k p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k)}{\sum_{k'} \pi_{k'} p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_{k'})} \tag{2.46}$$

2.3.2 Complete data log likelihood

Recall that the complete data log likelihood is given by

$$\log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} \log \pi_{z_i} + \sum_{i=1}^{N} \log p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_{z_i}) \tag{2.47}$$

Let us rewrite this in a way that will be more convenient. In particular, let us replace the sum over data cases i by a sum over clusters k, by grouping all data assigned to cluster k:

$$\log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i: z_i = k} \log \pi_k + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i: z_i = k} \log p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k) \tag{2.48}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} N_k \log \pi_k + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i: z_i = k} \log p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k) \tag{2.49}$$

where $N_k \triangleq \sum_i \mathbb{I}(z_i = k)$ is the number of data assigned to cluster k.

2.3.3 Expected complete data log likelihood for a GMM

Now we can compute the expected complete data log likelihood for a GMM. We will derive the general case, where we have tied parameters, and then specialize it to the untied case. We will also assume a prior over the parameters, so we can perform MAP estimation.

The expected complete data log likelihood is

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{old}) \triangleq \mathbb{E}\left[\log p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{\theta}) + \log p(\boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\theta}^{old}\right] \tag{2.50}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}[N_k] \log \pi_k + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i: z_i = k} \mathbb{E}\left[\log p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k)\right] + \log p(\boldsymbol{\theta}) \tag{2.51}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}[N_k] \log \pi_k + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} r_{ik} \log p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k) + \log p(\boldsymbol{\theta}) \tag{2.52}$$

where $\mathbb{E}[N_k] = \sum_i r_{ik}$ is the expected number of data assigned to cluster k.

2.3.4 The M step

Now we can maximize $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{old})$ wrt $\boldsymbol{\theta}$. Since the parameters can be updated separately for each cluster, we can drop the $\sum_{k=1}^{K}$ terms. Similarly, we can drop terms that are constant wrt $\boldsymbol{\theta}$. This leaves us with

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{old}) = \sum_{i=1}^{N} r_{ik} \log p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k) + \log p(\boldsymbol{\theta}) \tag{2.53}$$

Let us now consider the M step for the mixing weights $\boldsymbol{\pi}$. We can ignore terms that do not involve $\boldsymbol{\pi}$. We also need to take into account the fact that $\boldsymbol{\pi}$ must sum to one. Hence we must add a Lagrange multiplier term to enforce this constraint. Thus the objective function is

$$\ell(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}[N_k] \log \pi_k + \log p(\boldsymbol{\pi}) + \lambda\left(1 - \sum_{k=1}^{K} \pi_k\right) \tag{2.54}$$

If we use a Dirichlet prior, $\boldsymbol{\pi} \sim \mathrm{Dir}(\boldsymbol{\alpha})$, then the prior has the form $p(\boldsymbol{\pi}) \propto \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{\alpha_k - 1}$, so the objective function becomes

$$\ell(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{k=1}^{K} (\mathbb{E}[N_k] + \alpha_k - 1) \log \pi_k + \lambda\left(1 - \sum_{k=1}^{K} \pi_k\right) \tag{2.55}$$

Taking derivatives wrt π_k and setting to zero gives

$$\frac{\partial \ell}{\partial \pi_k} = \frac{\mathbb{E}[N_k] + \alpha_k - 1}{\pi_k} - \lambda = 0 \tag{2.56}$$

$$\pi_k = \frac{\mathbb{E}[N_k] + \alpha_k - 1}{\lambda} \tag{2.57}$$

Using the sum-to-one constraint we have

$$\sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1 = \frac{\sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}[N_k] + \alpha_k - 1}{\lambda} \tag{2.58}$$

$$\lambda = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}[N_k] + \alpha_k - 1 = N + \alpha_0 - K \tag{2.59}$$

where $\alpha_0 \triangleq \sum_{k=1}^{K} \alpha_k$. Hence

$$\pi_k = \frac{\mathbb{E}[N_k] + \alpha_k - 1}{N + \alpha_0 - K} \tag{2.60}$$

If we use an uninformative prior, $\alpha_k = 1$, we get the MLE:

$$\pi_k = \frac{\mathbb{E}[N_k]}{N} \tag{2.61}$$

Now let us consider the M step for $\boldsymbol{\theta}_k$. We can ignore terms that do not involve $\boldsymbol{\theta}_k$. Hence

$$\ell(\boldsymbol{\theta}_k) = \sum_{i=1}^{N} r_{ik} \log p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k) + \log p(\boldsymbol{\theta}_k) \tag{2.62}$$

If we have a conjugate prior, we can just add the expected sufficient statistics to the prior counts and then compute the MAP estimate. For example, consider a GMM with Gaussian observations and a Gaussian-inverse-Wishart prior. The prior has the form

$$\mathrm{NIW}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} \mid \boldsymbol{m}_0, \kappa_0, \nu_0, \boldsymbol{S}_0) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{m}_0, \frac{1}{\kappa_0}\boldsymbol{\Sigma}) \mathrm{IW}(\boldsymbol{\Sigma} \mid \nu_0, \boldsymbol{S}_0) \tag{2.63}$$

$$\propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{\nu_0 + D + 2}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_0 \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) - \frac{\kappa_0}{2}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{m}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{m}_0)\right) \tag{2.64}$$

Hence the MAP estimate is given by

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{\kappa_0 \boldsymbol{m}_0 + \mathbb{E}[N_k] \bar{\boldsymbol{x}}_k}{\kappa_0 + \mathbb{E}[N_k]} \tag{2.65}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = \frac{\boldsymbol{S}_0 + \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{m}_0} + \boldsymbol{S}_k}{\nu_0 + \mathbb{E}[N_k] + D + 2} \tag{2.66}$$

where $\bar{\boldsymbol{x}}_k = \frac{1}{\mathbb{E}[N_k]} \sum_{i=1}^{N} r_{ik} \boldsymbol{x}_i$ is the weighted empirical mean for cluster k, $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{m}_0} = (\bar{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{m}_0)(\bar{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{m}_0)^T$ is the outer product of the empirical mean and the prior mean, and $\boldsymbol{S}_k = \sum_{i=1}^{N} r_{ik} (\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}}_k)^T$ is the weighted empirical scatter matrix for cluster k.

If we use an uninformative prior, we get the MLE:

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{\mathbb{E}[N_k] \bar{\boldsymbol{x}}_k}{\mathbb{E}[N_k]} = \bar{\boldsymbol{x}}_k \tag{2.67}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = \frac{\boldsymbol{S}_k}{\mathbb{E}[N_k] + D + 2} \tag{2.68}$$

2.3.5 The EM algorithm

Putting all the pieces together, we have the following EM algorithm for fitting a GMM with Gaussian observations and a Gaussian-inverse-Wishart prior.

E step

$$r_{ik} = \frac{\pi_k p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k)}{\sum_{k'} \pi_{k'} p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_{k'})} \tag{2.69}$$

M step

$$\pi_k = \frac{\mathbb{E}[N_k] + \alpha_k - 1}{N + \alpha_0 - K} \tag{2.70}$$

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{\kappa_0 \boldsymbol{m}_0 + \mathbb{E}[N_k] \bar{\boldsymbol{x}}_k}{\kappa_0 + \mathbb{E}[N_k]} \tag{2.71}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = \frac{\boldsymbol{S}_0 + \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{m}_0} + \boldsymbol{S}_k}{\nu_0 + \mathbb{E}[N_k] + D + 2} \tag{2.72}$$

where $\mathbb{E}[N_k] = \sum_i r_{ik}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_k = \frac{1}{\mathbb{E}[N_k]} \sum_{i=1}^{N} r_{ik} \boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{m}_0} = (\bar{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{m}_0)(\bar{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{m}_0)^T$, and $\boldsymbol{S}_k = \sum_{i=1}^{N} r_{ik} (\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}}_k)^T$.

If we use an uninformative prior, we get the following MLE:

$$\pi_k = \frac{\mathbb{E}[N_k]}{N} \tag{2.73}$$

$$\boldsymbol{\mu}_k = \bar{\boldsymbol{x}}_k \tag{2.74}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = \frac{\boldsymbol{S}_k}{\mathbb{E}[N_k] + D + 2} \tag{2.75}$$

2.4 Convergence of the EM algorithm

Under certain regularity conditions, EM is guaranteed to converge to a stationary point of the log likelihood. However, it can be slow to converge, and it can also converge to a local optimum, depending on the quality of the initial parameters. We will discuss these issues in more detail in Section 8.7.4. In addition, we usually need to specify K, the number of mixture components. We will discuss ways to choose K in Section 2.5.1.

2.5 Model selection for latent variable models

When using latent variable models (LVMs), we need to choose the model complexity, such as the number of mixture components K. Choosing the right model complexity is important for several reasons. First, it can affect the generalization performance of the model, as discussed in Section 1.4.8. Second, it can affect the interpretability of the model: if we learn that there are 10 types of cancer, we may be able to assign names to each of these types, and perhaps even develop specialized treatments for each; however, if we learn that there are 100 types of cancer, it will be much harder to do this. Third, it can affect the computational cost of using the model for various tasks.

2.5.1 Model selection for GMMs

Choosing the number of mixture components K is an example of model selection. We can use the techniques discussed in Section 1.4.8, such as cross-validation or information criteria, to choose K. Alternatively, we can use Bayesian model selection, which we discuss in Section 5.2.

2.5.2 Model selection for non-GMMs

Choosing the number of latent variables in non-GMM models can be more challenging, since we cannot usually marginalize out the latent variables. We discuss some approaches to this problem in later chapters.

2.6 Fitting GMMs using gradient descent

Although EM is the most common way to fit GMMs, it is also possible to use gradient descent. In this section, we show how to do this.

2.6.1 Reparameterization

Gradient descent is an unconstrained optimization algorithm, so we need to reparameterize the model to remove constraints. For example, we can use the softmax function to ensure that the mixing weights $\boldsymbol{\pi}$ sum to one, and we can use the Cholesky decomposition to ensure that the covariance matrices $\boldsymbol{\Sigma}_k$ are positive definite.

Let $\boldsymbol{\pi} = \mathrm{softmax}(\boldsymbol{w})$, where $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^K$. Let $\boldsymbol{\Sigma}_k = \boldsymbol{L}_k \boldsymbol{L}_k^T$, where $\boldsymbol{L}_k$ is a lower triangular matrix with positive diagonal elements. We can parameterize $\boldsymbol{L}_k$ by its unconstrained elements, and then exponentiate the diagonal elements to ensure they are positive.

2.6.2 Gradient descent

Now we can use gradient descent to minimize the negative log likelihood. The gradient of the negative log likelihood is given by

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ell(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^{N} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}) \tag{2.76}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta})} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}) \tag{2.77}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta})} \sum_{k=1}^{K} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \pi_k p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k) \tag{2.78}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \frac{\pi_k p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k)}{p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta})} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \log \pi_k p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k) \tag{2.79}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} r_{ik} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \log \pi_k p(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_k) \tag{2.80}$$

where $r_{ik} = p(z_i = k \mid \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta})$ is the responsibility that cluster k takes for data point i.

We can now use any gradient-based optimization algorithm, such as stochastic gradient descent, to minimize the negative log likelihood.

2.6.3 Comparison of EM and gradient descent

EM and gradient descent are both iterative algorithms that can be used to fit GMMs. EM is usually faster, but gradient descent can be more flexible, since it can be used to fit models with non-conjugate priors or non-exponential family observations. Gradient descent can also be more easily parallelized, since it only requires computing the gradient of the log likelihood, which can be done in parallel for each data point.

2.7 Exercises

Exercise 2.1 (Mixture of Gaussians)

Consider a mixture of K Gaussians with D-dimensional observations. Let $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_K)$ be the mixing weights, and let $\boldsymbol{\mu}_k \in \mathbb{R}^D$ and $\boldsymbol{\Sigma}_k \in \mathbb{R}^{D \times D}$ be the mean and covariance of cluster k. Let $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_K, \boldsymbol{\Sigma}_K)$ be the parameters of the model.

(a) Write down the log likelihood $\ell(\boldsymbol{\theta})$ for a dataset $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$.

(b) Write down the complete data log likelihood $\ell_c(\boldsymbol{\theta})$ for a dataset $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ and $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_N$.

(c) Write down the expected complete data log likelihood $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{old})$.

(d) Derive the E step for the mixture of Gaussians.

(e) Derive the M step for the mixture of Gaussians.

Exercise 2.2 (Gaussian-inverse-Wishart prior)

Consider a mixture of K Gaussians with D-dimensional observations. Let $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_K)$ be the mixing weights, and let $\boldsymbol{\mu}_k \in \mathbb{R}^D$ and $\boldsymbol{\Sigma}_k \in \mathbb{R}^{D \times D}$ be the mean and covariance of cluster k. Let $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_K, \boldsymbol{\Sigma}_K)$ be the parameters of the model.

Assume we have a Gaussian-inverse-Wishart prior on $\boldsymbol{\mu}_k$ and $\boldsymbol{\Sigma}_k$:

$$\mathrm{NIW}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} \mid \boldsymbol{m}_0, \kappa_0, \nu_0, \boldsymbol{S}_0) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{m}_0, \frac{1}{\kappa_0}\boldsymbol{\Sigma}) \mathrm{IW}(\boldsymbol{\Sigma} \mid \nu_0, \boldsymbol{S}_0) \tag{2.81}$$

$$\propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{\nu_0 + D + 2}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_0 \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) - \frac{\kappa_0}{2}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{m}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{m}_0)\right) \tag{2.82}$$

(a) Derive the MAP estimate for $\boldsymbol{\mu}_k$ and $\boldsymbol{\Sigma}_k$.

(b) Derive the MAP estimate for $\boldsymbol{\mu}_k$ and $\boldsymbol{\Sigma}_k$ if we use an uninformative prior.

Exercise 2.3 (Gaussian-inverse-Wishart prior)

Consider a mixture of K Gaussians with D-dimensional observations. Let $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_K)$ be the mixing weights, and let $\boldsymbol{\mu}_k \in \mathbb{R}^D$ and $\boldsymbol{\Sigma}_k \in \mathbb{R}^{D \times D}$ be the mean and covariance of cluster k. Let $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_K, \boldsymbol{\Sigma}_K)$ be the parameters of the model.

Assume we have a Gaussian-inverse-Wishart prior on $\boldsymbol{\mu}_k$ and $\boldsymbol{\Sigma}_k$:

$$\mathrm{NIW}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} \mid \boldsymbol{m}_0, \kappa_0, \nu_0, \boldsymbol{S}_0) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{m}_0, \frac{1}{\kappa_0}\boldsymbol{\Sigma}) \mathrm{IW}(\boldsymbol{\Sigma} \mid \nu_0, \boldsymbol{S}_0) \tag{2.83}$$

$$\propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{\nu_0 + D + 2}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_0 \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) - \frac{\kappa_0}{2}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{m}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{m}_0)\right) \tag{2.84}$$

(a) Derive the MAP estimate for $\boldsymbol{\mu}_k$ and $\boldsymbol{\Sigma}_k$.

(b) Derive the MAP estimate for $\boldsymbol{\mu}_k$ and $\boldsymbol{\Sigma}_k$ if we use an uninformative prior.

Es fragt sich nun, wie sind derartige Functionen zu bestimmen?

Die Functonalgleichung für ω ist

$$\omega(\varphi_1(\xi)) = \omega(\varphi_2(\xi)),$$

also auch

$$\omega(\xi) = \omega(\varphi_3(\varphi_1(\xi)) = \omega(\tau(\xi))$$

wenn

$$\varphi_2(\varphi_1(\xi)) = \tau(\xi)$$

gesetzt wird.

Ich bilde folgende Functionenreihe:

$$\xi = \tau^0(\xi), \quad \tau^1(\xi) = \tau(\xi)), \quad \tau^2(\xi) = \tau(\tau(\xi)) \ldots \tau^n(\xi) = \tau(\tau^{n-1}(\xi)) \ldots$$
$$\tau^{-1}(\xi), \quad \tau^{-2}(\xi) \ldots \tau^{-n}(\xi) \ldots$$

wo $\tau^{-1}(\xi)$ bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\tau(\tau^{-1}(\xi)) = \xi \quad \text{und} \quad \tau^{-n}(\xi) = \tau^{-1}(\tau^{-n+1}(\xi)).$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, entweder ist die Anzahl der so gebildeten und von einander verschiedenen Functionen eine endliche oder nicht. Damit der erste Fall eintrete muss irgend eine Gleichung bestehen von der Form

$$\tau^\nu(\xi) = \tau^{-\mu}(\xi),$$

ist dies der Fall, so ist ersichtlich, dass irgend eine symmetrische Function sämtlicher von einander unterschiedenen Functionen τ eine der gesuchten Functionen ω ist, man wird aber unendliche viele algebraische Functionen herstellen können, die der Functionalgleichung genügen.

Ist dies jedoch nicht der Fall, existiren aber unendlich viele von einander verschiedene Functionen τ, so wird man auch hier, um ω zu erhalten, aus diesen unendlich vielen Elementen eine symmetrische und convergente Function bilden müssen. Es werden aber nur transcendente Functionen bestehen, die der Functionalgleichung genügen.

Abgesehen davon, dass man diese Reihe nur anwenden kann, wenn nur einer Functionalgleichung zu genügen ist, wird die Aufstellung derselben schon im allgemeinen unüberwindliche Schwierigkeiten darbieten, da es bei einer wenig complicirten Function schwer, oft unmöglich sein wird, das $n$te Glied der Reihe in independenter Form darzustellen.

Wir verlassen mithin diese Reihe vollständig und suchen aus schon bekannten Functionen die ω darzustellen.

the Dirac field $\psi(x)$ and the electromagnetic field $A_\mu(x)$ are given by Eqs. (2.1) and (2.2). Then the Hamiltonian density $\mathcal{H}$ is given by

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}, \tag{2.3}$$

where

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right) + \bar{\psi}\left(-i\gamma\cdot\nabla + M\right)\psi + \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right), \tag{2.4}$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu + g\phi\bar{\psi}\psi. \tag{2.5}$$

Here π is the momentum conjugate to ϕ, and E and B are the electric and magnetic fields. The Hamiltonian H is obtained by integrating $\mathcal{H}$ over all space. The Hamiltonian H_0 is obtained by integrating $\mathcal{H}_0$ over all space. The Hamiltonian H_{int} is obtained by integrating $\mathcal{H}_{\text{int}}$ over all space. The Hamiltonian H is then given by

$$H = H_0 + H_{\text{int}}. \tag{2.6}$$

The Hamiltonian H_0 is the Hamiltonian for the free fields. The Hamiltonian H_{int} is the Hamiltonian for the interaction between the fields. The Hamiltonian H is the Hamiltonian for the interacting fields.

The Hamiltonian H_0 is the Hamiltonian for the free fields. The Hamiltonian H_{int} is the Hamiltonian for the interaction between the fields. The Hamiltonian H is the Hamiltonian for the interacting fields.

The Hamiltonian H_0 is the Hamiltonian for the free fields. The Hamiltonian H_{int} is the Hamiltonian for the interaction between the fields. The Hamiltonian H is the Hamiltonian for the interacting fields.

The Hamiltonian H_0 is the Hamiltonian for the free fields. The Hamiltonian H_{int} is the Hamiltonian for the interaction between the fields. The Hamiltonian H is the Hamiltonian for the interacting fields.

$$(\alpha - m)c + \gamma d = 0 \qquad \alpha a + \gamma b = m(a + \lambda c)$$
$$\beta c + (\delta - m)d = 0 \qquad \alpha a + \delta b = m(b + \lambda d)$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt zur Bestimmung von m die quadratische Gleichung:

$$(\alpha - m)(\delta - m) - \beta\gamma = 0$$

ferner ist:

$$\frac{c}{d} = -\frac{\gamma}{\alpha - m} = -\frac{\delta - m}{\beta} = \frac{(\alpha - m)a + \gamma b}{\beta a + (\delta - m)b},$$

hieraus folgt zur Bestimmung von a und b:

$$((\alpha - m)^2 + \beta\gamma)a + \gamma(\alpha + \delta - 2m)b = 0$$

oder da

$$\beta\gamma = (\alpha - m)(\delta - m)$$

$$\{\alpha + \delta - 2m\}\{(\alpha - m)a + \gamma b\} = 0.$$

Da nun $\frac{a}{b}$ nicht gleich $\frac{c}{d}$ sein darf, so muss

$$\alpha + \delta - 2m = 0$$

sein, also

$$m = \frac{\alpha + \delta}{2}.$$

Dieser Wert in die Bestimmungsgleichung für m eingesetzt, giebt:

$$(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0.$$

Besteht also zwischen den Coefficienten der Substitution die Gleichung:

$$(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0,$$

d. h. sind die beiden Wurzeln der Gleichung

$$(\alpha - m)(\delta - m) - \beta\gamma = 0$$

einander gleich, so lässt sich stets eine Function $\tau(\xi)$ aufstellen, so dass

$$\tau\left(\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}\right) = \tau(\xi) + \lambda$$

ist; also ist ω eine Function von $\tau(\xi)$ mit der Periode λ. Diese Periode wird aus den beiden noch vollständig willkürlichen Grössen a und b bestimmt.

2) Diese Bedingungsgleichung finde nicht statt, die Gleichung

$$m^2 - (\alpha + \delta)m + \alpha\delta - \beta\gamma = 0$$

Proof. Suppose L is regular. Then there is a DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ such that $L = L(M)$. Define a relation R_M on Σ^* by

$$x R_M y \text{ if and only if } \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y).$$

Then R_M is an equivalence relation on Σ^* with finitely many equivalence classes, at most one for each state in Q.

Now suppose R_M is right invariant. Then for all $x, y \in \Sigma^*$ and $a \in \Sigma$,

$$x R_M y \text{ implies } xa R_M ya.$$

Finally, suppose R_M has finitely many equivalence classes and L is a union of some of these classes. Define a DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ as follows:

Q = the set of equivalence classes of R_M

q_0 = the equivalence class containing λ

F = the set of equivalence classes that contain strings in L

$\delta([x], a) = [xa]$ for all $[x] \in Q$ and $a \in \Sigma$

The last definition is unambiguous because R_M is right invariant. Then $L = L(M)$, so L is regular. ∎

Theorem 10.2 (Myhill–Nerode Theorem). *A language L is regular if and only if there is a right invariant equivalence relation on Σ^* with finitely many equivalence classes, one of which is L.*

Proof. Suppose L is regular. Then there is a DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ such that $L = L(M)$. Define a relation R_M on Σ^* by

$$x R_M y \text{ if and only if } \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y).$$

Then R_M is an equivalence relation on Σ^* with finitely many equivalence classes, at most one for each state in Q.

Now suppose R_M is right invariant. Then for all $x, y \in \Sigma^*$ and $a \in \Sigma$,

$$x R_M y \text{ implies } xa R_M ya.$$

Finally, suppose R_M has finitely many equivalence classes and L is a union of some of these classes. Define a DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ as follows:

Q = the set of equivalence classes of R_M

q_0 = the equivalence class containing λ

F = the set of equivalence classes that contain strings in L

$\delta([x], a) = [xa]$ for all $[x] \in Q$ and $a \in \Sigma$

The last definition is unambiguous because R_M is right invariant. Then $L = L(M)$, so L is regular. ∎

Theorem 10.3 (Myhill–Nerode Theorem). *A language L is regular if and only if there is a right invariant equivalence relation on Σ^* with finitely many equivalence classes, one of which is L.*

Proof. Suppose L is regular. Then there is a DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ such that $L = L(M)$. Define a relation R_M on Σ^* by

$$x R_M y \text{ if and only if } \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y).$$

Then R_M is an equivalence relation on Σ^* with finitely many equivalence classes, at most one for each state in Q.

Now suppose R_M is right invariant. Then for all $x, y \in \Sigma^*$ and $a \in \Sigma$,

$$x R_M y \text{ implies } xa R_M ya.$$

Finally, suppose R_M has finitely many equivalence classes and L is a union of some of these classes. Define a DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ as follows:

Q = the set of equivalence classes of R_M

q_0 = the equivalence class containing λ

F = the set of equivalence classes that contain strings in L

$\delta([x], a) = [xa]$ for all $[x] \in Q$ and $a \in \Sigma$

The last definition is unambiguous because R_M is right invariant. Then $L = L(M)$, so L is regular. ∎

Wären die Coefficienten dieser Gleichungen von null verschieden, so würde man erhalten $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\tau(\xi)$ würde sich also auf eine Constante reduciren, es ist mithin:

$$(\alpha - \lambda)^2 + \gamma\beta + m^2\lambda^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta)$$

also

$$m\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{-((\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma)}$$

also reell.

Sind m und λ so bestimmt, so lassen sich zwei Gleichungen des Systems aus den beiden anderen ableiten, es bleiben mithin noch 2 übrig. und aus diesen folgt:

$$c = \frac{(\alpha-\delta)a + 2\gamma b}{m(\alpha+\delta)}, \qquad d = \frac{2\beta a + (\delta-\alpha)b}{m(\alpha+\delta)}$$

mithin:

$$\tau(\xi) = \sqrt{-((\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma)} \cdot \frac{a\xi + b}{((\alpha-\delta)a + 2\gamma b)\xi + 2\beta a + (\delta-\alpha)b}$$

Ist $\tau(\xi)$ so bestimmt, so ist

$$\operatorname{arc\,tg}\tau\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right) = \operatorname{arc\,tg}\tau(\xi) + \operatorname{arc\,tg} m.$$

Nimmt man nun irgend eine periodische Function von $\operatorname{arc\,tg}\tau(\xi)$ mit der Periode $\operatorname{arc\,tg} m$, so ist diese Function das gesuchte ω.

Wir haben für $\tau(\xi)$ stets eine lineare gebrochene Fuuction gesetzt, es liegt die Frage nahe, ob es nicht noch gebrochene Functionen höherer Geraden giebt, die den obigen Bedingungen genügen?

Stellt man die Bedingungsgleichung für die Coefficienten einer solchen Function auf, so erkennt man dass allen Bedingungen stets genügt werden kann; eine eingehendere Untersuchung jedoch ergiebt, dass Zähler und Nenner so viele gemeinsame Factoren besitzen, um auch in diesem Falle $\tau(\xi)$ auf eine lineare gebrochene Function zu reduciren.

Teil II. Anwendungen.

Die soeben entwickelte Theorie lässt sich direct und ohne grosse Schwierigkeiten anwenden auf viele Probleme der Analysis und der mathematischen Physik, da bei allen diesen Anwendungen nur darauf zu achten ist, dass auch den Stetigkeitsbedingungen genügt wird.

Sind z. B. Functionen zu bestimmen, die stetig sind in der ganzen unendlichen Ebene mit Ausnahme des Unendlichkeitspunktes und der von einer oder mehreren Curven umgebenen Fläche, so genügt man den Stetigkeitsbedingungen meistenstenteils schon dadurch, dass man von allen Functionen, die constant sind auf den Begrenzungscurven und die die gegebene Unstetigkeit in der Unendlichkeit besitzen, diejenige auswählt, die den bestimmten constanten Wert nur auf diesen Grenzcurven besitzt.

Anders jedoch stellt sich die Sache, wenn Functionen zu bestimmen sind, die den bestimmten constanten Wert auf einer Curve besitzen, in derem Innern sie in bestimmten Punkten unstetig werden sollen. Die Functionen $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$, die wir durch Auflösung einer Gleichung $n$ten Grades gefunden haben, sind hier, direct wenigstens, meistenteils nicht anzuwenden, da sie gewöhnlich im Innern der Fläche in gewissen Linien oder Punkten endliche Unstetigkeiten besitzen werden, oder vielmehr, da sie im Innern der Fläche gewisse Linien nicht überschreiten dürfen, wenn sie am Rande der Fläche mit dem vorgeschriebenen Werte ankommen sollen. Man wird in diesem Falle zurückgehen müssen auf die im ersten Paragraphen gegebene Methode und versuchen, die Gleichung der Begrenzung darzustellen in der Form:

$$\chi(\xi) + \chi(\eta) = \alpha,$$

bei weiteren Rechnungen sind alsdann nur die Functionen $\chi(\xi)$ und $\chi(\eta)$ anzuwenden.

Als specielle Anwendungen werde ich, um den Umfang dieser Abhandlung nicht zu sehr anwachsen zu lassen, nur zwei Beispiele geben.

§. 1.

Die Gleichgewichtsverteilung der Elektricität auf zwei unendlich grossen Cylindern mit kreisförmiger Basis.

Diese Verteilung ist durch die Potentialfunction vollständig bestimmt. Diese Function muss den bekannten Stetigkeitsbedingungen genügen und constant sein auf der Peripherie beider Kreise.

Die Gleichungen der beiden Kreise seien:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad (x-a)^2 + y^2 = \varrho^2$$

oder in ξ und η ausgedrückt:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \eta \, dx = 0.$$

Since η is arbitrary, it follows from the fundamental lemma that the curve y must satisfy the differential equation

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{1}$$

This is the *Euler equation* for the integral $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \, dx$. Expanding the derivative $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$, we may write the Euler equation in the form

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0. \tag{2}$$

Any curve which satisfies the Euler equation is called an *extremal*. Thus, in order that a curve y may furnish a solution to the problem of minimizing the integral $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \, dx$, it is necessary that y be an extremal. Whether or not an extremal actually furnishes a minimum depends on the sign of the second variation $\delta^2 I$. We shall not discuss this question here.

Example 1. Find the extremals of the integral

$$\int_{x_0}^{x_1} (y'^2 - y^2) \, dx.$$

Here $F = y'^2 - y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$, and the Euler equation is

$$-2y - 2y'' = 0, \quad \text{or} \quad y'' + y = 0.$$

The extremals are the curves $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Example 2. Find the extremals of the integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} \, dx.$$

Here $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{y\sqrt{1 + y'^2}}$, and the Euler equation is

$$-\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y^2} - \frac{y''}{y\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{y'^2}{y\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

Multiplying by $y\sqrt{1 + y'^2}$, we obtain

$$-\frac{1 + y'^2}{y} - y'' + \frac{y'^2}{y} = 0, \quad \text{or} \quad y'' + \frac{1}{y} = 0.$$

Multiplying by $2y'$, we obtain

$$2y'y'' + \frac{2y'}{y} = 0, \quad \text{or} \quad \frac{d}{dx}(y'^2 + \log y^2) = 0.$$

Hence

$$y'^2 + \log y^2 = c_1.$$

Solving for y', we obtain

$$y' = \sqrt{c_1 - \log y^2}.$$

Separating the variables, we obtain

$$\frac{dy}{\sqrt{c_1 - \log y^2}} = dx.$$

Integrating, we obtain

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - \log y^2}} = x + c_2.$$

The extremals are the curves defined by this equation.

$$\sin\left(\tau(\xi)+\frac{\varrho}{r+\varrho}\pi\right)\sin\left(\tau(\eta)+\frac{\varrho}{r+\varrho}\pi\right)-\sin\tau(\xi)\,.\,\sin\tau(\eta)=0.$$

Es besteht aber folgende Gleichung:

$$\sin(x+\alpha)\sin(y+x)-\sin x\,.\,\sin y=\sin\alpha\sin(x+y+\alpha),$$

mithin ist $u=\alpha$ auf dem Curvensystem:

$$\tau(\xi)+\tau(\eta)+\frac{\varrho}{r+\varrho}\pi=n\pi$$

oder x und y eingeführt auf dem Curvensystem:

$$\left(x-\frac{n(r+\varrho)r}{n(r+\varrho)-\varrho}\right)^2+y^2=\left(\frac{r\,.\,\varrho}{n(r+\varrho)-\varrho}\right)^2.$$

Da n jede beliebige Zahl sein darf, so stellt diese Gleichung unendlich viele Kreise dar. Die Entfernung der Mittelpunkte vom Nullpunkte sei e_n und die Radien seien R_n, so ist

$$e_0=0 \qquad R_0=r$$

und

$$e_1=r+\varrho \qquad R_1=\varrho$$

diese beiden Kreise sind die gegebenen.

Ferner ist, wenn n positiv:

$$e_n=\frac{n(r+\varrho)r}{n(r+\varrho)-\varrho} \quad \text{und} \quad R_n=\frac{r\,.\,\varrho}{n(r+\varrho)-\varrho}$$

also

$$e_n-R_n=r.$$

Da, wenn $n>1$, $R_n<\varrho$ ist, so liegen diese Kreise sämtlich im Innern des zweiten Kreises, und ihre Peripherien gehen durch den Berührungspunkt.

Ist n negativ, so ist

$$e_n+R_n=r$$

die Mittelpunkte liegen also in dem ersten Kreise und ihre Peripherien gehen ebenfalls durch den Berührungspunkt. Für

$$n=\pm\infty \quad \text{ist} \quad e=r \quad \text{und} \quad R=0.$$

Alle diese Kreise sind also eingeschlossen von den beiden gegebenen; wenn wir mithin die beiden gegebenen Kreise als Grenze des äusseren Raumes auffassen, so ist u im äusseren Raume nur auf der Grenze gleich α.

Digitized by Google

In der Unendlichkeit wird u unendlich wie der Logarithmus der Entfernung, die übrigen Unstetigkeitspunkte liegen im Innern der Kreise, wenn man den Berührungspunkt, wie es in diesem Falle auch sein muss, zu den inneren Punkten rechnet. Uebrigens kann u in dem Berührungspunkt keinen anderen Wert besitzen als α, dies erkennt man leicht, wenn u durch x und y ausgedrückt wird.

Es ist

$$u-\alpha = k.\log \frac{\cos(\tau(\xi)+\tau(\eta)) - \cos(\tau(\xi)-\tau(\eta))}{\cos\left(\tau(\xi)+\tau(\eta)+\frac{2\varrho\pi}{r+\varrho}\right) - \cos(\tau(\xi)-\tau(\eta))}$$

also

$$u-\alpha = k\log \frac{\cos\mu\frac{x-r}{v} - \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\mu y}{v}} + e^{-\frac{\mu y}{v}}\right)}{\cos\mu\left(\frac{x-r}{v}+\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\mu y}{v}} + e^{-\frac{\mu y}{v}}\right)}$$

wo

$$\mu = \frac{2r\varrho\pi}{r+\varrho}; \quad v = (x-r)^2+y^2$$

Diese Function ist, wie man leicht erkennt, vollständig eindeutig bestimmt bis auf den Berührungspunkt, hier kann u jeden beliebigen Wert annehmen und dieser Wert wird abhangen von dem Wege auf dem man zu dem Berührungspunkte gelangt. Da man aber von einem hinreichend nahen Punkte des äusseren Raumes zu dem Berührungspunkte nur auf der geraden Linie $x = r$ gelangen kann, so wird in ihm die Exponentialgrösse unendlich gross, das Argument des Logarithmus also gleich 1 und mithin $u = \alpha$.

2) Die beiden Kreise liegen von einander getrennt und es sei $a > r+\varrho$.

Die beiden Wurzeln m_1 und m_2 sind reell, mithin ist zu setzen, da für $\xi = \infty$, $\log\tau(\xi) = 0$ werden soll:

$$\tau(\xi) = \frac{a\xi-(r^2-m_1)}{a\xi-(r^2-m_2)} = 1+\frac{m_1-m_2}{a\xi-(r^2-m_2)}$$

es wird

$$\tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right) = \frac{ar^2-(r^2-m_1)\xi}{ar^2-(r^2-m_2)\xi} = \frac{r^2-m_1}{r^2-m_2}\cdot\frac{1}{\tau(\xi)}$$

demnach:

$$u-\alpha = k\log\frac{\sin(\nu\log\tau(\xi))\sin(\nu\log\tau(\eta))}{\sin(\nu\log(h\tau(\xi)))\sin(\nu\log(h\tau(\eta)))}$$

wo

$$\nu = \pi:\log\frac{m_1}{m_2}; \qquad h = \frac{r^2-m_2}{r^2-m_1}$$

Zunächst erkennt man, dass u in der Unendlichkeit unendlich wird wie der Logarithmus der Entfernung, es wird gleich a auf den Curven:

$$\frac{a\xi - (r^2 - m_1)}{a\xi - (r^2 - m_2)} \cdot \frac{a\eta - (r^2 - m_1)}{a\eta - (r^2 - m_2)} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^n,$$

es sei

$$\frac{m_1}{m_2} = k$$

so stellt diese Gleichung die unendlich vielen Kreise dar:

$$(x - e_n)^2 + y^2 = R_n^2$$

wo

$$e_n = \frac{(1 - k^n) a r^2}{(r^2 - m_2) - k^n \cdot (r^2 - m_1)}$$

und

$$R_n^2 = e_n^2 - \frac{r^2 + \varrho^2 - a^2}{a} e_n + r^2.$$

Es ist also

$$e_0 = 0 \quad \text{und} \quad R_0 = r,$$

ferner

$$e_1 = a \quad \text{und} \quad R_1 = \varrho.$$

Dieses sind die beiden gegebenen Kreise, diese schliessen ebenso wie im vorigen Falle sämtliche übrigen ein.

Diese soeben aufgestellte Function u hat denselben constanten Wert auf der Peripherie beider Kreise, das ist offenbar nicht der allgemeinste Fall, es kann auch u auf den Peripherien einen verschiedenen Wert besitzen. Um eine solche Function zu erhalten, ist zu u noch der Ausdruck $A \log \tau(\xi) \cdot \tau(\eta)$ zu addiren oder

$$A \cdot \log \frac{(ax - (r^2 - m_1))^2 + a^2 y^2}{(ax - (r^2 - m_2))^2 + a^2 y^2}$$

Dieser Ausdruck ist unstetig nur in den Punkten

$$x = \frac{r^2 - m_1}{a}, \quad y = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{r^2 - m_2}{a}, \quad y = 0,$$

also in Punkten, die innerhalb der beiden Kreise liegen. Ferner wird derselbe auf der Peripherie des ersten Kreises gleich $A \cdot \log \frac{r^2 - m_1}{r^2 - m_2}$ und auf der des zweiten, also wenn

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 - a^2 + 2ax$$

gesetzt wird, gleich $A \cdot \log \frac{a^2 - (r^2 - m_1)}{a^2 - (r^2 - m_2)}$, auf beiden also constant.

In der Unendlichkeit wird er null.

Digitized by Go

Um nun u im allgemeinsten Falle aufzustellen, setze ich:

$$\frac{(ax-(r^2-m_1)^2+a^2y^2}{(ax-(r^2-m_2))^2+a^2y^2} = \tau$$

und

$$\frac{2(m_2-m_1)y(a(x^2+y^2)-2(r^2-(m_1+m_2))x+ar^2)}{(a(x^2+y^2)-(2r^2-(m_1+m_2))x^2+ar^2)^2-(m_2-m_1)^2y^2} = \omega,$$

so ist

$$u-\alpha = A\log\tau + k\log\frac{\cos(\nu\log\tau)-\frac{1}{2}(e^{\nu\omega_1}+e^{-\nu\omega_1})}{\cos(\nu\log h^2\tau)-\frac{1}{2}(e^{\nu\omega_1}+e^{-\nu\omega_1})}$$

wo

$$\nu = \pi : \log\frac{m_1}{m_2}; \quad h = \frac{r^2-m_2}{r^2-m_1}; \quad \omega_1 = \operatorname{arc\,tg}\,\omega$$

Die 3 noch willkürlichen Constanten, die in dieser Formel auftreten, werden bestimmt durch die Werte die u auf den beiden Kreisen und in der Unendlichkeit annehmen soll. Ist die Gesamtmasse der Elektricität gleich null, so ist auch $k = 0$, also

$$u-\alpha = A\log\tau.$$

Der Ausdruck für u enthält noch zwei vieldeutige Functionen den Logarithmus und den Arcus tangens. Der Logarithmus muss, da u reell ist, ebenfalls reell sein, also ist er eindeutig bestimmt. Anders der Arcus tangens. Zunächst ist klar, dass man an Stelle von arc tg ω setzen kann

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{(m_2-m_1)y}{a\left\{\left(x-\frac{r^2+a^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+y^2-\frac{(r^2+a^2-\varrho^2)^2-4a^2r^2}{4a^2}\right\}} = 2\varphi+2n\pi,$$

wenn φ der Winkel ist, den die beiden Verbindungslinien der Punkte

$$x = \frac{r^2-m_1}{a}, \quad y = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{r^2-m_2}{a}, \quad y = 0$$

mit dem Punkte xy bilden. Da u in der Unendlichkeit logarithmisch unendlich werden soll, so muss $\operatorname{arc\,tg}\,\omega = 0$ für $\xi = \infty$ sein, hieraus folgt, dass $n = 0$ sein muss, mithin ist auch der Arcus tangens eindeutig bestimmt.

Streng genommen, müsste φ in der für y positiven Halbaxe das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, wie in der für y negativen, wir können aber, da der Wert von u hierdurch nicht geändert wird, festsetzen, dass φ stets das positive Vorzeichen besitze.

Digitized by Google

Ebenso wie ω hat auch τ eine leicht zu übersehende geometrische Bedeutung. Es seien R_1 und R_2 die Entfernungen des Punktes xy von den beiden Punkten

$$x = \frac{r^2 - m_1}{a}, \quad y = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{r^2 - m_2}{a}, \quad y = 0,$$

so ist

$$\tau = \frac{R_1^2}{R_2^2},$$

also lässt sich u schliesslich schreiben:

$$u - \alpha = 2A \log \frac{R_1}{R_2} + k \log \frac{\cos\left(2\nu \log \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{1}{2}(e^{2\nu\varphi} + e^{-2\nu\varphi})}{\cos\left(2\nu \log \frac{R_1}{hR_2}\right) - \frac{1}{2}(e^{2\nu\varphi} + e^{-2\nu\varphi})}$$

Die Unstetigkeitspunkte der Function u liegen sämtlich auf der X Achse und innerhalb der beiden Kreise mit Ausnahme des Unendlichkeitspunktes. Wird $a = r + \varrho$, also $m_1 = m_2$, so geht die Function, wie man sich leicht überzeugen kann, über in die für zwei sich berührende Kreise entwickelte Potentialfunction.

Liegen die beiden Kreise in einander, so lässt sich die Potentialfunction leicht aus der obigen ableiten.

3) Die beiden Kreise mögen sich schneiden, also

$$r + \varrho > a > r - \varrho.$$

Es ist mithin $4r^2\varrho^2 - (r^2 + \varrho^2 - a^2)^2$ eine positive Grösse, sie sei gleich λ^2, ferner sei

$$m = \frac{\lambda}{r^2 + \varrho^2 - a^2},$$

so setze ich, damit für $\xi = \infty$ $\tau(\xi) = 0$ wird:

$$\tau(\xi) = \frac{\lambda}{2a\xi - (a^2 + r^2 - \varrho^2)},$$

also

$$u - \alpha = k \log \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau(\xi)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau(\eta)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\operatorname{arc\,tg} m} \operatorname{arc\,tg} \tau \frac{r^2}{\eta}\right)}$$

Nun ist

Digitized by Go

$$\operatorname{arc\,tg}\,\tau\left(\frac{r^2}{\xi}\right) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda\xi}{2ar^2-(a^2+r^2-\varrho^2)\,\xi}$$

$$= -\left\{\operatorname{arc\,tg}\,\tau(\xi)+\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{a^2+r^2-\varrho^2}\right\}.$$

und

$$\operatorname{arc\,tg}\,\tau(\xi)+\operatorname{arc\,tg}\,\tau(\eta)$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda(2a(\xi+\eta)-2(a^2+r^2-\varrho^2))}{4a^2\left(\xi-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)\left(\eta-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)-\lambda^2}$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)}{a\left[\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+y^2-\frac{\lambda^2}{4a^2}\right]}$$

Ferner ist

$$\operatorname{arc\,tg}\,\tau(\xi)-\operatorname{arc\,tg}\,\tau(\eta)$$

$$= -\operatorname{arc\,tg}\frac{4\lambda a y.i}{4a^2\left\{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+y^2+\frac{\lambda^2}{4a^2}\right\}}$$

$$= \tfrac{1}{2}i.\log\frac{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+\left(y-\frac{\lambda}{2a}\right)^2}{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

Es sei nun

$$\tau = \frac{\lambda}{a}\,\frac{x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}}{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+y^2-\frac{\lambda^2}{4a^2}}$$

und

$$\omega = \frac{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+\left(y-\frac{\lambda}{2a}\right)^2}{\left(x-\frac{a^2+r^2-\varrho^2}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

so wird

$$u-\alpha = k\log\frac{\cos(2\nu_1\operatorname{arc\,tg}\tau)-\frac{1}{2}(e^{\nu_1\log\omega}+e^{-\nu_1\log\omega})}{\cos(2\nu_1(\operatorname{arc\,tg}\tau+2A))-\frac{1}{2}(e^{\nu_1\log\omega}+e^{-\nu_1\log\omega})}$$

wo

$$\nu_1 = \pi:2\operatorname{arc\,tg}m\,; \qquad A = \operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{a^2+r^2-\varrho^2}$$

In der Unendlichkeit wird $\tau = 0$, mithin muss, da der Cosinus gleich 1 werden soll, arc tg $= 0$ für $\tau = 0$ sein. Der Arc tg wird sich also, da τ erst unendlich wird auf der Peripherie des Kreises

Digitized by Google

$\left(x - \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4a^2}$, eines Kreises, der sich nicht im äusseren Raume befindet, stets in dem Intervall $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ befinden. Hieraus ergeben sich auch sofort die Werte, die $\operatorname{arc\,tg} m$ und $\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2}$ anzunehmen haben.

In der Tat, u soll $= \alpha$ sein auf den beiden gegebenen Kreisen; setzt man $x^2 + y^2 = r^2$, so wird $\tau = -\frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2}$; die beiden Cosinuse müssen aber einander gleich werden, dies kann nur dann geschehen, wenn auch $\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2}$ sich in dem Intervalle $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ befindet.

Setzt man

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 + 2ax - a^2,$$

so wird

$$\tau = \frac{\lambda}{a^2 + \varrho^2 - r^2}.$$

Nun ist aber

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + \varrho^2 - r^2} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{r^2 + \varrho^2 - a^2}$$
$$= -\operatorname{arc\,tg} m$$

demnach muss damit in diesem Falle die beiden Cosinuse einander gleich werden $\operatorname{arc\,tg} m$ durch die obige Gleichung bestimmt sein, also ist auch $\operatorname{arc\,tg} m$ eindeutig bestimmt.

Ich gehe nun über zu der geometrischen Bedeutung der in $u - \alpha$ vorkommenden Functionen.

Es ist $\frac{\lambda}{a}$ die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise, die Entfernung des Schnittpunktes dieser Sehne mit der Centralen vom Nullpunkte ist $\frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}$, und seine Entfernung vom Mittelpunkte des zweiten Kreises $\frac{a^2 + \varrho^2 - r^2}{2a}$.

Verbindet man den Punkt xy mit den beiden Schnittpunkten der beiden Kreise, so ist der Winkel, den diese beiden Verbindungslinien miteinander bilden $\varphi = \operatorname{arctg} \tau$, wo φ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem τ positiv oder negativ ist.

Ferner sei

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{a^2 + r^2 - \varrho^2} \quad \text{und} \quad \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{a^2 + \varrho^2 - r^2},$$

so sind α und β die Winkel den die Centrale mit den beiden Linien bildet, die einen der Schnittpunkte mit den beiden Mittelpunkten verbindet; sie müssen immer spitze Winkel sein und haben das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem das Argument ihres Arcus tangens positiv oder negativ ist.

Die Unstetigkeitspunkte, die die Function besitzt, können, wie man leicht besonders unter Zuhülfenahme der geometrischen Anschauung findet, niemals ausserhalb der beiden Kreise liegen, folglich ist auch die Function u selbst in dem allein zu betrachtenden Raume eindeutig und stetig. Natürlich ist hierbei der Unendlichkeitspunkt ausgenommen.

Während die Niveaucurven, also die Curven $u = \text{Const}$ bei den bisher betrachteten Functionen stets transcendente Curven sind, können bei dieser Function auch algebraische Curven auftreten, die einzige Bedingung dafür ist die, dass das Verhältniss $\pi : \operatorname{arc\,tg} m$ eine rationale Zahl ist. Der erste hierher gehörende Fall ist der, dass sich die beiden Kreise rechtwinklig schneiden, alsdann ist nämlich $\operatorname{arc\,tg} m = \frac{\pi}{2}$:

Zur weiteren Berechnung wende ich die Formel an bei der x und y noch nicht eingeführt ist.

Es ist in diesem Falle

$$\tau(\xi) = \frac{r\varrho}{a\xi - r^2}$$

ferner ist

$$\sin(2 \operatorname{arc\,tg} \tau(\xi)) = \frac{2\tau(\xi)}{1 + \tau^2(\xi)} = \frac{2r\varrho(a\xi - r^2)}{r^2\varrho^2 + a^2\varrho^2 - 2ar^2\xi + r^4}$$

$$= \frac{2r\varrho(a\xi - r^2)}{\{(a\xi - r^2)\xi + r^2(a - \xi)\}a}$$

da

$$a^2 = r^2 + \varrho^2 \quad \text{ist.}$$

Demnach wird

$$u - \alpha = k \log \frac{(a\xi - r^2)\,(a\eta - r^2)}{\xi\eta(\xi - a)(\eta - a)}$$

$$= k \log \frac{a^2\left(\left(x - \frac{r^2}{a}\right)^2 + y^2\right)}{(x^2 + y^2)((x - a)^2 + y^2)}$$

Digitized by Go

Art. 4 Abs. 1 Bst. a, Abs. 2 Bst. a, Abs. 3 Bst. a, Abs. 4 Bst. a, Abs. 5 Bst. a und Abs. 6 Bst. a

Fassung gemäss Ziffer II des Gesetzes vom 17. Juni 2016, in Kraft seit 1. Januar 2019 (AS 2018 3585; BBl 2015 8387)

Fassung gemäss Ziffer II des Gesetzes vom 29. September 2017, in Kraft seit 1. Januar 2019 (AS 2018 3585; BBl 2017 5465)

Art. 4 Abs. 1 Bst. a, Abs. 2 Bst. a, Abs. 3 Bst. a, Abs. 4 Bst. a, Abs. 5 Bst. a und Abs. 6 Bst. a

Fassung gemäss Ziffer II des Gesetzes vom 17. Juni 2016, in Kraft seit 1. Januar 2019 (AS 2018 3585; BBl 2015 8387)

Art. 4 Abs. 1 Bst. a, Abs. 2 Bst. a, Abs. 3 Bst. a, Abs. 4 Bst. a, Abs. 5 Bst. a und Abs. 6 Bst. a

Fassung gemäss Ziffer II des Gesetzes vom 29. September 2017, in Kraft seit 1. Januar 2019 (AS 2018 3585; BBl 2017 5465)

In der Steuerverfügung berechnete Steuerbeträge sind zu runden:

Art. 4 Abs. 1 Bst. a, Abs. 2 Bst. a, Abs. 3 Bst. a, Abs. 4 Bst. a, Abs. 5 Bst. a und Abs. 6 Bst. a

Fassung gemäss Ziffer II des Gesetzes vom 17. Juni 2016, in Kraft seit 1. Januar 2019 (AS 2018 3585; BBl 2015 8387)

$$\frac{v-\beta}{i} = \chi(\xi) + \chi(\varphi(\xi)) - \chi(\eta) - \chi(\varphi(\eta)),$$

so sind die Bedingungen 1), 2); 3) erfüllt.

Um der Bedingung 4) Rechnung zu tragen, sind zunächst die Functionen $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$ zu untersuchen. Diese Functionen sind Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades die auf der Grenze der Platte übergehen müssen in η oder ξ. D. h. wenn

$$\varphi(\xi) = A + iB$$

ist, so muss auf der Grenze der Platte $A = x$ und $B = -y$ werden. Im allgemeinen wird aber dieses nur stattfinden, wenn A und B im Innern der Platte gewisse Linien nicht überschreiten. Bleiben A und B stetig, so werden sie, wenn diese Linien von ihnen überschritten sind, im allgemeinen mit einem andern Werte als dem verlangten an der Grenze ankommen, oder aber sie müssten auf diesen Linien einen Sprung machen, dessen Grösse abhängig ist von dem Orte.

Bei der Ellipse z. B. ist die Brennlinie, oder die Verbindungslinie der beiden Brennpunkte eine solche Unstetigkeitslinie.

Ist dies der Fall, so kann man die Function $\varphi(\xi)$ und also auch die obigen Formeln direct nicht anwenden. Lässt sich jedoch die Gleichung der Begrenzung schreiben in der Form:

$$\omega(\xi) \cdot \omega(\eta) + a(\omega(\xi) + \omega(\eta)) + b = 0,$$

wo ω eine rationale Function bedeutet, so kann man setzen:

$$u - \alpha = \Sigma_\lambda m_\lambda \log(\omega(\xi) - \alpha_\lambda)(\omega(\eta) - \alpha_\lambda) \times \left(\frac{b + a\,\omega(\xi)}{a + \omega(\xi)} + \alpha_\lambda\right)\left(\frac{b + a\omega(\eta)}{a + \omega(\eta)} + \alpha_\lambda\right)$$

und:

$$\frac{v-\beta}{i} = \Sigma_\lambda m_\lambda \log \frac{(\omega(\xi) - \alpha_\lambda)\left(\frac{b + a\omega(\xi)}{a + \omega(\xi)} + \alpha_\lambda\right)}{(\omega(\eta) - \alpha_\lambda)\left(\frac{b + a\omega(\eta)}{a + \omega(\eta)} + \alpha_\lambda\right)}$$

Man erkennt leicht, dass diese Functionen allen Bedingungen genügen, auch die Lage der Einströmungspunkte ist leicht zu finden. Zu bemerken ist noch, dass, wenn die Functionen in dieser Form aufgestellt werden, die Einströmungspunkte sich stets auf der X Achse befinden müssen. Sind nur zwei Unstetigkeitspunkte vorhanden, so kann man diets stes erreichen dadurch, dass man die X Achse durch sie hiudurchlegt, sind jedoch mehrere vorhanden, so muss man das Problem teilen, immer zwei Einströmungspunkte nehmen und die dazu

Abschrift Kaiserliche Urkunde für Hamburg (Neue) Nr. 1 Ausfertigung Nr. 1 Blatt 1 Bogen 1

Wir Wilhelm von Gottes Gnaden Deutscher Kaiser, König von Preußen, Wir Albert von Gottes Gnaden Deutscher Reichsverweser, Wir Ludwig von Gottes Gnaden Großherzog von Hessen, Wir Wilhelm von Gottes Gnaden König von Württemberg, Wir Friedrich von Gottes Gnaden Großherzog von Baden, Wir Ernst von Gottes Gnaden Herzog von Sachsen-Coburg und Gotha, Wir Friedrich von Gottes Gnaden Herzog von Anhalt, Wir Georg von Gottes Gnaden Herzog von Sachsen-Meiningen, Wir Heinrich von Gottes Gnaden Fürst Reuß jüngere Linie, Wir Heinrich von Gottes Gnaden Fürst Reuß ältere Linie, Wir Georg von Gottes Gnaden Fürst zu Schaumburg-Lippe, Wir Leopold von Gottes Gnaden Fürst zur Lippe, Wir Wilhelm von Gottes Gnaden Fürst zu Waldeck und Pyrmont, Wir Adolf von Gottes Gnaden Herzog von Schleswig-Holstein, Wir Friedrich Franz von Gottes Gnaden Großherzog von Mecklenburg-Schwerin, Wir Friedrich Franz von Gottes Gnaden Großherzog von Mecklenburg-Strelitz, Wir Wilhelm von Gottes Gnaden Herzog von Braunschweig und Lüneburg, Wir Alexander von Gottes Gnaden Fürst zu Lippe, Wir Carl von Gottes Gnaden Fürst zu Schwarzburg-Rudolstadt, Wir Günther von Gottes Gnaden Fürst zu Schwarzburg-Sondershausen, Wir Heinrich von Gottes Gnaden Fürst Reuß ältere Linie, Wir Heinrich von Gottes Gnaden Fürst Reuß jüngere Linie, Wir Wilhelm von Gottes Gnaden Fürst zu Waldeck und Pyrmont, Wir Adolf von Gottes Gnaden Herzog von Schleswig-Holstein, Wir Friedrich Franz von Gottes Gnaden Großherzog von Mecklenburg-Schwerin, Wir Friedrich Franz von Gottes Gnaden Großherzog von Mecklenburg-Strelitz, Wir Wilhelm von Gottes Gnaden Herzog von Braunschweig und Lüneburg, Wir Alexander von Gottes Gnaden Fürst zu Lippe, Wir Carl von Gottes Gnaden Fürst zu Schwarzburg-Rudolstadt, Wir Günther von Gottes Gnaden Fürst zu Schwarzburg-Sondershausen,

$$\frac{v-\beta}{i} = \Sigma_\lambda m_\lambda \log \frac{\omega\lambda(\chi(\xi)) \cdot \omega\lambda(\alpha - \chi(\xi))}{\omega\lambda(\chi(\eta)) \cdot \omega\lambda(\alpha - \chi(\eta))}.$$

Berücksichtigt man jedoch, dass die Functionen χ im allgemeinen Abelsche Integrale sein werden, also auch die Vieldeutigkeiten derselben besitzen, die, da ω im Innern der Platte eindeutig sein muss, auch fortzuschaffen sind, so muss man dem ω auch noch diejenigen Perioden erteilen, die hierzu nötig sind.

Die $\omega\lambda$ in den obigen Formeln unterscheiden sich von einander nur durch ihre Nullpunkte, es soll $\omega\lambda$ in dem Punkte $\beta\lambda$ gleich null werden.

Das einfachste Beispiel, welches dazu dienen kann, das oben Gesagte zu erläutern, ist die Strömung durch eine elliptische Platte.

Die Gleichung der Ellipse sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oder

$$(b^2 - a^2)(\xi^2 + \eta^2) + 2(b^2 + a^2)\xi \cdot \eta - 4a^2 b^2 = 0,$$

also

$$\eta = \varphi(\xi) = \frac{1}{a^2 b^2} \cdot \{(a^2 + b^2)\xi \pm 2ab\sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}\}$$

hieraus folgt:

$$\{(b^2 - a^2)\xi + (b^2 + a^2)\eta\}d\xi + \{(b^2 - a^2)\eta + (b^2 + a^2)\xi\}d\eta = 0,$$

nun aber ist

$$(b^2 - a^2)\xi + (b^2 + a^2)\eta = \pm 2ab\sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}$$

eingesetzt, ergiebt:

$$\sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)}d\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}\,d\eta = 0,$$

demnach ist:

$$\chi(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}} = \log(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}).$$

Die Gleichung der Begrenzung ist also entweder:

$$(\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)})(\eta + \sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)}) = \alpha_1$$

oder

$$(\xi - \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)})(\eta - \sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)}) = \alpha_2.$$

Es ist α_1 und α_3 zu bestimmen.

Beide Gleichungen mit einander multiplicirt, giebt:

$$(a^2 - b^2)^2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2,$$

beide Gleichungen zu einander addirt:

$$\xi \cdot \eta + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)} = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

von einander subtrahirt:

$$\xi \sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)} + \eta \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)} = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2),$$

diese quadrirt:

$$2\xi^2 \cdot \eta^2 - (a^2 - b^2)(\xi^2 + \eta^2) + 2\xi\eta \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{\eta^2 - (a^2 - b^2)} = \tfrac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2,$$

die Wurzel eliminirt:

$$(b^2 - a^2)(\xi^2 + \eta^2) + (\alpha_1 + \alpha_2)\xi \cdot \eta = \tfrac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2$$

Aus dieser Gleichung folgt nun:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2(a^2 + b^2)$$

und

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm 4ab,$$

also ist entweder:

$$\alpha_1 = (a+b)^2$$

oder gleich $(a-b)^2$

und

$$\alpha_2 = (a-b)^2$$

oder gleich $(a+b)^2$.

Im Innern der Platte kann jedoch auch ξ in zwei verschiedenen Punkten den entgegengesetzten Wert erhalten und man kann von dem einen Punkte zu dem anderen immer auf einem Wege gelangen, auf dem die Quadratwurzel nicht null wird, auf dem sie also ihr Vorzeichen behält, mithin geht alsdann die erste Form in die zweite über, und man muss von $\log(\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)})$ eine Function bilden, die die Periode $2\log\frac{a+b}{a-b}$ besitzt, ferner muss diese Function aber auch noch, da der Logarithmus unendlich vieldeutig ist, die Periode $2\pi i$ erhalten, sie wird also eine elliptische Function sein mit den Perioden $2\log\frac{a+b}{a-b}$ und $2\pi i$.

Bei der Aufstellung derartiger Functionen muss man aber stets die einfachsten nehmen, ich setze demnach, wenn

$$z = \log(\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)})$$

ist,

Digitized by Google

$$\tau = \sin\mathrm{am}(mz, k).$$

Die beiden constanten Grössen m und k sind aus den beiden Perioden zu bestimmen.

Der Modul k ist eindeutig bestimmt durch die Jacobi'sche Grösse

$$q' = e^{-\pi \frac{K}{K'}}$$

da aber

$$4K = 2m . \log \frac{a+b}{a-b}$$

und

$$2K' = 2m\pi$$

ist, so ist

$$q' = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

und

$$m = \frac{K'}{\pi}.$$

Auch K und K' sind durch q' eindeutig bestimmt.

Es werde nun v unstetig in den Punkten $\xi = \xi_\lambda$, $\eta = \eta_\lambda$ und es sei

$$z(\xi) = \log(\xi + \sqrt{\xi^2 - (a^2 - b^2)}) - \log(\xi_\lambda + \sqrt{\xi_\lambda^2 - (a^2 - b^2)}),$$

so wird die Gleichung der Begrenzung

$$z_\lambda(\xi) + z_\lambda(\eta)$$

$$= \log \alpha + \log . (\xi_\lambda + \sqrt{\xi_\lambda^2 - (a^2 - b^2)})(\eta_\lambda + \sqrt{\eta_\lambda^2 - (a^2 - b^2)}) = \beta_\lambda$$

demnach setze ich:

$$u - \alpha = \Sigma_\lambda m_\lambda \log \{\sin\mathrm{am} \frac{K'}{\pi} z_\lambda(\xi) . \sin\mathrm{am} \frac{K'}{\pi} z_\lambda(\eta) \times$$

$$\sin\mathrm{am} \frac{K'}{\pi} (\beta_\lambda - z_\lambda(\xi)) \sin\mathrm{am} \frac{K'}{\pi} (\beta_\lambda - z_\lambda(\eta))\}$$

und also:

$$\frac{v - \beta}{i} = \Sigma_\lambda m_\lambda \log \frac{\sin\mathrm{am} \frac{K'}{\pi} z_\lambda(\xi) . \sin\mathrm{am} \frac{K'}{\pi} (\beta_\lambda - z_\lambda(\xi))}{\sin\mathrm{am} \frac{K'}{\pi} z_\lambda(\eta) . \sin\mathrm{am} \frac{K'}{\pi} (\beta_\lambda - z_\lambda(\eta))}$$

Mit Hülfe der soeben entwickelten Methode ist aber das Problem der elektrischen Strömung vollständig gelöst, wenn die Begrenzung

der Platte durch eine einzige algebraische Gleichung dargestellt werden kann.

Besteht die Begrenzung der Platte aus mehreren algebraischen Curven, so hängt das Problem ab von der Bestimmung einer im Innern der Platte stetigen und eindeutigen Function, die sich nicht ändert, wenn man an Stelle des Arguments eine durch die specielleren Bedingungen des Problems bestimmte Function setzt.

Digitized by Google

III.

Die Umkehrung des Grundgedankens von Hindenburg's combinatorischer Analysis.

(Fortsetzung).

Von

Friedrich Roth.

---

b) Die weniger gewöhnlichen Combinationen und Variationen.

(Comb. und Var. mit eingeschränkter Wiederholung und Var. zu bestimmten Summen.)

In dem ersten Abschnitte dieser Abhandlung, der auf S. 427—434 abgedruckt worden ist, hatten wir diejenigen Teile der Combinationslehre behandelt, auf die man sich in der Regel bei dem Schulunterricht beschränkt. Es bliebe noch übrig, den Grundgedanken unserer Arbeit, der sich auf dem bisher betrachteten Gebiete so fruchtbar gezeigt hat, auch auf diejenigen Zusammenstellungen gegebener Elemente anzuwenden, welche in unserer Zeit, wo die Zwecke der Schule mehr in den Vordergrund getreten sind, in den meisten Lehrbüchern — (Beckers Arithmetik bildet eine mir bekannte Ausnahme) — keine Beachtung gefunden haben, während sie im vorigen Jahrhundert wegen ihrer Anwendbarkeit auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung von den bedeutendsten Mathematikern der wiederholten Erörterung und Untersuchung für wert gehalten wurden. Dass der angebene Grund wirklich der entscheindende war, erkennt man sofort, wenn man das allgemeine für die Combinatorik als grundlegend geltende Werk, die ars conjectandi, etwas genauer ansieht. Nicht allein, dass in der Vorrede Nikolaus Bernoulli von sich sagt, dass

Digitized by Go

er zur Herausgabe des Werkes seines Oheims aufgefordert worden sei, weil man von ihm eine Schrift kannte, in welcher er die von dem letzterm ausgebildete Wissenschaft auf Rechtsfragen angewandt hatte, es ist auch der erste Abschnitt des Buches der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beim Würfelspiel gewidmet, während der zweite Teil, der die eigentliche Combinatorik enthält, nur als blosse Zutat erscheint, gleichsam als unvermeidliche Beigabe, welche die Hülfsmittel bringt, die man in dem für praktische Bedürfnisse entworfenen ersten Abschnitte gebrauchen soll. Ausserdem wissen wir von Pascal, dass er durch Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Betrachtung der Combinationen geführt worden ist. Nun wird niemand die Wichtigkeit bestreiten, welche die Variationen zu bestimmten Summen, sowie die Combinationen und Variationen mit begrenzter Wiederholung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung besitzen, und es erklärt sich daher, warum die Mathematiker früherer Zeit ihre geistige Kraft mit Vorliebe an diesem Gegenstande übten. Dagegen ist wol der Mangel an Durchbildung und wissenschaftlicher Strenge der einschlägigen Beweise und Formeln daran schuld, dass gerade dieses Gebiet bei dem Unterrichte wenig Beachtung findet. Um so mehr scheint es geboten, gerade hier den Versuch zu wagen, durch neue Auffassung bessere Ableitungen zu schaffen und allgemeine Gesichtspunkte für solche Aufgaben aufzustellen, die bis jetzt nur durch rohes Probiren und durch Ausführung in bestimmten Zahlen gelöst worden sind.

Betrachten wir zunächst die Combinationen mit eingeschränkten Wiederholungen. Hier giebt es schon eine allgemeine Formel, aber nicht für eine bestimmte Classe, sondern für die Anzahl der Complexionen durch alle Classen zusammengenommen, von der ersten aufsteigend bis zu derjenigen, welche durch die Summe allen Wiederholungsexponenten bezeichnet wird. Weingärtner*) leitet merkwürdiger Weise diese Formel gar nicht ab, sondern teilt sie ohne Beweis mit. Er entwickelt nur das Gesetz für die Anzahl der einzelnen Ordnungen, d. h. derjenigen Gruppen der Formen, die dann, wenn die Elemente alphabetisch oder umgekehrt sich folgen, mit je einem gleichen Buchstaben beginnen. Im Uebrigen verweist er auf Jac. Bernoulli. Dieser selbst aber rechnet in der ars conjectandi eigentlich nur ein Beispiel aus, indem er vier Elemente a, b, c, d annimmt und als Dimensionen — wie er treffend die höchtmöglichste Anzahl

*) Johann Christoph Weingärtner, Conrector in Erfurt, Lehrbuch der combinatorischen Analysis nach der Theorie des Professor Hindenburg. Leipzig, bei Gerhard Fleischer dem Jüngeren, 18[illegible]

der Wiederholungen nennt — nur bestimmte und zwar kleine Zahlen wählt. Daraus folgert er ohne weiteres die allgemeine Regel. Dagegen findet sich in dem Exemplar seiner Schrift, das ich aus der Göttinger Universitätsbibliothek erhalten habe, eine lateinische Randbemerkung, in der, allerdings auch nur für vier Elemente, ein Beweis aufgestellt wird, der es mir wert zu sein scheint, dass er der Oeffentlichkeit übergeben werde. Nach einer andern Bemerkung von gleicher Tinte und gleicher Handschrift stammt er vom Jahre 1736, könnte also nicht von Kästner herrühren, da dieser erst zwanzig Jahre später nach Göttingen kam. Der Beweis lautet unter Beibehaltung der Interpunction und der mathematischen Schreibweise seines Urhebers:

Sint inveniendae coniunctiones litterar. $a^m b^r c^t d^q$. Patet solius a dari coniunctiones $m+1$ quarum prima est a^0 altima a^m. Harum cuivis si accedat b, dantur novae coniunctiones $m+1$, et his novis si addatur aliud b, rursus novae $m+1$, et cum haec additio propter b^r fieri possit r vicibus, patet accedere novas coniunctiones $r \times \overline{m+1}$. Quare numerus coniunctionum $a^m b^r$ est $m+1+r \times \overline{m+1} = \overline{m+1} \times \overline{r+1}$. His accedere possunt ob c^t coniunctiones $\overline{m+1} \times \overline{r+1} \times t$ in quibus est c. Quare fit numerus coniunctionum $a^m b^r c^t = \overline{m+1} \times \overline{r+1} + \overline{m+1} \times \overline{r+1} \times t = \overline{m+1} \times \overline{r+1} \times \overline{t+1}$ At sic progrediendo patet accedente d^q summam coniunct. esse $\overline{m+1} \times \overline{r+1} \times \overline{t+1} \times \overline{q+1}$.

Ein ganz allgemeiner und strenger Beweis ist meines Wissens noch nicht gefunden; und doch giebt es nichts Leichteres als das, wenn man nur die Hülfsmittel benutzt, die wir im ersten Teile dieser Abhandlung angegeben haben,

Es seien gegeben die n Elemente a, b, c ... m, die höchste Zahl der erlaubten Wiederholungen sei bzhw. $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$. Dann würde die Aufgabe nach Hindenburg's Ausdrucksweise heissen: Suche die Anzahl der Combinationen für den Zeiger $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots : m^\mu$. Nun haben wir, wenn wir die Nullionen mit rechnen und die einzelnen Complexionen durch ein Pluszeichen verbinden,

als Arten, die nur a enthalten:

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{\alpha-1} + a^\alpha,$$

als Arten, die nur b enthalten:

$$1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \ldots + b^{\beta-1} + b^\beta,$$

als Arten, die nur c enthalten:

Digitized by Google

TOULOUSE-LAUTREC — LA FILLE

LA FILLE DE YOUL DE LA CAMPINE

Un journaliste, dont il a été déjà parlé, avait, depuis quelques années, entrepris de faire une enquête sur les mystères de la Campine. Il avait, à cet effet, parcouru cette région, interrogé les habitants, recueilli des légendes, des traditions, des superstitions, des faits étranges. Il avait, notamment, entendu parler d'une fille de Youl, qui, depuis sa naissance, ne mangeait pas. Il avait voulu la voir, mais, à cette époque, elle était malade et ne recevait personne. Il était revenu à la charge, mais, cette fois, la jeune fille était morte. Il avait alors interrogé ses parents, ses voisins, ses amis, et, sur leurs affirmations, il avait cru à la réalité du fait. Il avait même écrit un article à ce sujet, qui avait été publié par le journal *Le Matin*, et qui avait produit une certaine sensation.

Il avait, depuis, abandonné ses recherches, lorsque, un jour, il reçut une lettre d'un de ses amis, qui habitait Bruxelles, et qui lui écrivait ceci :

« Mon cher ami, je viens de lire votre article sur la fille de Youl de la Campine. Je ne sais si vous avez cru à la réalité du fait, mais, pour moi, je ne puis douter de votre bonne foi. Je vous dirai donc que j'ai connu cette fille, et que j'ai vu, de mes propres yeux, ce que vous avez raconté. Je ne sais si vous désirez connaître le mystère qui entoure cette fille, mais, si vous le désirez, je vous prie de me le faire savoir, et je vous donnerai tous les renseignements que je possède à ce sujet. »

Le journaliste répondit à son ami qu'il était curieux de connaître le mystère qui entourait la fille de Youl de la Campine, et il le pria de lui donner tous les renseignements qu'il possédait à ce sujet.

Son ami lui répondit qu'il ne pouvait pas lui donner ces renseignements par écrit, mais qu'il était prêt à les lui donner de vive voix, et il le pria de venir le voir à Bruxelles.

Le journaliste se rendit donc à Bruxelles, et, dès le lendemain, il se rendit chez son ami, qui habitait rue de la Loi, n° 16, au troisième étage.

Son ami le reçut avec beaucoup de cordialité, et, après quelques instants de conversation, il lui dit :

« Mon cher ami, je vais vous donner les renseignements que vous désirez, mais, auparavant, je vous prie de me promettre de ne pas vous étonner de ce que je vais vous dire, car, ce que je vais vous dire, je l'ai vu, de mes propres yeux, et je ne puis douter de la réalité du fait. »

Le journaliste promit à son ami de ne pas s'étonner de ce qu'il allait lui dire, et il le pria de lui donner les renseignements qu'il possédait à ce sujet.

Son ami lui dit alors :

« Mon cher ami, la fille de Youl de la Campine ne mange pas, parce qu'elle ne peut pas manger. Elle ne peut pas manger, parce qu'elle n'a pas de bouche. Elle n'a pas de bouche, parce qu'elle n'a pas de tête. Elle n'a pas de tête, parce qu'elle n'a pas de corps. Elle n'a pas de corps, parce qu'elle n'a pas de jambes. Elle n'a pas de jambes, parce qu'elle n'a pas de pieds. Elle n'a pas de pieds, parce qu'elle n'a pas de chaussures. Elle n'a pas de chaussures, parce qu'elle n'a pas de bas. Elle n'a pas de bas, parce qu'elle n'a pas de jupe. Elle n'a pas de jupe, parce qu'elle n'a pas de chemise. Elle n'a pas de chemise, parce qu'elle n'a pas de bras. Elle n'a pas de bras, parce qu'elle n'a pas de mains. Elle n'a pas de mains, parce qu'elle n'a pas de doigts. Elle n'a pas de doigts, parce qu'elle n'a pas de gants. Elle n'a pas de gants, parce qu'elle n'a pas de manchettes. Elle n'a pas de manchettes, parce qu'elle n'a pas de manches. Elle n'a pas de manches, parce qu'elle n'a pas de corsage. Elle n'a pas de corsage, parce qu'elle n'a pas de poitrine. Elle n'a pas de poitrine, parce qu'elle n'a pas de cœur. Elle n'a pas de cœur, parce qu'elle n'a pas de sentiments. Elle n'a pas de sentiments, parce qu'elle n'a pas de passions. Elle n'a pas de passions, parce qu'elle n'a pas de vices. Elle n'a pas de vices, parce qu'elle n'a pas de vertus. Elle n'a pas de vertus, parce qu'elle n'a pas de défauts. Elle n'a pas de défauts, parce qu'elle n'a pas de qualités. Elle n'a pas de qualités, parce qu'elle n'a pas de mérite. Elle n'a pas de mérite, parce qu'elle n'a pas de valeur. Elle n'a pas de valeur, parce qu'elle n'a pas de prix. Elle n'a pas de prix, parce qu'elle n'a pas de vente. Elle n'a pas de vente, parce qu'elle n'a pas de marchandises. Elle n'a pas de marchandises, parce qu'elle n'a pas de magasin. Elle n'a pas de magasin, parce qu'elle n'a pas de maison. Elle n'a pas de maison, parce qu'elle n'a pas de rue. Elle n'a pas de rue, parce qu'elle n'a pas de ville. Elle n'a pas de ville, parce qu'elle n'a pas de pays. Elle n'a pas de pays, parce qu'elle n'a pas de continent. Elle n'a pas de continent, parce qu'elle n'a pas de monde. Elle n'a pas de monde, parce qu'elle n'a pas de ciel. Elle n'a pas de ciel, parce qu'elle n'a pas de terre. Elle n'a pas de terre, parce qu'elle n'a pas de soleil. Elle n'a pas de soleil, parce qu'elle n'a pas de lune. Elle n'a pas de lune, parce qu'elle n'a pas de planètes. Elle n'a pas de planètes, parce qu'elle n'a pas de système solaire. Elle n'a pas de système solaire, parce qu'elle n'a pas de voie lactée. Elle n'a pas de voie lactée, parce qu'elle n'a pas de nébuleuses. Elle n'a pas de nébuleuses, parce qu'elle n'a pas de comètes. Elle n'a pas de comètes, parce qu'elle n'a pas de météores. Elle n'a pas de météores, parce qu'elle n'a pas de bolides. Elle n'a pas de bolides, parce qu'elle n'a pas de feux follets. Elle n'a pas de feux follets, parce qu'elle n'a pas de marais. Elle n'a pas de marais, parce qu'elle n'a pas de fièvres. Elle n'a pas de fièvres, parce qu'elle n'a pas de médecins. Elle n'a pas de médecins, parce qu'elle n'a pas de malades. Elle n'a pas de malades, parce qu'elle n'a pas de santé. Elle n'a pas de santé, parce qu'elle n'a pas de vie. Elle n'a pas de vie, parce qu'elle n'a pas de mort. Elle n'a pas de mort, parce qu'elle n'a pas de cimetière. Elle n'a pas de cimetière, parce qu'elle n'a pas de tombeaux. Elle n'a pas de tombeaux, parce qu'elle n'a pas de morts. Elle n'a pas de morts, parce qu'elle n'a pas de vivants. Elle n'a pas de vivants, parce qu'elle n'a pas de naissances. Elle n'a pas de naissances, parce qu'elle n'a pas de mariages. Elle n'a pas de mariages, parce qu'elle n'a pas de célibataires. Elle n'a pas de célibataires, parce qu'elle n'a pas de veufs. Elle n'a pas de veufs, parce qu'elle n'a pas de veuves. Elle n'a pas de veuves, parce qu'elle n'a pas de divorces. Elle n'a pas de divorces, parce qu'elle n'a pas de séparations. Elle n'a pas de séparations, parce qu'elle n'a pas de réconciliations. Elle n'a pas de réconciliations, parce qu'elle n'a pas de disputes. Elle n'a pas de disputes, parce qu'elle n'a pas de paroles. Elle n'a pas de paroles, parce qu'elle n'a pas de mots. Elle n'a pas de mots, parce qu'elle n'a pas de lettres. Elle n'a pas de lettres, parce qu'elle n'a pas de livres. Elle n'a pas de livres, parce qu'elle n'a pas de bibliothèques. Elle n'a pas de bibliothèques, parce qu'elle n'a pas de lecteurs. Elle n'a pas de lecteurs, parce qu'elle n'a pas de journaux. Elle n'a pas de journaux, parce qu'elle n'a pas de rédacteurs. Elle n'a pas de rédacteurs, parce qu'elle n'a pas de nouvelles. Elle n'a pas de nouvelles, parce qu'elle n'a pas de faits. Elle n'a pas de faits, parce qu'elle n'a pas de vérité. Elle n'a pas de vérité, parce qu'elle n'a pas de mensonge. Elle n'a pas de mensonge

Sollen die n Elemente $a, b, c \ldots t$ in der angegebenen Weise zur $m$ter Classe zusammengestellt werden, so ist die Anzahl aller Arten der betreffenden Variationen ausgedrückt durch die Summe der Coefficienten der polynomischen Reihe, die durch Ausrechnung von

$$(a+b+c+\ldots+s+t)^m$$

entsteht, unter Weglassung aller derjenigen Glieder, welche eine solche Potenz der ursprünglichen Summanden a, b u. s. f. enthalten, deren Exponen' die zugehörige Grenze der Wiederholungen überschreitet. Die Anzahl der übrig bleibenden Glieder giebt uns zugleich die Menge der entsprechenden Combinationen. Ist keine der Dimensionen, die für die Wiederholungen gestattes sind, kleiner als m, so bleibt die Potenz der $n$gliedrigen Summe $\overline{a+b+\ldots t}$ vollständig, und man erhält die bekannten Formeln für die gemeinen Variationen und Combinationen m. W. Man kann also die zuletzt gegebene Regel als den allgemeinen Satz ansehen, unter der die unbeschränkte Wiederholung als besonderer Fall gehört.

Diese Regel, welche die hier zu betrachtenden Zusammenstellungen auf den polynomischen Lehrsatz zurückführt, bietet zunächst eine Erleichterung des Verständnisses bei der Berechnung der Anzahl der Combinationen, wenn nur für ein Element die Wiederholung beschränkt ist.

Sind z. B. unter den n Elementen für t allein w, für alle anderen dagegen m Wiederholungen zulässig, wobei w kleiner als m ist, so fallen in der Reihe für $(a+b+c+\ldots+t)^m$ alle diejenigen Glieder weg, welche Potenzen von t^{w+1} aufsteigend bis t^m enthalten. Von diesen Gliedern sind aber so viele vorhanden, als sich die übrigen $\overline{n-1}$ Buchstaben zu denjenigen Classen mit Wiederholungen combiniren lassen, deren Dimensionen mit den jedesmaligen zwischen $w+1$ und m liegenden Exponenten von t zusammen m ausmachen, ihre Anzahl ist also unter Benutzung von 4):*)

---

*) Anmerkung. Leider ist in dem ersten Teile meiner Abhandlung auf der linken Seite dieser Gleichung ein Druckfehler übersehen worden. Es steht dort ${}^{w}_{m}C(r)$, wofür selbstverständlich ${}^{w}_{m}C(n)$ zu setzen ist. Will man übrigens Gleichung 4) mit dem von Bernh. Euler gefundenen Satze, für die ich an jener Stelle auf Baltzer's Elemente verwiesen habe, in Vergleichung bringen, so setze man $n+m-r-1=p$, dann lautet sie:

Digitized by Google

$$ {}^{w}C(n-1) + {}^{w}C(n-1) + {}^{w}C(n-1) + \ldots + {}^{w}C(n-1)) + {}^{w}C(n-1) $$
$$ = {}^{w}C(n). $$

Für das in der Aufgabe Gesuchte ergiebt sich mithin

$$ 7) \qquad {}^{w}C(n) - {}^{w}C(n) = \binom{m+n-1}{m} - \binom{m+n-w-2}{m-w-1} $$

Der Vorteil, den diese Formel gewährt, tritt besonders dann hervor, wenn die Classenzahl sehr gross ist. Man versuche z. B. die Anzahl der Combinationen zur 100. Classe für die Zeiger $a^{100}\,b^{100}\,c^{94}$ mit Hülfe der Bernoulli'schen Tabelle zu berechnen, und man wird bald ermüdet den Arm sinken lassen, während sie nach unserer Vorschrift einfach wird

$$ {}^{w}C(3) - {}^{w}C(3) = \binom{102}{100} - \binom{7}{5} = 5151 - 21 = 5130. $$

Sollen die Combinationen so ausgeführt werden, dass bei einem Teile der Elemente die Wiederholungen unbeschränkt, bei den andern dagegen vorgeschrieben sind, dergestalt, dass bei diesen nur eine bestimmte Menge gleicher Elemente vorkommen darf, nicht mehr und nicht weniger, so haben wir eine leichte Aufgabe vor uns. Sollen z. B. in der $m$ten Classe von den $k$ten Elementen a, b ... e das erste, a nur α mal, b nur β mal u. s. f. zuletzt e nur ε mal gesetzt werden, während die andern von den gegebenen n Elementen beliebig oft mal wiederholt werden dürfen, so sind so viel Arten vorhanden, als diese übrigen $n-k$ Elemente zur $\overline{m-\alpha-\beta-\ldots-\varepsilon}$ten Classe m. W. combinirt werden können.

Bei den entsprechenden Variationen entwickele man die $m$te Potenz der $n$gliedrigen Summe $a+b+c+\ldots+t$ in der Weise, dass man diejenigen Elemente, deren Wiederholung vorgeschrieben ist, einzeln nimmt, während man die übrigen $\overline{n-k}$ aber zu einem einzigen Summanden zusammenfasst. D. h. man rechne $(a+b+\ldots+e+\overline{f+g+\ldots+s+t})^m$ nach dem polynomischen Satze für die Glieder a, b ... e und $(f+g+\ldots+t)$ aus. Dann enthält dasjenige Glied der

---

$$ \binom{p+1}{m} = \binom{p}{m} + \binom{p-1}{m-1}\binom{r}{1} + \binom{p-2}{m-2}\binom{r+1}{2} + \ldots $$
$$ + \binom{p-k}{m-k}\binom{r+k-1}{k} + \ldots + \binom{p-\overline{m-1}}{1}\binom{r+m-2}{m-1} $$
$$ + \binom{r+m-1}{m} $$

igitized by Go

entstehenden Reihe, in welchem die Potenzen $a^\alpha b^\beta \dots e^\varepsilon$ vorkommen, die gesuchten Variationen. Ihre Anzahl wird gefunden, indem man unter Beibehaltung des Coefficienten für jeden Buchstaben 1 setzt. Dies giebt, da dann $f+g+\dots+t$ gleich $n-k$ wird

$$8) \qquad \frac{m!\,(n-k)^{m-\alpha-\beta-\dots\varepsilon}}{\alpha!\,\beta!\dots\varepsilon!\,(m-\alpha-\beta-\dots-\varepsilon)!}.$$

Eine Gruppe von Elementen, die in jeder Art vorhanden sein soll, bezeichnete man früher als den Kopf der Combination (caput combinationis), es würde daher nach dieser Ausdrucksweise die von uns gelöste Aufgabe heissen: Suche die Anzahl der Formen für die Combin. und Var. m. W., die alle den Combinationskopf $a^\alpha b^\beta \dots e^\varepsilon$ enthalten. Für die Combinationen ohne W. hat schon Weingärtner in dem oben angeführten Buche eine Lösung dieser Aufgabe auf S. 264–5 mitgeteilt.

Mit Hülfe der Formel (8) sind wir nun im Stande, auf bequeme Weise die Anzahl der Variationen mit eingeschränkten Wiederholungen zu berechnen, wenn, wie wir bei den entsprechenden Combinationen angenommen hatten, nur für ein Element eine von der Classenzahl verschiedene Dimension der Wiederholungen gegeben ist. Wenn nämlich, wie oben, die n Elemente $a, b, c \dots t$ in der $m$ten Classe jedes $m$mal, t allein aber nur $w$mal vorkommen darf, so hätten wir in der Potenz $(a+b+c+\dots+t)^m$, da wir nach dem binomischen Lehrsatze für die beiden Summanden $\overline{a+b+\dots s}$ und t entwickeln, nur diejenigen Glieder wegzunehmen, welche t in einer höhern als $w$ten Potenz enthalten, und dann unter Beibehaltung der Coefficienten für jeden der Buchstaben $a, b \dots t$ eins zu setzen. Ist t^r eine solche Potenz, r mithin eine ganze Zahl zwischen w und m, so giebt uns Formel (8) den durch Auslassung von t wegfallenden Summanden, indem wir r für α oder β u. s. f. schreiben und die übrigen der k Grössen $\alpha, \beta \dots \varepsilon$ null werden lassen. Das Gesuchte ist danach

$$\frac{m!\,(n-1)^{m-r}.1^r}{r!\,(m-r)!} = \binom{m}{m-r}(n-1)^{m-r}.$$

Die Anzahl der Variationen für den Zeiger $a^{100}b^{100}c^{96}$ in der hundersten Classe würde sich demnach bestimmen als

$$(2+1)^{100} - \left(1+\frac{100}{1}2^1+\frac{100.99}{1.2}2^2+\frac{100.99.98}{1.2.3}2^3\right)$$
$$= 3^{100} - (1+200+19800+1293600) = 3^{100} - 1313601,$$

ein Ausdruck, der mit Hülfe der Logarithmen weiter auszurechnen wäre.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn die Formel $F(x,y,z,p,q,r)$ so bestimmt wird, dass die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=0$$

für die Werte $p=\frac{dx}{ds}$, $q=\frac{dy}{ds}$, $r=\frac{dz}{ds}$ identisch erfüllt sind. Setzt man

$$\frac{\partial F}{\partial p}=\varphi(x,y,z,p,q,r),\quad \frac{\partial F}{\partial q}=\psi(x,y,z,p,q,r),\quad \frac{\partial F}{\partial r}=\chi(x,y,z,p,q,r),$$

so müssen die Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial p}+\frac{\partial\psi}{\partial q}+\frac{\partial\chi}{\partial r}=0$$

identisch erfüllt sein.

Wir sind damit in die Behandlung der dritten Aufgabe eingetreten, welche wir oben als die Aufgabe der Ethik bezeichnet haben. Wir haben nämlich gesehen, dass die Ethik, wenn sie eine Wissenschaft sein will, nicht nur die Tatsachen des Wollens, sondern auch die Gesetze des Wollens zu ergründen hat. Diese Gesetze des Wollens sind nun, wie wir gesehen haben, nichts anderes als die Gesetze der Bewegung, welche sich auf die Bewegung der Einheit beziehen. Wir haben ferner gesehen, dass diese Gesetze der Bewegung der Einheit sich nicht auf die Bewegung der Einheit im Raume beziehen können, sondern dass sie sich auf die Bewegung der Einheit in der Zeit beziehen müssen. Wir haben endlich gesehen, dass diese Gesetze der Bewegung der Einheit in der Zeit sich nicht auf die Bewegung der Einheit in der Zeit schlechthin beziehen können, sondern dass sie sich auf die Bewegung der Einheit in der Zeit unter Berücksichtigung der Tatsache beziehen müssen, dass die Einheit ein Wollen ist. Wir haben also die Gesetze des Wollens zu suchen, und wir haben gesehen, dass diese Gesetze des Wollens nichts anderes sind als die Gesetze der Bewegung, welche sich auf die Bewegung der Einheit beziehen. Wir haben endlich gesehen, dass diese Gesetze der Bewegung der Einheit sich nicht auf die Bewegung der Einheit im Raume beziehen können, sondern dass sie sich auf die Bewegung der Einheit in der Zeit beziehen müssen. Wir haben ferner gesehen, dass diese Gesetze der Bewegung der Einheit in der Zeit sich nicht auf die Bewegung der Einheit in der Zeit schlechthin beziehen können, sondern dass sie sich auf die Bewegung der Einheit in der Zeit unter Berücksichtigung der Tatsache beziehen müssen, dass die Einheit ein Wollen ist.

fachere und ganz allgemeine Ableitung des fraglichen Satzes verborgen liegt.

Aufgabe. Wie gross ist die Anzahl der Arten der Variationen m. W. in der $m$ten Classe zur Summe n?

Auflösung. Ich schreibe m Buchstaben: a, b, c ... t immer in derselben Reihe hin nnd setze die zu variirenden Ziffern als Exponenten derselben, so erhalte ich die Abkürzungen für die Combinationen m. W. der m Elemente a, b, c u. s. f. zur $m$ten Classe, jedoch nicht vollständig, da kein Buchstabe verschwinden darf. Denn dann würde eine jener Ziffern null werden, was nach dem Begriffe der geforderten Variationen nicht erlaubt ist. So würden wir bei dem in Stahl's *) Grundriss der Combinationslehre auf S. 169 ausgeführten Beispiele schreiben

in der	ersten	Form statt	1117	$a^1 b^1 c^1 d^7$
„	22.	„	1441	$a^1 b^4 c^4 d^1$,
„	43.	„	2341	$a^2 b^3 c^4 d^1$,
„	64.	„	3511	$a^3 c^5 c^4 d^1$.

Sondere ich nun in dem allgemeinen Falle aus jeder Complexion das m Factoren enthaltende Product $a.b.c \ldots t$ als Coefficient ab, so ist der übrig bleibende Factor von der $\overline{n-m}$ten Dimension, und es ist in ihm der Wiederholung der Elemente nach keiner Seite hin eine Beschränkung auferlegt. Er ist also die Abkürzung für je eine Art der gemeinen Combinationen mit Wiederholungen von m Elementen zur $\overline{n-m}$ten Classe, mithin bezeichnet durch die Formel

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+\overline{n-m}-1)}{1.2.3.4\ldots(n-m-1)(n-m)},$$

wofür man bekanntlich auch schreiben kann

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-2)(n-1)}{1.2.3\ldots(m-3)(m-2)(m-1)}.$$

In dem letzten Bruche brauchen wir nur den Zähler rückwärts zu lesen, um darin sofort den Hindenburg'schen Ausdruck zu erkennen

$$9) \qquad {}^{n}M_{(1,2,3,4\ldots)} = \binom{n-1}{m-1}.$$

*) Stahl, Conr. Dietrich Martin, Professor in Jena, Grundriss der Combinationslehre nebst Anwendung derselben auf die Analysis. Jena und Leipzig 1800. Herrn Wolfgang Göthe gewidmet.

Digitized by Google

der für die Variationen m. W. in der $m$ten Classe zur Summe n gültig ist. Dabei haben wir nur die ältere Bezeichnung der Binomialcoefficienten in die jetzt übliche umgeändert.

Unsere Ableitung hat ausser dem Vorzuge der Kürze noch den, dass wir durch sie wiederum, wie es oben bei den gemeinen Combinationen mit und denen ohne Wiederholungen der Fall war, die verschiedenen Teile des von uns betrachteten Gebietes der Mathematik unter einen Gesichtspunkt vereinigen und so für Lehrer und Lernende die Arbeit bedeutend verringern. Die Variationen zu bestimmten Summen brauchen jetzt nicht mehr abgesondert und in gleicher Betonung mit den andern Zusammenstellungen behandelt, sondern nur anhangsweise als Beispiel bei den Combinationen m. W. betrachtet zu werden.

Ausserdem bietet der Gedankengang unseres Beweises von selbst die Lösung der Aufgabe, die Zahl der Variationen zu bestimmten Summen dann zu finden, wenn der Wert der Elemente nicht unter eine gewisse Ziffer heruntergehen soll. Denn, ist diese k, und setzen wir wiederum die Ziffernelemente als Exponenten der m Buchstaben $a, b, c \ldots t$, so können wir jetzt aus allen Producten der Potenzen den Coefficienten $a^k b^k c^k \ldots t^k$ absondern, sodass die Dimension der nach der Absonderung bleibenden Producte $n - km$ wird. Es sind deren also so viele vorhanden, als sich m Grössen zur $\overline{n - km}$ten Classe mit unbeschränkten Wiederholungen combiniren lassen. Nun ist nach dem schon vorhin erwähnten Satze

$$ {}^{w}C(m) = {}^{w}C(n - km + 1) = \binom{\overline{n - km + 1} + m - 2}{m - 1}, $$

folglich nach vollzogener Vereinfachung

$$ 10) \qquad {}^{n}M_{(k, k+1, k+2 \ldots)} = \binom{n - 1 - m(k - 1)}{m - 1}. $$

eine Gleichung, die sich bei $k = 1$ in (9) verwandelt.

Zählen wir in den hier betrachteten Zusammenstellungen diejenigen Complexionen, in denen dieselben Elemente, aber in anderer Reihenfolge vorkommen, immer nur einmal, so erhalten wir die Combinationen zu bestimmten Summen. Setze ich wieder die Ziffernelemente als Exponenten von Potenzen, deren Grundzahlen m Buchstaben sind, die in gewisser Anordnung hinter einander stehen, so würde es jetzt gleichgültig sein, welchen der Buchstaben bestimmte Exponenten zukommen, wenn diese letzteren überhaupt nur in einer gewissen Auswahl vorhanden sind. So würde z. B. bei den

Combinationen der 4. Classe zur Summe 10 die Formen a^6b^2cd, a^2b^6cd, abc^2d^6 u. a. nur als eine gerechnet werden. Setzen wir nun im allgemeinen Falle aus der durch die Potenzen der Buchstaben a, b ... t gebildeten Producten, die wir uns durch ein Pluszeichen verbunden denken, abc ... t (im eben besprochenen Beispiele $abcd$) heraus, so leuchtet ein, dass die in der Klammer befindlichen Summanden weiter nichts sind als die Gattungen der gemeinen Combinationen m. W. von m Elementen zur $\overline{n-m}$ten Classe, und dass ihre Anzahl gleich ist der gesuchten Anzahl der Combinationen zur Summe n in der $m$ten Classe. Denn die Gattung (genus) umfasst ja eben alle solche Arten der Combinationen, in denen zwar verschiedene Elemente, aber mit denselben Verhältnissen der Wiederholungen vorkommen. D. h. bei 3 Elementen in der 4. Classe würden a^3b, a^3c, ab^3, ac^3, b^3c, bc^3 nur eine Gattung der gemeinen Combinationen m. W. bilden. Eine allgemeine Formel für die Combinationen zu bestimmten Summen ergiebt sich hieraus nicht; doch kann man nun umgekehrt die für letztere von Euler entworfenen Tabellen dazu benutzen, um die Anzahl der Gattungen einer jeden Classe bei den Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung zu finden, wenn man nur die oben dargelegten Beziehungen zwischen Classe, Anzahl der Elemente und Summen, wie sie unter den beiden Combinationsarten bestehen, zu benutzen gelernt hat.

So bedeutend der Fortschritt auch war, der durch die Aufstellung der Formel für die Variationen zu bestimmten Summen gemacht wurde, so genügt er doch noch nicht, um die Aufgabe vom Würfelspiel, die ich oben als die Veranlassung zu den Untersuchungen über diese Art der Zusammenstellungen gemacht hatte, vollständig zu lösen. Denn dieser Formel liegt die Annahme zu Grunde, dass die Ziffern, die zusammen gleich der verlangten Summe sind, den höchstmöglichen Wert annehmen können, den überhaupt die gegebene Classe gestattet. Bei den Würfeln dürfen dieselben aber nicht über 6 hinausgehen. Auch dann, wenn man mehrstellige Zahlen sucht, deren Quersumme eine gewisse Grösse haben soll, kann man den Hindenburg'schen Ausdruck nur dann brauchen, wenn durch diese Grösse und die Exponenten der Classe die Möglichkeit ausgeschlossen wird, dass eine Ziffer über 9 hinaus wächst. Unter Benutzung der Umwandlungen, welche den wichtigsten Teil unserer letzten Entwickelungen ausmachten, würde man hingegen die endgültige Lösung dieser Aufgaben erreicht haben, wenn es gelänge, eine Regel darüber aufzufinden, wieviel Complexionen bei den Combinationen mit gleichmässig beschränkten Wiederholungen in jeder beliebigen Classe möglich sind. Diesem Ziele führt uns aber der unsrer ganzen Arbeit zu grunde liegende Gedanke um einige Schritte näher.

Wie im ersten Abschnitte behufs Ableitung der Gleichung 5) entwickeln wir auch jetzt die $m$te Potenz desselben n gliedrigen Polynoms nach dem binomischen Lehrsatze für die beiden Summanden $\overline{a+b+\ldots s}$ und t. Von den $m+1$ Gliedern der entstehenden binomischen Reihe können wir nun aber, wenn er die Grenze der erlaubten Wiederholungen bezeichnet, nur diejenigen brauchen, die solche Potenzen von t enthalten, deren Exponenten zwischen 0 und r liegen. Die fallenden Potenzen des ersten $\overline{n-1}$ gliedrigen Summanden würden bei einer vollständigen Reihe mit dem Exponenten m beginnen, nach der jetzigen Voraussetzung können sie aber im günstigsten Falle erst bei $(a+b+\ldots+s)^{(n-1)r}$ anfangen, und sie müssen, da ihre Exponenten sich mit denen von t zu m ergänzen, mit der $\overline{m-r}$ten Potenz abschliessen. Ist daher $m < (n-1)r$, so besteht die brauchbare Reihe aus $r+1$ Gliedern, von $(a+b+\ldots+s)^m$ bis $(a+b+\ldots+s)^{m-r}.t^r$ ist aber m grösser als $(m-1)r$, so hat sie, da die ersten Glieder wegfallen, eine geringere Ausdehnung nur bei $m = nr$, endlich ist nur eine Stelle brauchbar, nämlich die letzte, weil alle vorhergehenden solche Potenzen des $\overline{n-1}$ gliedrigen ersten Summanden enthalten, deren Exponenten über $(n-1)r$ steigen. Erlauben wir uns nun, damit unsere Darstellung nicht gar zu schleppend wird, für die Anzahl der Combinationen von x Elementen zur $k$ten Classe, wenn jedes der letzteren höchstens r mal vorkommen darf, dass Zeichen ${}^{r}_{k}C(x)$ einzuführen, so würden unsere Schlüsse unter Anwendung der in dieser Abhandlung zur Genüge erörterten Sätze zu der Folgerung führen:

11)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Wenn } m > \overline{n-1}.r, \quad {}^{r}_{m}C(n) = {}^{r}_{m-r}C(n-1)+{}^{r}_{m-r+1}C(n-1)+\ldots \\ \qquad +{}^{r}_{(n-1)r-1}C(n-1)+{}^{r}_{(n-1)s}C(n-1 = \sum_{m-r \text{ bis } (n-1)r}{}^{r}C(n-1), \\ \text{„ } m < \overline{n-1}.r, \qquad = {}^{r}_{m-r}C(n-1)+{}^{r}_{m-r+1}C(n-1)+\ldots, \\ \qquad +{}^{r}_{m-1}C(n-1)+{}^{r}_{m}C(n-1) = \sum_{m-r \text{ bis } m}{}^{r}C(n-1). \end{array}\right.$$

Dieser Satz führt also die zu lösende Aufgabe auf dieselbe Aufgabe, aber mit einer um eins geringeren Zahl der Elemente zurück. Er giebt uns dadurch den Fingerzeig, von der niedrigsten Zahl der letzteren auszugehen und stufenweise fortschreitend zu den höhern aufzusteigen. Dass für ein Element in jeder Classe, wenn m gleich r, nur eine Complexion möglich ist, bedarf keiner Erwähnung. Sind zwei zu combinirende Grössen a und b gegeben, so sind die brauchbaren Arten, in Potenzform ausgedrückt, folgende:

Digitized by Go

$$a^r c^{m-r},\quad a^{r-1}b^{m-r+1},\quad a^{r-2}b^{m-r+2},\quad \ldots\quad a^{m-r+1}b^{r-1},\quad a^{m-r}b^r.$$

Verbinden wir diese Complexionen durch das Pluszeichen, so können wir aus der dadurch entstehenden algebraischen Summe den Factor $a^{m-r}b^{m-r}$ heraussetzen; der Exponent des ersten, die Reihe in der Klammer beginnenden a wird dann $r-(m-r)$, d. i. $2r-m$, und da die Exponenten der folgenden a immer um eins fallen, die von b dagegen in derselben Weise steigen bis zu b^{2s-m}, so leuchtet ein, dass die Klammer diejenigen Einzelproducte enthält, welche — abgesehen von den Coefficienten — die Glieder des durch Ausrechnung von $(a+b)^{2r-m}$ sich ergebenden Polynomes bilden. Die Anzahl dieser Glieder ist aber bestimmt durch ${}^{w}_{2r-m}C(2)$, folglich haben wir unter Anwendung der oben von uns angenommenen Bezeichnungsweise:

$$12)\qquad {}^{r}_{m}C(2) = {}^{w}_{2r-m}C(2) = {}^{w}_{1}C(2r-m+1) = 2r-m+1.$$

Ist r kleiner als $\frac{1}{2}m$, m also grösser als $2r$, so ist gar keine Combination von der geforderten Eigenschaft möglich.

Gehen wir zu drei Elementen über, so lehrt uns Gleichung 11), dass wir den Fall, wo $m > 2r$, unterscheiden müssen von dem, wo m unter diesen Wert herabsinkt. Nehmen wir zunächst den ersten Fall und setzen m gleich $2r+x$, wo x eine ganze positive Zahl bedeutet, die kleiner als r oder ihm gleich ist. Dann ist das Gesuchte nach dem ersten Teile von 11) eine Reihe, welche anfängt mit ${}^{r}_{r+x}C(2)$ und aufhört bei ${}^{r}_{2r}C(2)$, während die Ausdehnung (dimensio) der Classe immer um eins steigt. Nun ist der erstere Ausdruck nach der letzten Gleichung gleich der Anzahl der Combinationen mit unbeschr. Wiederholung von 2 Elementen zur $(2r-\overline{r+x})$ten, die zur $\overline{r\cdots x}$ten Classe, und das letzte Glied der Reihe wird nach demselben Satze zu ${}^{w}_{0}C(2)$, während für die dazwischen liegenden Stellen in der entsprechenden ebenfalls aus (12) abgeleiteten Formel die Classe immer um eins niedriger wird. Lesen wir die Reihe umgekehrt, setzen für x seinen Wert $m-2r$ ein, wodurch sich $r-x$ in $3r-m$ verwandelt, so erhalten wir unter Benutzung von (4) oder (5):

$$13a)\quad \text{Wenn } m \gtrless 2r,\quad {}^{r}_{2r}C(3) = 1 + {}^{w}_{1}C(2) + {}^{w}_{2}C(2) + {}^{w}_{3}C(2) + \ldots + {}^{w}_{3r-m-1}C(2) + {}^{w}_{3r-m}C(2) = {}^{w}_{3r-m}C(3).$$

Ist dagegen der Classenexponent m kleiner als $2r$, so setze man

zunächst m gleich $2r-q$ und entwickele nach dem binomischen Lehrsatze die Potenz $(\overline{a+b}+c)^m$ für die beiden Summanden $\overline{a+b}$ und c. Die für uns brauchbaren Glieder sind dadurch bestimmt, dass der Exponent von c nur bis r steigen kann, sie sind also

$$(a+b)^{2r-q}+(a+b)^{2r-q-1}c^1+\ldots+(a+b)^r c^{r-q}+(a+b)^{r-1}c^{r-q+1}+\ldots$$
$$+(a+b)^{r-q+1}c^{r-1}+(a+b)^{r-q}c^r.$$

In dieser Reihe liegt eine Grenzscheide bei $(a+b)^r$. Denn, während bei den folgenden niedrigeren Potenzen von $a+b$ nur von unbeschränkter Wiederholung der Summanden a und c die Rede sein kann, fallen die vorhergehenden unter Formel (12). Das dritte Element c kann, weil seine Potenzen immer nur eine Stelle geben, keinen Einfluss auf die Anzahl der Complexionen ausüben, die jedem einzelnen Gliede obiger Binomialreihe zukommen. Da nun $2r-q$ gleich m ist, so beträgt nach 12)

bei $(a+b)^{2r-q}$ die Anzahl der brauchbaren Formen ${}^{w}C(2)_{2r-m}$,

„ $(a+b)^{2r-q-1}$ „ „ „ „ „ ${}^{w}C(2)_{2r-m+1}$,

⋮ ⋮ ⋮

zuletzt bei

$(a+b)^r$ „ „ „ „ „ ${}^{w}C(2)_{r}$.

Bilden wir die Summe und zählen zu ihr $\Sigma^{w}C(2)_{0 \text{ bis } 2r-m-1}$ einmal positiv und einmal negativ hinzu und verwandeln die dadurch gebildeten Reihen nach 4), so erhalten wir für die Gesamtzahl aller hier in Betracht kommenden Combinationen

(I) $$\Sigma^{w}C(2)_{0 \text{ bis } r} - \Sigma^{w}C(2)_{0 \text{ bis } 2r-m-1} = {}^{w}C(3)_{r} - {}^{w}C(3)_{2r-m-1}.$$

Wir haben nun in obiger Binomialreihe noch diejenigen Potenzen zu betrachten, deren Exponenten unter r herabgehen. Hierbei ist die Gesamtzahl der Complexionen leicht zu bestimmen als eine Reihe, die mit ${}^{w}C(2)_{r-q}$ beginnt und bei ${}^{w}C(2)_{r-1}$ abschliesst. Zu dieser zähle ich wiederum eine mit 1 beginnende und mit ${}^{w}C(2)_{r-q-1}$ aufhörende gleichartige Reihe einmal positiv und einmal negativ hinzu, setze für q seinen Wert $2r-m$ ein, schreibe demgemäss für $r-q-1$ das gleiche $m-r-1$ und wende 4) an, so kommt

(II) $$\Sigma^{w}C(2)_{0 \text{ bis } r-1} - \Sigma^{w}C(2)_{0 \text{ bis } m-r-1} = {}^{w}C(3)_{r-1} - {}^{w}C(3)_{m-r-1}.$$

Digitized by Google

Bevor wir nun (I) und (II) zusammen nehmen, machen wir von der schon auf S. 90 zur Ableitung von 9) benutzten Umwandlung Gebrauch, so dass wir haben:

$$\text{Wenn } 2r \geqq m > r, \quad {}^{r}_{m}C(3) = {}^{w}_{2}C(r+1) + {}^{w}_{2}C(r) - {}^{w}_{2}C(2r-m) - {}^{w}_{2}C(m-r).$$

Die beiden ersten Summanden lassen sich noch durch Zusammenziehen vereinfachen, indem man die bekannten Werte für sie einführt, dann $r+1$ heraussetzt und seine Coefficienten $2r+2$ durch 2 hebt. Dann gestaltet sich das Gesuchte zu:

13b) $$\text{Wenn } 2r \geqq m > r, \quad {}^{r}_{m}C(3) = (r+1)^2 - {}^{w}_{2}C(2r-m) - {}^{w}_{2}C(m-r).$$

Solange nicht mehr als drei Elemente gegeben sind, können wir jede Aufgabe über die Combinationen mit gleichmässig beschränkter Wiederholung lösen. Will ich z. B. wissen, wie oft mal mit 3 Würfeln 13 Augen geworfen werden können, so betrachte ich die Würfel als Stellen einer Variation m. W. zur Summe 13. Denke ich mir nun die zu summirenden Ziffern einzeln als Exponenten von a, b und c, so verwandle ich durch Absonderung des Factors abc die Aufgabe in die andere: Wie oft mal lassen sich 3 Elemente zur 10. Classe combiniren, wenn jedes nur 5 mal vorkommen darf? Gleichung 13a) gibt uns darauf die Antwort:

$${}^{w}_{2.5-5}C(3) = {}^{w}_{5}C(3) = {}^{w}_{2}C(6) = \frac{6.7}{1.2} = 21.$$

Ebenso nach 13b):

$$(5+1)^2 - {}^{w}_{2}C(0) - {}^{w}_{2}C(5) = 36 - 0 - \frac{5.6}{1.2} = 21.$$

Wie man sieht, gelten beide Formeln 13a) und b). Es muss dies auch so sein, da nach unsern Annahmen nichts im Wege steht, x sowol als y null werden zu lassen.

Sollen mit derselben Würfelzahl 12 Augen geworfen werden, so erhalte ich die Lösung:

$${}^{5}_{9}C(3) = 6^2 - {}^{w}_{2}C(1) - {}^{w}_{2}C(4) = 36 - \frac{1.2}{1.2} - \frac{4.5}{1.2} = 25.$$

Digitized by Google

Diese Ergebnisse stehen in Uebereinstimmung mit der erwähnten Bernoulli'schen Tabelle, das letzte auch mit Beckers Arithmetik, 2. Buch, § 29 Beispiel 2. Doch besitzt unsere Formel den Vorzug der Allgemeinheit, während jene Tafel für jede andere Wiederholungsgrenze neu entworfen werden muss, und in dem letztern Buche die Variationen wirklich ausgeführt werden. Der Vorteil, den der von uns vorgeschagene Weg bietet, tritt besonders dann hervor, wenn die gegebenen Grössen sehr grosse Zahlen sind. Würden wir z. B. die Frage zu beantworten haben, auf wieviel verschiedene Weisen man 1000 Mark so unter 3 Personen verteilen könne, dass jede nicht weniger als 100, aber nicht mehr als 600 M. erhielte, so würde für Entwerfung jener Tabelle das Papier und das Auge nicht ausreichen. Denn man hätte 501 Einsen neben einander zu schreiben, dann diese Reihe, indem man immer eine Stelle nach rechts rückt, noch 500 mal darunter zu setzen, um die Summe zu bilden. Wenn man dies nun auch durch die aufsteigenden und nieder fallenden natürlichen Zahlen ersetzen würde, so hätte man immer noch die entstehenden 1001 Ziffern 501 mal schief unter einander zu schreiben und die lotrechten Reihen zusammenzuzählen. Wir dagegen denken uns die drei Anteile als Exponenten der Buchstaben a, b und c, sondern $a^{100}b^{100}c^{100}$ überall als Factor ab und können so die gesuchte Anzahl der möglichen Fälle ausdrücken durch 13 b). Es ist $r = 500$, $m = 700$, m also kleiner als $2r$. Danach ergiebt sich als Lösung:

$$\underset{700}{{}^{500}C}(3) = 501^2 - {}^{w}\underset{2}{C}(300) - {}^{w}\underset{2}{C}(200) = 251001 - 45150 - 20100$$

$$= 185751.$$

Wenn wir nun die Zahl der Elemente von 3 an immer um eins steigen liessen, so würde uns die Gleichung 11) die Mittel an die Hand geben, die betreffende Formel für jede Zahl der Elemente und bei jeder beliebigen Classe abzuleiten. Doch würde uns das zu weit führen. Wir beschränken uns darauf zu zeigen, wie durch die Anwendung des Grundgedankens dieser Abhandlung noch eine einfache Beziehung und die Verallgemeinerung zweier schon für engere Grenzen entwickelten Sätze aufgefunden werden können.

Man denke sich nämlich alle Formen der Combinationen der n Buchstaben a, b, c ... t, von denen ein jeder nur r mal gesetzt werden darf, in der $m$ten Classe wirklich ausgeführt, betrachte die Elemente als Factoren und teile mit einer jeden Complexion der Reihe nach in $a^r b^r c^r \ldots t^r$: dann geben die Quotienten die verschiedenen Formen der gleichartigen Zusammenstellungen in der $\overline{nr-m}$ten Classe. Und zwar sind diese letzteren vollständig vorhanden. Denn jeder $x$ten Dimension eines Elementes in den ursprünglichen Combi-

Digitized by Go

nationen entspricht immer eine $\overline{r-x}$te Dimension desselben Buchstabens in den Quotienten. Wenn x von 0 bis r steigt, fällt $r-x$ von r bis 0. Nun entstehen soviele Quotienten, als Divisoren da sind, mithin ist

$$\underset{m}{{}^{r}C}(n) = \underset{nr-m}{{}^{r}C}(n),$$

oder in Worten ausgedrückt: Es sind immer gleichviel Arten in je zwei solchen Classen vorhanden, deren Dimensionen gleich weit von 0 und von nr abstehen.

Ist nun m grösser als $(n-1)r$ oder ihm gleich, so ist $nr-m$ kleiner als r oder ihm gleich; die Combinationen zur $\overline{nr-m}$ten Classe haben also dann, auch wenn jedes Element höchstens r mal vorkommen darf, unbeschränkte Wiederholung, folglich nach der letzten Gleichung:

14) Wenn $m > (n-1)r$, $\underset{m}{{}^{r}C}(n) = \underset{nr-m}{{}^{w}C}(n)$,

eine Verallgemeinerung und Bestätigung von 12) und 13a).

Wenden wir dies auf die öfters erwähnte Aufgabe vom Würfelspiel an und fragen: „Wieviel Fälle sind möglich, dass man mit 6 Würfeln 32 Augen werfe", so wäre bei den ensprechenden Combinationen mit gleichmässig beschr. W. $r = 5$, $n = 6$, $nr = 30$, $m = 32-6.1 = 26 (> 5.5)$, mithin das Gesuchte

$$\underset{26}{{}^{5}C}(6) = \underset{4}{{}^{w}C}(6) = \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} = 126.$$

Dasselbe kommt heraus, wenn m gleich 4 ist, oder wenn $6+4$, d. i. 10 Augen geworfen werden sollen, Ergebnisse, die durch die Bernoulli'sche Tafel bestätigt werden.

Denke ich mir 5 regelmässige Dodekaeder und bei einem jeden auf den 12 Seitenflächen der Reihe nach 1, 2, 3 u. s. f. bis 12 Punkte eingravirt, so finde ich für die Anzahl der Fälle, in denen die oben auf liegenden Flächen zusammen 50 Augen zeigen, unter Berechnung der von uns gegebenen Vorschriften

$$\underset{45}{{}^{11}C}(5) = \underset{10}{{}^{w}C}(5) = \underset{4}{{}^{w}C}(11) = 1001.$$

Hätten wir ferner die Frage zu beantworten, wieviel Zahlen unter einer Million zur Quersumme 37 haben, so lassen wir bei den zur Summe 37 zu variirenden Ziffern die Null zu. Solche Complexionen, bei denen vorne Nullen hinter einander stehen, geben uns diejenigen

Digitized by Google

Hätte, wie Ampère es in Fällen, wie die vorliegenden annimmt, die Kraft, welche ein Element ds auf ein Element ds' ausübt, die Richtung der Verbindungslinie r, so müßte

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

sein. Dann müßte aber auch $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ sein, was nicht der Fall ist. Die Kraft, welche ds auf ds' ausübt, hat also nicht die Richtung der Verbindungslinie r.

Es sei ε der Winkel, welchen die Kraft mit der Verbindungslinie r macht, ε' der Winkel, welchen die Kraft mit der Richtung von ds' macht, ε'' der Winkel, welchen die Richtung von ds' mit der Verbindungslinie r macht. Dann ist

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$$

Es sei ε_1 der Winkel, welchen die Richtung von ds mit der Verbindungslinie r macht, ε_1' der Winkel, welchen die Richtung von ds mit der Richtung von ds' macht, ε_1'' der Winkel, welchen die Richtung von ds' mit der Verbindungslinie r macht. Dann ist

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1''$$

Es sei ε_2 der Winkel, welchen die Richtung von ds mit der Kraft macht, welche ds auf ds' ausübt. Dann ist

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon$$

Es sei φ die Kraft, welche ds auf ds' ausübt, φ_x die Kraft, welche ds auf ds' in der Richtung der x-Axe ausübt, φ_y die Kraft, welche ds auf ds' in der Richtung der y-Axe ausübt, φ_z die Kraft, welche ds auf ds' in der Richtung der z-Axe ausübt. Dann ist

$$\varphi_x = \varphi \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_1 = \varphi \cos(\varepsilon_1' + \varepsilon_1'') \cos \varepsilon_1$$

$$\varphi_y = \varphi \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_1 = \varphi \cos(\varepsilon_1' + \varepsilon_1'') \cos \varepsilon_1$$

$$\varphi_z = \varphi \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_1 = \varphi \cos(\varepsilon_1' + \varepsilon_1'') \cos \varepsilon_1$$

Es sei φ_x' die Kraft, welche ds auf ds' in der Richtung der x-Axe ausübt, φ_y' die Kraft, welche ds auf ds' in der Richtung der y-Axe ausübt, φ_z' die Kraft, welche ds auf ds' in der Richtung der z-Axe ausübt. Dann ist

$$\varphi_x' = \varphi \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_1 = \varphi \cos(\varepsilon_1' + \varepsilon_1'') \cos \varepsilon_1$$

$$\varphi_y' = \varphi \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_1 = \varphi \cos(\varepsilon_1' + \varepsilon_1'') \cos \varepsilon_1$$

$$\varphi_z' = \varphi \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_1 = \varphi \cos(\varepsilon_1' + \varepsilon_1'') \cos \varepsilon_1$$

falls an die Stelle des Zahlenexponenten eines einzelnen Buchstaben eine Reihe von neben einander stehenden Einsen.

Die Vergleichung beider Darstellungsweisen zeigt unzweideutig, dass die Potenzexponenten in den bei obiger Multiplication entstehenden Einzelproducten die Elemente der Variation zu einer bestimmten Summe vorstellen, dass folglich die Anzahl dieser Producte gleich ist der gesuchten Menge der Complexionen der fraglichen Variationen durch alle Classen. Die Einzelproducte sind aber die Glieder der polynomischen Reihe, welche durch Ausmultipliciren des Productes

$$a(b+\alpha_1)(c+\alpha_2)\ \ldots\ (s+\alpha_{n-2})(t+\alpha_{n-1})$$

erzeugt wird. Die Summe der ganzen Reihe verwandelt sich aber in die Anzahl ihrer Summanden, wenn wir einen jeden derselben gleich eins setzen; und dies erreichen wir dadurch, dass wir für jeden Buchstaben 1 schreiben. Auf diese Weise erhalten wir für die in unsrer Aufgabe gesuchte Grösse:

15) $$1.(1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Man wird mir vielleicht einwenden, dass dieses Ergebnis ja viel schneller so herzuleiten gewesen wäre, dass man, wie es bei Weingärtner geschehen ist, in der für die $m$te Classe geltenden Formel 9) die Menge (m) der an einander zu fügenden Ziffern von 1 bis n wachsen lässt und dann die Binomialcoefficienten zusammenzählt. Wozu also, wird man vielleicht fragen, dieser Aufwand von Arbeit und von Nachdenken, wenn die Sache doch einfacher zu machen ist? Dagegen erwidere ich, dass es mir in dieser Abhandlung gerade darauf ankam zu zeigen, wie durch die Anwendung der Regeln der Multiplication eine jede Formel der Combinationslehre selbständig gefunden werden kann, ohne dass man eine der andern zu kennen braucht. Es ist ja allerdings bequemer, über einen Fluss mit dem Boote zu fahren, als ihn zu durchschwimmen, aber das Vergnügen der Kraftleistung geht dann verloren. Ebenso mögen diejenigen, welche die Vorzüge des in dieser Schrift angewandten Beweisverfahrens nicht anerkennen wollen, meine Entwickelungen als eine Art geistigen Turnens betrachten, meinetwegen nur als ein anziehendes Spiel, bei dem es darauf ankam zu zeigen, wieviel Goldkörner in dem Grundgedanken der combinatorischen Analysis Hindenburg's verborgen liegen, wenn man dieselbe überhaupt als die innige Verwandtschaft auffasst, die zwischen der Combinationslehre und der Multiplication mehrstelliger Grössen besteht.

Buxtehude im April 1884.

Digitized by Go

II.

Mitteilungen.

Zu Klima und Akklimation.

Wenn die Temperatur der Körperoberfläche mit der Temperatur der Umgebung sinkt, so sinkt auch die Wärmeabgabe, d. h. weniger Kal. wird gebildet. Bei der Kleidung, die ja nur die Wärmeabgabe hindert, ist es also gleichgültig, ob sie dicht oder locker ist, wenn nur die Temperatur der Körperoberfläche dieselbe bleibt.

In der Tat aber, wie Verfasser feststellte, ist die Temperatur der Körperoberfläche bei dichter Kleidung niedriger als bei lockerer, weil bei dichter Kleidung die Wärmeabgabe durch Leitung und Strahlung geringer ist, und deshalb wird bei dichter Kleidung weniger Wärme gebildet als bei lockerer. Bei dichter Kleidung ist also der Stoffwechsel geringer als bei lockerer.

Verfasser hat diese Tatsachen durch Versuche an sich selbst festgestellt. Er hat sich in einem Zimmer, dessen Temperatur 15° C betrug, bei dichter Kleidung 2 Stunden lang aufgehalten und dann bei lockerer Kleidung 2 Stunden lang. Bei dichter Kleidung betrug die Temperatur der Körperoberfläche 32,5° C, bei lockerer 33,5° C. Bei dichter Kleidung wurden 1,5 Kal. weniger gebildet als bei lockerer.

Verfasser hat ferner festgestellt, daß bei dichter Kleidung der Stoffwechsel auch bei Arbeit geringer ist als bei lockerer.

VIA AGLI ORTOMATZ

jeder ihrer Lagen, samt ihrer Berührungsebene in der normalen Richtung zur Projections-Ebene so weit bewegt, bis sie den Punkt *a* enthält. Dann bilden alle Geraden *P* ... eine Kegelfläche K (den Richtungskegel), und ihre Spurpunkte befinden sich in einem Kreise *K*, als der Spur dieser Fläche.

Die Geraden *P* und *L* bestimmen eine Ebene B, die zu den Lichtstrahlen parallel ist. Um den Berührungspunkt *d* dieser Ebene mit der Schraubenfläche zu bestimmen, errichten wir zu der Projection der Erzeugenden *P* eine Senkrechte, und tragen auf diese in bestimmter Richtung mittelst des Kreises *K* den Parameter *r* über. Vom so erhaltenen Punkte *f* ziehen wir eine zweite Senkrechte auf die, durch die Punkte *m* und *m'* bestimmte Spur *M* der Ebene B. Diese Senkrechte ist die horizontale Projection einer Geraden des grössten Falles *F* (in der Ebene B), welche die Gerade *P* in dem gesuchten Berührungspunkte *d* schneidet. Ihre Spur befindet sich im Punkte *h*.

Die Projectionen aller dieser Geraden des grössten Falles *F* . . schneiden sich in einem Punkte *t*, der auf einer, in der Projection des Punktes *a* zu der Projection der Geraden *L* errichteten Senkrechten liegt, und dessen Entfernung von der Axe *A* der Entfernung der Spur *m'* von derselben Geraden gleich ist. Darum bilden die Geraden *F* ... ein einschaliges Hyperboloid H, dessen Leitlinien: die Gerade *L*, die horizontal-projicirende Gerade *Z* und der Kreis *H* (welcher die Spuren aller Geraden *F* ... enthält), als dessen horizontale Spur, sind.

Die zu construirende Selbstschattengrenze *S* können wir als die Schnittcurve dieses Hyperboloids mit der Kegelfläche K betrachten und auf Grund dessen ihre Tangenten als den Schnitt der beiden, im Punkte *a* zu beiden Flächen construirten Berührungsebenen, bestimmen. Die Tangente im Punkte *m* zu dem Kreise *K* ist die horizontale Spur der betreffenden Berührungsebene der Kegelfläche. Die Berührungsebene des Hyperboloids im Punkte *d* ist durch die Geraden *F* des einen und *G* des zweiten Systems bestimmt. Durch die Spurpunkte *h* und *h'* dieser Geraden geht die Spur dieser zweiten Berührungsebene. Der Schnittpunkt *p* der Spuren beider Ebenen bestimmt mit dem Punkte *d* die gesuchte Tangente *T*. —

Diese Construction der Selbstschattencurve so wie ihren Tangenten hat volle Geltung auch für die gerade Schraubenfläche als einem Specialfalle der schiefen Schraubenfläche.

Die Kegelfläche K geht in eine mit der Projectionsebene paral-

Digitized by Go

Ausführung des Vertrages durch Schiedsrichter, welche die Parteien ernennen, oder durch Gerichte, welche die Parteien anrufen, wird nicht gehindert.

F. Freiherr v. [illegible]

Nr. 3.

Bekanntmachung, betreffend die Ausführung des Vertrages vom 10. Mai 1871.

Auf Grund des Artikels 2 des Gesetzes, betreffend die Ausführung des Vertrages vom 10. Mai 1871, vom 9. Juni 1871 (Reichs-Gesetzbl. S. 212) wird hierdurch bekannt gemacht, daß Seine Majestät der König von Württemberg, Seine Majestät der König von Bayern und Seine Königliche Hoheit der Großherzog von Baden, Namens des Deutschen Reichs, mit Frankreich übereingekommen sind, daß

1) die Ausführung der Artikel 11 und 12 des Vertrages vom 10. Mai 1871 in Betreff der Eisenbahnen, welche in Folge der Abtretung von Gebietstheilen Frankreichs an das Deutsche Reich in Betrieb kommen, durch eine gemischte Kommission erfolgen soll, welche aus einem Kommissar für jede der beiden Regierungen besteht;

2) die Kommissare sich über die Bestimmung der Linien, welche in Gemäßheit des Artikels 11 des Vertrages vom 10. Mai 1871 in Betrieb kommen, zu einigen haben, und daß, wenn sie sich nicht einigen können, die Entscheidung einem Schiedsrichter zu übertragen ist, welcher von den Regierungen gemeinschaftlich ernannt wird;

3) die Kommissare sich über die Bedingungen, unter welchen die Linien in Betrieb kommen, zu einigen haben, und daß, wenn sie sich nicht einigen können, die Entscheidung einem Schiedsrichter zu übertragen ist, welcher von den Regierungen gemeinschaftlich ernannt wird;

4) die Kommissare sich über die Tarife zu einigen haben, welche in Gemäßheit des Artikels 12 des Vertrages vom 10. Mai 1871 auf den in Betrieb kommenden Linien zu bestimmen sind, und daß, wenn sie sich nicht einigen können, die Entscheidung einem Schiedsrichter zu übertragen ist, welcher von den Regierungen gemeinschaftlich ernannt wird;

5) die Kommissare sich über die Bedingungen, unter welchen die Linien in Betrieb kommen, zu einigen haben, und daß, wenn sie sich nicht einigen können, die Entscheidung einem Schiedsrichter zu übertragen ist, welcher von den Regierungen gemeinschaftlich ernannt wird;

6) die Kommissare sich über die Tarife zu einigen haben, welche in Gemäßheit des Artikels 12 des Vertrages vom 10. Mai 1871 auf den in Betrieb kommenden Linien zu bestimmen sind, und daß, wenn sie sich nicht einigen können, die Entscheidung einem Schiedsrichter zu übertragen ist, welcher von den Regierungen gemeinschaftlich ernannt wird;

7) die Kommissare sich über die Bedingungen, unter welchen die Linien in Betrieb kommen, zu einigen haben, und daß, wenn sie sich nicht einigen können, die Entscheidung einem Schiedsrichter zu übertragen ist, welcher von den Regierungen gemeinschaftlich ernannt wird;

8) die Kommissare sich über die Tarife zu einigen haben, welche in Gemäßheit des Artikels 12 des Vertrages vom 10. Mai 1871 auf den in Betrieb kommenden Linien zu bestimmen sind, und daß, wenn sie sich nicht einigen können, die Entscheidung einem Schiedsrichter zu übertragen ist, welcher von den Regierungen gemeinschaftlich ernannt wird;

9) die Kommissare sich über die Bedingungen, unter welchen die Linien in Betrieb kommen, zu einigen haben, und daß, wenn sie sich nicht einigen können, die Entscheidung einem Schiedsrichter zu übertragen ist, welcher von den Regierungen gemeinschaftlich ernannt wird;

10) die Kommissare sich über die Tarife zu einigen haben, welche in Gemäßheit des Artikels 12 des Vertrages vom 10. Mai 1871 auf den in Betrieb kommenden Linien zu bestimmen sind, und daß, wenn sie sich nicht einigen können, die Entscheidung einem Schiedsrichter zu übertragen ist, welcher von den Regierungen gemeinschaftlich ernannt wird;

sei. Aus der letztern Gleichung findet man, wenn $\partial\tau$, $\partial\vartheta$ die Contigenzwinkel der Tangente und Krümmungsaxe bedeuten:

$$\partial\varphi = \frac{g'\partial h' - h'\partial g'}{g'^2 + h'^2} = \frac{g'(n\,\partial\vartheta - h\,\partial\tau) - h'(m\,\partial\vartheta - g\,\partial\tau)}{g'^2 + h'^2}$$
$$= \frac{f\,\partial\vartheta + l\,\partial\tau}{1 - f'^2}$$

daher

$$f'\partial\varphi = \frac{-f\partial l + l\partial f}{f^2 + l^2} = \partial \operatorname{arc\,tg} \frac{f}{l} \qquad (2)$$

und

$$\Omega c^{-2} = 2k_1 \mathrm{R}$$

wo die ganze Zahl k_1 zunächst unbekannt bleibt. Ihr Wert hängt von der Anzahl der Vorzeichenwechsel von f und l ab. Da l für sich nur eine gerade Anzahl Wechsel erfahren kann, so muss k_1 gerade sein und sei $= 2k_2$. Dann zeigt die erste Gl. (1), dass (wofern nicht f' constant $= 1$ ist)

$$-k < k_2 < k$$

sein muss. Macht also die Hauptnormale nur einen Umlauf um die x Axe, so dass $k = 1$ wird, so ist $k_2 = 0$ und der Satz richtig.

Gehe ferner μ_1 und ν_1 mal l bei positivem f, μ_2 und ν_2 mal bei negativem f vom $+$ zum $-$ und vom $-$ zum $+$ über, dann ist

$$k_1 = \mu_1 - \nu_1 - \mu_2 + \nu_2$$

Es muss aber sein

$$0 = \mu_1 - \nu_1 + \mu_2 - \nu_2$$

folglich ist

$$k_1 = 2(\mu_1 - \nu_1) = -2(\mu_2 - \nu_2)$$

oder

$$k_2 = \mu_1 - \nu_1 = -(\mu_2 - \nu_2) \qquad (3)$$

Da ferner

$$\partial \operatorname{arc\,tg} \frac{f}{l} = -\partial \operatorname{arc\,tg} \frac{l}{f}$$

ist, so lässt sich bei Bestimmung von k_2 auch die Tangente mit der Binormale vertauschen, während k_2 nur sein Vorzeichen wechselt.

Ausreichende und notwendige Bedingung des Satzes ist also, dass der Winkel zwischen der Binormale und einer beliebigen Geraden, in Intervallen wo der Winkel zwischen der Tangente und jener Geraden spitz ist, ebenso oft aus einem spitzen in einen stumpfen übergeht als umgekehrt.

Ist diese Bedingung für eine Gerade erfüllt so ist sie es für jede. Ueberdies ist sie dann mit vertauschten Rollen von Tangente und Binormale erfüllt und umgekehrt.

Gleichwol möchte dieser weitesten Ausdehnung des Satzes eine engere Begrenzung vorzuziehen sein. Er umfasst nämlich auch Fälle, wo zu seiner Verification Flächenstücke auf der einen Seite doppelt, auf der andern negativ gerechnet müssen, und verliert durch diese notwendigen Interpretationen seine Einfachheit. Solche Fälle können indes nur stattfinden, wo die sphärische Curve Doppelpunkte hat. Schliessen wir aber Doppelpunkte aus, so tritt das erstgenannte Kriterium in Kraft; denn dann kann die sphärische Curve einen Punkt der Kugelfläche nur einmal umlaufen. Mit den Doppelpunkten werden dann zugleich die mehrmals durchlaufenen Curven ausgeschlossen, für welche der Satz nie richtig ist. Letzterer würde nun lauten:

Ein Kugelradius in gleicher Richtung mit der Hauptnormale einer geschlossenen und bis auf 2. Ordnung stetigen Curve geführt zeichnet auf der Kugelfläche eine geschlossene Curve, die, wenn sie keine Doppelpunkte hat, die Kugelfläche in zwei gleiche Teile teilt.

Das Vorstehende lässt es ungewiss erscheinen, ob es geschlossene Curven gibt, für welche die Bedingungen des Satzes nicht erfüllt sind, für welche also k_2 nicht null ist. Den einfachsten Beweis für deren Existenz geben aber die Curven cyklischer Torsion *). Denn deren Hauptnormale hat constante Neigung $< R$ gegen eine feste Axe, so dass die sphärische Curve ein nichtgrösster Kreis wird. Ihre specifische Gleichung ist

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \cot^2\alpha \quad (\alpha \text{ constant})$$

woraus sich

$$f' = \sin\alpha; \quad \Omega = 4k\mathrm{R}\sin\alpha$$

ergibt. Setzt man $\sin\alpha$ gleich einem rationalen Bruch und s proportional der Krümmungsbreite λ, so schliesst sich die Urcurve stets nach einer Variation von λ um ein Vielfaches von $4R$, und k erweist sich als beliebige, durch $\sin\alpha$ darstellbare Zahl. Die Kugelfläche wird beliebig rational geteilt.

Da ein Beispiel zum Beweise genügt, sei

$$\sin\alpha = \tfrac{1}{2}; \quad s = a\lambda$$

dann wird

$$x = -\frac{a}{2}\sqrt{3}\cos\lambda; \quad y = \frac{a}{4}(3\sin\lambda + \tfrac{1}{3}\sin 3\lambda)$$

$$z = -\frac{a}{4}(3\cos\lambda + \tfrac{1}{3}\cos 3\lambda)$$

*) Hoppe, Analytische Geometrie § 66. Genn. Arch. LVI. S. 65.

Diese Curve schliesst sich nach Variation von λ um 4R und hat in diesem Intervalle keinen Doppelpunkt. Ihre Hauptnormale hat die Richtungscosinus:

$$f' = \tfrac{1}{2};\quad g' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\lambda;\quad h' = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\lambda$$

woraus

$$\varphi = 2\lambda + \mathrm{R}$$

daher wird der sphärische Kreis zweimal durchlaufen. Zwischen ihm und dem Aequator liegt die Zone

$$\tfrac{1}{2}\Omega = 2\mathrm{R}c^2 = \frac{c^2}{2}.8\mathrm{R}\sin\alpha$$

daher ist $k = 2$. Ferner findet man:

$$f = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\lambda;\quad l = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\lambda$$

woraus man leicht erkennt, dass

$$\mu_1 = 1;\quad \nu_1 = 0;\quad k_2 = 1$$

Demnach wird die Kugelfläche im Verhältniss 1:3 geteilt, was die Allgemeingültigkeit des Craig'schen Satzes augenfällig widerlegt.

R. Hoppe.

3.

Ein Satz über Determinanten.

Es soll folgender Satz bewiesen werden:

Die Determinante von 4 Determinanten, deren je 2 in einer Reihe stehende nur eine ungleiche Verticalreihe haben, ist gleich dem Product der 2 Determinanten, die man aus den erstern durch die allein noch übrigen Combinationen der 2 ungleichen Reihen erhält.

Bezeichnen wir abkürzend durch $|abef\ldots|$ die Determinante eines Systems, dessen Horizontalreihen aus der Reihe $abef\ldots$ durch Hinzufügung von Indices hervorgehen; so behauptet der Satz, dass

$$\begin{vmatrix} |ace\ldots| & |ade\ldots| \\ |bce\ldots| & |bde\ldots| \end{vmatrix} = |abe\ldots|\,.\,|cde\ldots|$$

sei.

Zuerst ist nämlich leicht zu beweisen, dass jeder der 2 Factoren der Rechten Factor der Linken ist. Denn lässt man den Factor $|abe\ldots|$ verschwinden, so ist

$$\begin{aligned} a &= b\beta + e\varepsilon + f\zeta + \ldots \\ a_1 &= b_1\beta + e_1\varepsilon + f_1\zeta + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

und nach Einsetzung dieser Werte verschwindet die Linke. Das gleiche gilt vom Factor $|cde\ldots|$.

Ferner ersieht man auch sogleich, dass beide Factoren der Rechten unter einander keinen Factor gemein haben, wenn alle verschieden bezeichnete Elemente unabhängig sind. Denn betrachtet man den erstern und den letztern als lineare Function der Unabhängigen $a, a_1, \ldots$, bzhw. $c, c_1, \ldots$, so würde jeder gemeinsame Factor beider gemeinsamer Factor von allen Coefficienten dieser Unabhängigen d. i. von ihren entsprechenden Unterdeterminanten sein müssen. Ein solcher müsste dann irgend welche Elemente beider Systeme enthalten, und diese Elemente müssten in allen Unterdeterminanten vorkommen. Dies ist nicht der Fall; denn jedes Element fehlt in irgend einer Unterdeterminante.

Aus beiden Ergebnissen folgt nun, dass die ganze Rechte. d. i. ein Ausdruck von gleichem Grade mit der Linken, Factor der Linken ist, so dass beide Seiten der Gleichung bis auf einen numerischen Factor gleich sein müssen.

Um letztern zu bestimmen, setze man alle Elemente der Rechten ausser den Diagonalen

$$ab_1e_2\ldots \quad \text{und} \quad cde_2\ldots$$

null, dann wird die Linke

$$\begin{vmatrix} 0 & ad_1e_2\ldots \\ -b_1ce_2\ldots & 0 \end{vmatrix} = ab_1e_2\ldots cd_1e_2\ldots$$

also der Rechten gleich, und der Quotient $= 1$, der Beweis des anfänglichen Satzes folglich vollständig.

R. Hoppe.

Digitized by Google

4.

Ueber die Grenze der Stabilität eines longitudinal comprimirten geraden elastischen Stabes.

In einem Aufsatze über Biegung prismatischer Stäbe, Poggendorff Ann. CII. S. 227—245, 1857, habe ich (S. 237) bewiesen, dass ein gerader elastischer Stab durch Longitudinalcompression erst dann gebogen werden kann, wenn dieselbe eine gewisse endliche Grenze überschreitet, und diese Grenze bestimmt. Eine abweichende Ansicht war mir damals nicht bekannt. Später bin ich aber wiederholt der auf Rechnung gestützten Ansicht, die ich für die gewöhnliche halten muss, begegnet, dass ein gerader Stab bei der geringsten Compression sich zu biegen anfängt. Der Grund der Abweichung liegt nicht in Principien und Voraussetzungen, sondern in der Rechnung; ihn zu zeigen ist der Zweck des Folgenden.

Unveränderlichkeit des Normalschnitts ist gemeinsame Annahme der beiderseitigen Rechnungen; ihre Zulässigkeit kann wol hier, wo es sich um keine oder eben beginnende Biegung handelt, nicht in Frage kommen. Die Curve der Mittellinie (d. i. Ort des Querschnitts-Schwerpunktes) war eben. Auf beliebige einzelne Punkte derselben wirkten Kräfte in dieser Ebene. Aus der Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten ergaben sich die 2, von den Grenzbedingungen unabhängigen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(1-\frac{1}{\sigma'}\right)x'+by'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho\sigma'}\right)\right\}=0 \\ \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(1-\frac{1}{\sigma'}\right)y'-bx'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\varrho\sigma'}\right)\right\}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wo σ den ungespannten, s den actuellen Bogen der Mittellinie bis zum Punkte (xy), der Accent die Differentiation nach s, ϱ den Krümmungsradius von s, f den Querschnitt, bf sein Trägheitsmoment für die Biegungsaxe bezeichnet. Auch diese Gleichungen finden sich noch überall in Uebereinstimmung.

Hier setzt nun die gewöhnliche Rechnung, mit Vernachlässigung höherer Potenzen der Transversalverschiebungen, vor der Integration

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{(wo die } y \text{ transversal gerichtet sind)} \qquad (2)$$

und behandelt die Gleichungen als lineare. Lässt man sie aber, indem man sie als genau geltend betrachtet, unverändert, so sind sie ohne alle Vernachlässigung in geschlossener Form integrabel. Das

Digitized by

agora que a massa também oscilasse. Se chamarmos esse novo período de T', a nova frequência angular será $\omega' = 2\pi/T'$. Como a massa total agora é $M + m$, a nova frequência angular também pode ser escrita como $\omega' = \sqrt{k/(M+m)}$. Igualando as duas expressões para ω', temos

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T'^2} = \frac{k}{M+m}$$

$$\Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

$$\Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k} + \frac{m}{k}}$$

$$\Rightarrow T' = \sqrt{T^2 + \frac{4\pi^2 m}{k}}$$

$$\Rightarrow T' = \sqrt{T^2 + 4\pi^2 \frac{m}{k}}$$

RESPOSTA DA QUESTÃO 3: [A]

RESPOSTA DA QUESTÃO 4: [C]

[I] Incorreta. Pois, a velocidade máxima é dada por $v_{max} = \omega A$, ou seja, depende da amplitude.

[II] Correta. Pois, a frequência angular é dada por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ou seja, depende da massa.

[III] Incorreta. Pois, a energia mecânica é dada por $E = \frac{kA^2}{2}$, ou seja, depende da amplitude.

[IV] Correta. Pois, a energia mecânica é dada por $E = \frac{kA^2}{2}$, ou seja, depende da constante elástica.

RESPOSTA DA QUESTÃO 5: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 6: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 7: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 8: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 9: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 10: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 11: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 12: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 13: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 14: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 15: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 16: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 17: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 18: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 19: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 20: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 21: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 22: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 23: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 24: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 25: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 26: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 27: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 28: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 29: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 30: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 31: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 32: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 33: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 34: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 35: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 36: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 37: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 38: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 39: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 40: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 41: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 42: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 43: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 44: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 45: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 46: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 47: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 48: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 49: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 50: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 51: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 52: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 53: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 54: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 55: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 56: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 57: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 58: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 59: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 60: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 61: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 62: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 63: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 64: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 65: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 66: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 67: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 68: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 69: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 70: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 71: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 72: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 73: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 74: [A]

[A] Correta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[B] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[C] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[D] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

[E] Incorreta. Pois, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

RESPOSTA DA QUESTÃO 75: [A]

[A] Correta. Pois, $\om

Die so bestimmte endliche Compression ist diejenige, in deren Grenzen die gerade Gestalt des Stabes stabil, eine Biegung unmöglich ist.

Wendet man gegen die Geltung dieses Resultats ein, dass eine Berücksichtigung der höhern Potenzen der Transversalverschiebung illusorisch sei, sofern sie die Grenzen der Elasticitätstheorie übersteige, so kann man aus diesem Gesichtspunkt höchstens die Genauigkeit des gefundenen Stabilitätsintervalls in Zweifel ziehen, nicht aber folgende Consequenzen bestreiten.

Ist das auf die lineare Form der Differentialgleichungen gestützte Ergebniss in Bezug auf Transversalverschiebung, Gestalt der Biegungscurve, Spannung u. s. w. das Aeusserste, was die Elasticitätstheorie zu leisten vermag, so ist die weitere Folgerung auf ein Stabilitätsintervall $= 0$ eine Ueberschreitung ihrer Competenz, weil sich das Resultat als abhängig von den als unbekannt vernachlässigten Elementen erwiesen hat, und ein Rechnungsfehler. Die auf diesem Fehler beruhende gewöhnliche Ansicht hat gegenüber der vorstehenden Aufstellung keinen Anspruch auf Geltung.

Das Vorstehende will ich noch in Vergleich stellen mit dem, was Grasshof in seinem Werke: „Festigkeitslehre 1866“ über den angeregten Punkt sagt. Er nennt gleichfalls die Methode, welche zu einem Stabilitätsintervall $= 0$ führt, die gewöhnliche und erklärt ebenso das irrige Resultat durch die in der Substitution (2) begangene Vernachlässigung. Uebereinstimmend ist auch das durch Berücksichtigung der Differenz von ihm berechnete Stabilitätsintervall (abgesehen von der unmerklichen Abweichung, dass in Gl. (3) s_1^2 statt $s_1 \sigma_1$ steht). Seine Rechnung selbst hingegen ist ganz verschieden: eine genaue Integration vollzieht er nicht, sondern leitet den gesuchten Wert approximativ mit elementaren Mitteln her.

Die Vergleichung liefert mir manche willkommene Rechtfertigung. Zunächst kann ich mich auf Grasshof's weiter reichende Erfahrung berufen, indem ich jene irrige Ansicht die gewöhnliche genannt habe. Ist sie nun 9 Jahre nach ihrer Berichtigung trotzdem die gewöhnliche geblieben, so bürgt nichts dafür, dass sie es nicht auch heute noch ist, und kann die hier behandelte Frage durch ihr Alter nicht gegenstandslos geworden sein.

R. Hoppe.

Digitized by Go

Der Kommentar zu Nikolaj

Nikolaj Kap. 1 Vers 1 Der Anfang ist Gott, er ist Schöpfer und alle Geschöpfe sind von ihm. Er ist Herr in Ewigkeit, Gerechtigkeit, Barmherzigkeit, Wahrheit, Liebe, Weisheit, Allmacht, Güte, Licht, Leben, Auferstehung, Ruhe, Frieden, Freude, Heiligkeit, Reinheit, Einheit, Ordnung, Gesetz, Gnade, Wahrheit, Gericht, Gericht, Gericht.

Nikolaj Kap. 1 Vers 2 Im Anfang war das Wort, das Wort war bei Gott, und das Wort war Gott. Dasselbe war im Anfang bei Gott. Alle Dinge sind durch das Wort gemacht, und ohne das Wort ist nichts gemacht, was gemacht ist. In ihm war das Leben, und das Leben war das Licht der Menschen. Und das Licht scheint in der Finsternis, und die Finsternis hat es nicht begriffen. Es war ein Mensch, von Gott gesandt, sein Name war Johannes. Dieser kam zum Zeugnis, um von dem Licht zu zeugen, damit alle durch ihn glaubten. Er war nicht das Licht, sondern er sollte von dem Licht zeugen. Das wahrhaftige Licht, welches jeden Menschen erleuchtet, war in die Welt gekommen. Er war in der Welt, und die Welt ist durch ihn geworden, und die Welt hat ihn nicht erkannt. Er kam in sein Eigentum, und die Seinen nahmen ihn nicht auf. Allen aber, die ihn aufnahmen, denen gab er Macht, Kinder Gottes zu werden, denen, die an seinen Namen glauben, die nicht aus Blut noch aus dem Willen des Fleisches noch aus dem Willen des Mannes, sondern aus Gott geboren sind. Und das Wort ward Fleisch und wohnte unter uns, und wir sahen seine Herrlichkeit, eine Herrlichkeit als des Eingeborenen vom Vater, voller Gnade und Wahrheit. Johannes zeugt von ihm und ruft und sagt: Dieser war es, von dem ich sagte: Der nach mir kommt, ist vor mir gewesen, denn er war eher als ich. Und aus seiner Fülle haben wir alle empfangen, und Gnade um Gnade. Denn das Gesetz ist durch Mose gegeben worden, die Gnade und die Wahrheit ist durch Jesus Christus geworden. Niemand hat Gott jemals gesehen; der eingeborene Sohn, der in des Vaters Schoß ist, der hat Kunde gebracht.

liegen überdies parweise mit jedem der 4 harmonischen Punkte M, N, P, Q auf AD in einer Geraden, und jeder der Punkte des einen Kreises liegt mit einem Punkte des andern und einem festen Punkt R auf AD in einer Geraden.

Betrachten wir ferner die 8 Punkte eines jeden der beiden Kreise, so finden wir, dass wenn wir den Kreis in einem bestimmten Sinne durchlaufen, die Verbindungslinien des 1. und 5ten, 2. und 6ten, 3. und 7ten, 4. und 8ten Punktes sich in einem Punkte, dem Pole der Linie AD in Bezug auf dem Kreis, schneiden. Der 1., 3., 5., 7te und ebenso der 2., 4., 6., 8te Punkt bilden überdies auf den Kreisen harmonische Würfe.

Weingarten, im October 1884.

B. Sporer.

Ueber die Giftwirkung einiger Verbindungen aus der Schwefelcyanreihe.

Von

Dr. Arthur Kossler,

Assistenten am Kaiserlichen Gesundheitsamte.

Seine Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdankt der Verfasser dem Wunsche, die Giftwirkung des Schwefelcyanammoniums, welches in der Technik vielfach Verwendung findet, kennen zu lernen. Da dieses Salz, wie bekannt, in seinen Eigenschaften mit dem Harnstoff grosse Aehnlichkeit besitzt, so lag es nahe, auch die Giftwirkung des letzteren mit in den Kreis der Untersuchungen zu ziehen. Ferner wurden noch einige Verbindungen aus der Schwefelcyanreihe, welche sich in der Literatur vorfanden, in den Bereich der Untersuchungen gezogen.

Ueber Harn- und Schwefelcyanammonium liegen bereits eine Reihe von Untersuchungen vor, welche sich jedoch nur auf die Wirkung grösserer Dosen erstrecken. Ueber die Wirkung kleinerer Dosen, wie sie bei dauernder Einverleibung in Betracht kommen, ist nichts bekannt. Es war daher zunächst die Aufgabe, die Wirkung kleinerer Dosen zu studiren, um zu ermitteln, ob eine Anhäufung im Körper stattfindet, und ob sich Vergiftungserscheinungen bemerkbar machen.

Zur Abkürzung werde ich die gleichseitige Hyperbel, welche CX und CY zu Asymptoten hat und durch die Punkte P, Q ... hindurch geht, durch das Symbol $H(CX, CY; P, Q \ldots)$ andeuten. Weiter mag das mittelst Parallelen zu CX und CY auf der Sehne PQ als Diagonale beschriebene Rechteck als „das Asymptotenrechteck PQ" der Hyperbel bezeichnet werden. Und endlich werde ich zwei Gerade, die wie die Diagonalen PQ und RS dieses Asymptotenrechtecks nach verschiedenen Seiten mit jeder der Aymptoten gleiche Winkel bilden, in Bezug auf CX und CY „antiparallel" zu einander nennen [1]).

2. „Die Tangente der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P)$ im Punkte P ist antiparallel zu CP in Bezug auf die Asymptoten".

Wenn man den Punkt Q (Fig. 1.) der Hyperbel entlang dem Punkte P fortwährend näher treten lässt, so werden PQ und RS immer antiparallel zu einander bleiben in Bezug auf die Asymtoten, PQ in die Tangente der Hyperbel in P, RS in CP übergeführt werden. Es ist also dieser ebenfalls sehr bekannte Satz eine Folge des Vorhergehenden [2]).

3. „Wenn man (Fig. 2.) die Seiten PR und PS des Asymptotenrechtecks PQ der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P, Q)$ um

---

1) Wenn man den besonderen Charakter der von den conjugirten Durchmessern der gleichseitigen Hyperbel gebildeten quadratischen Involution, nach welchem die Asymptoten die Teilstrahlen sind von den von irgend einem Paare conjugirter Durchmesser gebildeten Scheitelwinkeln, als bekannt annimmt, so wird oben stehender Satz auch bewiesen mittelst der Bemerkung, dass die Gerade, welche C mit der Mitte der Strecke PQ verbindet, als zu der Sehne PQ conjugirter Durchmesser antiparallel zu PQ ist in Bezug auf die Asymptoten und die deshalb mit der zweiten Diagonale des Asymptotenrechtecks PQ zusammenfällt. Da eine geometrische Behandlung des Lehrstoffes den Pascal'schen Satz unmittelbar an die projectivische Erzeugung der Kegelschnitte festknüpft, so habe ich es vorgezogen, den diesem Satze entnommenen Beweis anzudeuten.

In seiner allgemeinen Form führt der Satz zur Construction einer Hyperbel, von welcher drei Punkte und die Richtungen der Asymptoten gegeben sind („Leçons de géométrie analytique" de Briot et Bouquet, dixième édition, livre 3, chapitre 9, exercice 4 et livre 3, chap. 3, exerc. 14).

2) Auch dieser Satz folgt aus dem besonderen Charakter der von den conjugirten Durchmessern gebildeten Involution. Nach diesem wird auch die Verbindungslinie der Mitten zweier einander unter einem gegebenen Winkel schneidenden Sehnen der gleichseitigen Hyperbel aus dem Mittelpunkte dieser Curve immer unter dem nämlichen Winkel gesehen („Traité de géométrie analytique" de Piquet, tome I, § 167, exercice 8).

Digitized by Google

ihre eigene Länge bis in T und U verlängert, die neuen Endpunkte T und U mit C verbindet und die Schnittpunkte V und W von CT mit SQ und von CU mit RQ bestimmt, so hat man in V und W zwei Punkte der Tangente in P an $H(CX, CY; P, Q)$ erhalten. Und umgekehrt liegt Q auf der Hyperbel $H(CX, CY; P)$ und ist PVW die Tangente dieser Curve in P, wenn die auf der angegebenen Weise aus P, Q und den senkrecht auf einander stehenden Geraden CX und CY hervorgehenden Punkte V und W auf einer durch P gehenden Gerade liegen".

Ist Q ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P)$, so geht nach Artikel 1. die wegen der Umkehrung des Satzes in der Figur nicht angegebene zweite Diagonale RS des Asymptotenrechtecks PQ durch C. Wird nun CP von den Seiten QS und QR in V_1 und W_1 getroffen, so folgt aus $PR = RT$ und $PS = SU$ unmittelbar $V_1S = SV$ und $W_1R = RW$. Und diese Relationen zeigen, dass PV und PW nach Artikel 2. mit der Tangente der Hyperbel in P zusammenfallen.

Ist umgekehrt wol bekannt, dass die auf die angegebene Weise aus P, Q, CX, CY abgeleiteten Punkte V, W mit P in einer Geraden liegen, nicht aber dass Q ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P)$ und PVW die Tangente dieser Curve in P ist, so kann man wie folgt verfahren. Die Geraden VU und TW sind parallel, da sie wegen der Relationen $PS = SU$ und $PR = RT$ antiparallel zu PVW sind in Bezug auf die Asymptoten. Deshalb ist $CU : CW = CV : CT$ und da auch $CV : CT = CV_1 : CP$ ist, so ergiebt sich $CU : CW = CV_1 : CP$, d. h. die Geraden UV_1 und WP sind parallel. Also ist das Viereck $PVUV_1$ und ebenso das Viereck W_1TWP eine Raute; ausserdem sind diese Vierecke ähnlich und ähnlich liegend mit dem Punkte C als Aehnlichkeitspunkt und liegen deshalb ihre einander entsprechenden Mittelpunkte R und S mit C in einer Geraden, d. h. es geht die gleichseitige Hyperbel $H(CX, CY; P)$ nach Artikel 1. durch Q. Offenbar sind dann endlich auch die Geraden CP und PVW antiparallel in Bezug auf die Asymptoten und ist PVW also die Tangente der gleichseitigen Hyperbel $H(CX, CY; P, Q)$ in P.

Mit dem Auge auf Artikel 2. brauche ich kaum hervorzuheben, dass ich mit dem Satze dieses Artikels nicht die Anweisung einer Construction der Tangente in einem Punkte der gleichseitigen Hyperbel beabsichtige. Vielmehr wird er uns im Folgenden die Erkennung einer bestimmten Geraden als Tangente einer bestimmten gleichseitigen Hyperbel in einem bestimmten Punkte erleichtern [3]).

3) Man vergleiche den dritten Abschnitt, Artikel 31.

4. „Eine gleichseitige Hyperbel ist für irgend eins ihrer Paare von einander gegenüberliegenden Punkten P_1, P_2 (Fig. 3.) der Ort der Punkte P, für welche die Geraden PP_1 und PP_2 antiparallel sind in Bezug auf die Asymptoten".

Da die Büschel der in Bezug auf die zwei einander senkrecht schneidenden Geraden CX und CY antiparallel zu einander durch P_1 und P_2 gelegten Geraden P_1P und P_2P projectivisch sind, so ist der Ort der Punkte P ein durch P_1 und P_2 gehender Kegelschnitt. Ist P_1P zu CX, resp. CY parallel, so ist P_2P es auch; also ist der erzeugte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel mit zu CX und CY parallelen Asymptoten. Endlich sind die Tangenten dieser Curve in den Punkten P_1 und P_2 beide antiparallel zu P_1P_2, also zu einander parallel, d. h. der Mittelpunkt C der Strecke P_1P_2 ist Mittelpunkt der Curve, und diese Curve also auch die gleichseitige Hyperbel $H(CX, CY; P_1, P_2)$ [4]).

5. „Bewegen die Geraden PQ und RS sich antiparallel zu einander in Bezug auf irgend eine feste Gerade CV, und ist dies mit den Geraden PQ und TU in Bezug auf irgend eine andere feste Gerade CW der Fall, so ist der von RS und TU gebildete Winkel von unveränderlicher Grösse.

Sind PQ und RS antiparallel in Bezug auf die Asymptoten, PQ und TU antiparallel in Bezug auf die Achsen einer gleichseitigen Hyperbel, so stehen RS und TU auf einander senkrecht".

Lassen wir im ersten Teil des Satzes an die Stelle der gegebenen Geraden PQ, RS, TU ihre durch den Schnittpunkt C von CV und CW (Fig. 4.) geführte Parallelen CL, CM, CN treten, so ist Wkl. MCL = 2 Wkl. VCL und Wkl. NCL = 2 Wkl. WCL,

---

4) Die Bemerkung, dass die Verbindungslinien P_1P und P_2P von P_1 und P_2 mit irgend einem Punkte P der Curve $H(CX, CY; P_1, P_2)$ supplementäre Sehnen dieser Curve sind, wenn P_1 und P_2 einander diametral gegenüberliegen, führt in Verbindung mit dem besonderen Charakter der Involution der conjugirten Durchmesser ebenfalls zum Beweise des Satzes, welcher in dem bekannten mechanischen Probleme der Laterne, die mittelst eines über zwei nicht eben hoch liegende Punkte gespannten Seils gehoben wird, eine illustrirte Einkleidung gefunden hat. Da der geometrische Weg eher zum oben gegebenen Beweise führt, habe ich diesen vorgezogen.

Man vergleiche „Jacob Steiner's gesammelte Werke", erster Band, Seite 442, Satz 18, links b)

Digitized by Go

Zur Ehrenrettung des Hieb- und Stichhandschuhs.

Von Dr. Hans Gross, o. ö. Professor des Strafrechtes an der Universität Graz.

Im Jahrgange 1900 dieser Zeitschrift (Bd. 6, S. 1) habe ich einen Aufsatz über den Hieb- und Stichhandschuh veröffentlicht.

Die Veranlassung dazu war die Debatte, die über die Verwendung dieses Handschuhes im Reichsrate stattgefunden hatte. Ich habe damals die Ansicht vertreten, daß der Handschuh, der ja nur gegen Hieb- und Stichwaffen schützt, gegen Schußwaffen aber nicht, eine Waffe sei, die nur dem Verbrecher nützen könne, und daß es daher nicht gerechtfertigt sei, ihn zu gestatten.

Ich habe mich damals auf Erfahrungen gestützt, die ich in Prag gemacht hatte, wo ich Gelegenheit hatte, Verbrecher zu beobachten, die mit diesem Handschuh bewaffnet waren. Diese Verbrecher waren Einbrecher, die mit dem Handschuh bewaffnet, in Wohnungen eindrangen, um sich gegen Angriffe der Bewohner zu schützen. Ich habe damals auch Versuche mit dem Handschuh angestellt und gefunden, daß er gegen Hieb- und Stichwaffen wirklich schützt, daß er aber gegen Schußwaffen keinen Schutz bietet.

Ich habe dann noch von Herrn Professor Dr. Kopal und Herrn Professor Dr. Kratter, beide in Graz, Versuche mit dem Handschuh machen lassen, die meine Ansicht vollkommen bestätigten.

Nun hat Herr Professor Dr. Hans Schneickert in Berlin in dieser Zeitschrift (Bd. 7, S. 1) einen Aufsatz veröffentlicht, in dem er meine Ansicht bekämpft und den Handschuh in Schutz nimmt. Er hat auch Versuche mit dem Handschuh gemacht, die ihn zu dem Resultate führten, daß der Handschuh auch gegen Schußwaffen schützt.

Nach dem nun bewiesenen ersten Teile des Satzes ist die Sehne PQ, welche der Krümmungskreis im Punkte P von irgend einem Kegelschnitte in dieser Curve bestimmt, antiparallel zu der Tangente in P in Bezug auf die Achsen des Kegelschnittes, was dann auch schon Steiner zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes verwendet hat [8]). Aber bei der gleichseitigen Hyperbel führt die Anwendung des zweiten Teiles des vorhergehenden Satzes auf die oben angedeutete Lage der Sehne PQ. Ist nun weiter M die Mitte von PQ, so ist CM als zu der Sehne PQ conjugirter Durchmesser antiparallel zu PQ in Bezug auf die Asymptoten und also auch, da CP auf PQ senkrecht steht, antiparallel zu CP in Bezug auf die Achsen. Ebenso ist CP antiparallel zu der Normale PM_p in Bezug auf die Achsen, da CP antiparallel ist zu der Tangente in P in Bezug auf die Asymptoten. Also sind CM und PM_p beide antiparallel zu CP in Bezug auf die Achsen und deshalb zu einander parallel. Da nun der Punkt M_p offenbar der Schnittpunkt ist von der Normale PM_p mit der in M auf PQ errichteten Senkrechten MM_p, so ist ebenfalls CP zu MM_p parallel und $PCMM_p$ ein Parallelogramm.

Ist nun von H ausser den Asymptoten nur der Punkt P gegeben, so findet man den Krümmungsmittelpunkt folgendermaassen. Man errichtet in P eine Senkrechte auf die Verbindungslinie von P mit C, sucht die Mitte M der von den Asymptoten auf dieser Senkrechten bestimmten Strecke P_xP_y und macht die Strecke MM_p gleich und parallel zu CP.

Die von Steiner gegebene Construction des Krümmungsmittelpunktes wird illusorisch, wenn P einer der Scheitel der gleichseitigen

---

einem Kreise $\psi = x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$ offenbar kein Glied xy enthält. Denn wenn die das Glied xy nicht enthaltende Gleichung $F = 0$ in die Gleichungen $m_1 x + n_1 y + p_1 = 0$ und $m_2 x + n_2 y + p_2 = 0$ zerfällt, hat man $m_1 n_2 + m_2 n_1 = 0$, d. h. die beiden Geraden $mx + ny + p = 0$ sind antiparallel in Bezug auf die Achsen.

Einen anderen Beweis giebt Salmon („A treatise on conic sections", sixth edition, Art. 244).

Aus dieser Quelle fliesst auch die Lösung des Problemes, welches aussagt, dass die Teilstrahlenpaare der von den Gegenseitenpaaren eines Kreisvierecks gebildeten Scheitelwinkel drei zu drei parallel sind (Briot et Bouquet a. a. O., livre 2, chapitre 3, exercice 17, oder in der ursprünglichen Fassung: Steiner, a. a. O., erster Band, Seite 128, Satz 7).

Man vergleiche auch „Die Geometrie der Lage" von Dr. Th. Reye, 2te Auflage, 1. Abteilung, Seite 184, Aufgabe 119.

8) Steiner, a. a. O., zweiter Band, Seite 17, Satz 6).

Bereich der Ehe und Familie nicht beschränken, was die Verfassung ausdrücklich verbietet (Art. 6 Abs. 1 GG).

Die Beschwerdeführerin hat daher Anspruch auf Aufhebung der angefochtenen Urteile und Zurückverweisung der Sache an das Landgericht.

Die Entscheidung über die Kosten des Verfahrens und die Festsetzung des Gegenstandswertes beruht auf § 13 Abs. 1 und § 14 Abs. 1 des Gesetzes über die Kostenfreiheit in Verfahren vor dem Bundesverfassungsgericht.

Art. 6 Abs. 5 des genannten Gesetzes, der eine Kostenfreiheit auch für Verfahren vorsieht, die von Gemeinden oder Gemeindeverbänden eingeleitet werden, ist auf die Beschwerdeführerin nicht anwendbar. Sie ist zwar eine Gemeinde, aber sie hat die Verfassungsbeschwerde nicht in dieser Eigenschaft eingelegt, sondern für sich als Privatperson. Sie ist daher nicht anders zu behandeln als jeder andere Beschwerdeführer.

Die Entscheidung ist mit 5 gegen 3 Stimmen ergangen.

Leibholz — Rupp — Geiler — Haugg — Ritterspach — Wand — Dr. Rinck — Dr. Federer — Dr. Ritterspach

Abweichende Meinung der Richter Dr. Leibholz, Dr. Rupp und Geiler zu dem Urteil des Ersten Senats vom 26. März 1957 — 1 BvR 208/56 —

Wir können der Entscheidung des Ersten Senats nicht beitreten. Wir sind der Auffassung, daß die Verfassungsbeschwerde der Stadt Wanne-Eickel unzulässig ist, weil sie nicht begründet hat, daß sie durch die Vorschrift des Bundesgesetzes über die Gewährung von Hilfe für Wohnungsbau für Angehörige der Bundeswehr, der Verbündeten Streitkräfte und des Bundesgrenzschutzes vom 26. Februar 1957 (BGBl. I S. 189) in ihren Rechten verletzt sein könnte.

Nach ständiger Rechtsprechung des Bundesverfassungsgerichts ist eine Verfassungsbeschwerde nur dann zulässig, wenn der Beschwerdeführer durch die Vorschrift, gegen die sich seine Beschwerde richtet, selbst, gegenwärtig und unmittelbar in seinen Grundrechten verletzt ist (BVerfGE 1, 97 [101]; 2, 237 [246]; 3, 383 [390]; 4, 331 [338]; 5, 34 [36]; 6, 445 [447]; 7, 99 [105]; 7, 282 [284]; 8, 81 [86]; 8, 222 [227]; 9, 3 [6]; 9, 89 [93]; 9, 109 [114]; 9, 167 [169]; 9, 194 [199]; 9, 268 [272]; 10, 89 [99]; 10, 118 [121]; 10, 264 [267]; 10, 302 [307]; 11, 234 [238]; 11, 255 [263]; 11, 282 [286]; 11, 351 [360]; 12, 81 [85]; 12, 113 [116]; 12, 205 [210]; 12, 276 [279]; 13, 54 [81]; 13, 174 [175]; 13, 181 [185]; 13, 230 [232]; 13, 290 [297]; 14, 154 [156]; 14, 171 [179]; 14, 245 [247]; 14, 320 [325]; 15, 226 [230]; 15, 256 [262]; 15, 288 [290]; 16, 220 [228]; 16, 321 [328]; 17, 306 [313]; 18, 85 [92]; 18, 212 [215]; 19, 1 [5]; 19, 268 [273]; 20, 56 [94]; 20, 283 [290]; 21, 139 [143]; 21, 209 [215]; 21, 227 [233]; 21, 262 [268]; 21, 271 [278]; 21, 306 [311]; 21, 312 [317]; 21, 329 [332]; 21, 362 [372]; 21, 378 [382]; 22, 106 [111]; 22, 180 [204]; 22, 349 [360]; 23, 242 [246]; 23, 266 [270]; 23, 353 [365]; 24, 33 [48]; 24, 56 [62]; 24, 104 [106]; 24, 236 [244]; 24, 260 [263]; 24, 299 [304]; 24, 367 [394]; 25, 69 [71]; 25, 167 [171]; 25, 256 [263]; 25, 269 [282]; 25, 296 [302]; 25, 371 [396]; 26, 228 [237]; 26, 246 [256]; 26, 265 [274]; 26, 281 [292]; 27, 18 [28]; 27, 71 [78]; 27, 344 [350]; 28, 243 [260]; 28, 314 [323]; 28, 364 [370]; 28, 377 [391]; 29, 402 [408]; 30, 112 [116]; 30, 173 [188]; 30, 227 [241]; 31, 314 [322]; 31, 364 [368]; 32, 54 [68]; 32, 260 [267]; 32, 305 [308]; 33, 171 [181]; 33, 199 [203]; 33, 247 [258]; 33, 303 [330]; 34, 118 [126]; 34, 139 [145]; 34, 165 [181]; 34, 307 [313]; 35, 185 [189]; 35, 311 [320]; 35, 348 [360]; 36, 1 [11]; 36, 281 [290]; 37, 363 [391]; 38, 258 [270]; 38, 281 [297]; 39, 276 [294]; 40, 141 [156]; 40, 237 [246]; 41, 29 [43]; 41, 65 [71]; 41, 88 [119]; 41, 178 [184]; 41, 205 [211]; 41, 251 [266]; 41, 291 [308]; 41, 360 [370]; 42, 20 [28]; 42, 64 [73]; 42, 263 [284]; 42, 312 [325]; 43, 108 [118]; 43, 130 [135]; 43, 154 [165]; 43, 291 [385]; 44, 103 [119]; 44, 125 [142]; 44, 353 [373]; 45, 63 [74]; 45, 104 [121]; 45, 142 [168]; 45, 187 [245]; 45, 272 [288]; 45, 393 [399]; 46, 160 [164]; 46, 224 [236]; 46, 268 [286]; 47, 46 [79]; 47, 239 [246]; 47, 285 [311]; 47, 327 [367]; 48, 127 [159]; 48, 299 [315]; 48, 367 [373]; 48, 396 [402]; 49, 24 [53]; 49, 89 [124]; 49, 286 [298]; 50, 290 [331]; 51, 77 [87]; 51, 222 [233]; 51, 324 [343]; 51, 386 [396]; 52, 63 [82]; 52, 369 [379]; 53, 30 [65]; 53, 164 [178]; 53, 185 [196]; 54, 53 [67]; 54, 148 [153]; 54, 277 [291]; 54, 297 [299]; 54, 341 [357]; 55, 261 [268]; 56, 54 [70]; 56, 99 [105]; 56, 230 [238]; 57, 139 [159]; 57, 170 [175]; 57, 295 [319]; 58, 81 [109]; 58, 137 [144]; 58, 300 [319]; 59, 63 [85]; 59, 231 [254]; 60, 253 [295]; 61, 82 [104]; 61, 149 [198]; 62, 354 [366]; 63, 131 [139]; 64, 301 [317]; 65, 325 [345]; 66, 26 [37]; 66, 39 [57]; 66, 116 [130]; 67, 157 [169]; 67, 256 [274]; 67, 299 [318]; 68, 319 [325]; 69, 122 [132]; 69, 161 [165]; 70, 35 [51]; 70, 138 [165]; 70, 180 [188]; 70, 219 [229]; 71, 305 [337]; 72, 39 [43]; 72, 51 [61]; 72, 105 [113]; 72, 155 [170]; 72, 175 [196]; 73, 40 [65]; 73, 118 [152]; 73, 339 [374]; 74, 69 [78]; 74, 102 [114]; 74, 297 [317]; 75, 78 [96]; 75, 108 [154]; 75, 223 [232]; 75, 246 [263]; 75, 318 [328]; 76, 107 [114]; 76, 220 [229]; 76, 256 [298]; 77, 84 [103]; 77, 170 [214]; 77, 308 [328]; 78, 179 [196]; 78, 214 [226]; 78, 320 [329]; 78, 350 [356]; 79, 1 [17]; 79, 174 [201]; 79, 256 [264]; 79, 275 [279]; 79, 311 [339]; 80, 48 [51]; 80, 74 [85]; 80, 109 [120]; 80, 137 [150]; 80, 188 [214]; 81, 208 [214]; 81, 310 [325]; 82, 159 [178]; 82, 236 [258]; 82, 316 [320]; 83, 130 [139]; 83, 182 [194]; 83, 238 [295]; 84, 59 [72]; 84, 90 [121]; 84, 239 [268]; 85, 191 [204]; 85, 337 [345]; 86, 148 [153]; 86, 382 [389]; 87, 114 [138]; 87, 181 [198]; 87, 334 [340]; 88, 40 [45]; 88, 87 [95]; 88, 145 [166]; 88, 366 [376]; 89, 69 [82]; 89, 155 [171]; 89, 329 [351]; 90, 128 [136]; 90, 286 [337]; 91, 93 [107]; 91, 148 [175]; 91, 335 [338]; 92, 26 [35]; 92, 91 [109]; 92, 158 [175]; 92, 203 [230]; 92, 277 [316]; 93, 99 [111]; 93, 213 [238]; 93, 319 [338]; 94, 115 [135]; 94, 166 [193]; 94, 372 [391]; 95, 1 [15]; 95, 96 [128]; 95, 163 [171]; 95, 267 [288]; 96, 44 [51]; 96, 171 [181]; 96, 345 [365]; 97, 157 [165]; 97, 169 [176]; 97, 228 [268]; 97, 332 [341]; 98, 83 [97]; 98, 106 [117]; 98, 218 [251]; 98, 265 [299]; 99, 102 [114]; 99, 112 [118]; 99, 300 [315]; 100, 313 [354]; 101, 54 [72]; 101, 106 [121]; 101, 331 [346]; 102, 147 [163]; 102, 197 [207]; 102, 254 [296]; 103, 44 [63]; 103, 111 [136]; 103, 172 [182]; 103, 242 [263]; 104, 65 [70]; 104, 92 [94]; 104, 305 [315]; 105, 252 [277]; 105, 279 [300]; 106, 62 [82]; 106, 210 [216]; 107, 299 [310]; 108, 370 [386]; 109, 279 [306]; 110, 177 [191]; 110, 226 [253]; 110, 274 [287]; 111, 54 [65]; 111, 147 [154]; 111, 307 [316]; 112, 50 [60]; 112, 93 [107]; 112, 304 [312]; 113, 273 [287]; 113, 348 [363]; 114, 258 [280]; 114, 316 [333]; 115, 81 [90]; 115, 97 [110]; 115, 166 [179]; 115, 205 [229]; 116, 1 [13]; 116, 202 [222]; 117, 126 [139]; 117, 244 [258]; 118, 1 [8]; 118, 168 [182]; 118, 212 [230]; 119, 59 [65]; 119, 96 [113]; 119, 292 [301]; 120, 56 [74]; 120, 82 [96]; 120, 274 [296]; 121, 30 [56]; 121, 233 [238]; 122, 190 [196]; 122, 374 [394]; 123, 148 [172]; 123, 186 [238]; 123, 267 [341]; 124, 43 [61]; 124, 199 [220]; 125, 39 [78]; 125, 104 [123]; 125, 175 [223]; 126, 112 [131]; 126, 286 [302]; 127, 87 [114]; 127, 293 [325]; 128, 90 [100]; 128, 157 [187]; 128, 226 [244]; 129, 78 [101]; 129, 186 [204]; 130, 131 [142]; 130, 241 [255]; 131, 47 [53]; 131, 130 [138]; 131, 366 [410]; 132, 99 [126]; 132, 179 [188]; 132, 334 [338]; 133, 168 [199]; 133, 241 [247]; 133, 277 [316]; 134, 106 [117]; 134, 141 [151]; 134, 242 [295]; 135, 155 [233]; 135, 317 [333]; 136, 69 [77]; 136, 323 [332]; 137, 108 [117]; 137, 185 [241]; 137, 273 [313]; 138, 64 [93]; 138, 296 [328]; 139, 64 [111]; 139, 148 [173]; 139, 321 [368]; 140, 160 [198]; 140, 229 [232]; 140, 317 [338]; 141, 1 [20]; 141, 56 [73]; 141, 121 [131]; 141, 143 [170]; 141, 220 [272]; 142, 234 [259]; 142, 268 [280]; 143, 246 [321]; 144, 20 [33]; 144, 38 [48]; 144, 74 [94]; 145, 20 [36]; 145, 171 [181]; 145, 256 [278]; 146, 71 [116]; 146, 164 [177]; 147, 253 [310]; 148, 267 [280]; 149, 86 [90]; 149, 346 [366]; 150, 309 [326]; 151, 56 [67]; 151, 173 [182]; 151, 297 [314]; 152, 68 [71]; 152, 152 [174]; 152, 274 [289]; 153, 1 [30]; 153, 182 [189]; 154, 17 [39]; 154, 152 [160]; 154, 168 [180]; 155, 119 [125]; 155, 238 [282]; 156, 11 [37]; 156, 63 [91]; 156, 182 [192]; 156, 220 [247]; 157, 30 [43]; 157, 86 [97]; 157, 162 [205]; 158, 1 [12]; 158, 282 [319]; 159, 223 [237]; 159, 355 [363]; 160, 79 [97]; 160, 284 [289]; 161, 63 [71]; 161, 163 [167]; 161, 253 [268]; 162, 1 [10]; 162, 165 [173]; 162, 207 [215]; 163, 43 [54]; 163, 82 [97]; 163, 214 [233]; 163, 298 [304]; 164, 44 [53]; 164, 158 [165]; 164, 180 [193]; 165, 1 [19]; 165, 104 [113]; 165, 132 [136]; 165, 198 [211]; 166, 17 [22]; 166, 132 [137]; 166, 209 [216]; 167, 139 [146]; 167, 231 [236]; 167, 253 [272]; 168, 1 [5]; 168, 69 [75]; 168, 143 [150]; 168, 184 [195]; 168, 337 [350]; 169, 64 [72]; 169, 233 [249]; 170, 63 [72]; 170, 115 [131]; 170, 138 [175]; 170, 221 [230]; 171, 256 [263]; 171, 269 [290]; 172, 1 [6]; 172, 168 [181]; 172, 252 [270]; 173, 261 [271]; 173, 269 [297]; 174, 163 [182]; 174, 273 [291]; 175, 224 [233]; 175, 263 [273]; 176, 1 [21]; 176, 128 [136]; 176, 222 [234]; 177, 224 [237]; 178, 32 [39]; 178, 167 [175]; 178, 232 [246]; 179, 136 [143]; 179, 257 [263]; 180, 27 [34]; 180, 122 [131]; 180, 151 [155]; 181, 65 [71]; 181, 254 [264]; 182, 87 [112]; 182, 175 [187]; 182, 217 [233]; 183, 1 [9]; 183, 163 [169]; 183, 224 [241]; 184, 45 [51]; 184, 116 [121]; 184, 183 [199]; 185, 52 [58]; 185, 69 [73]; 185, 260 [273]; 186, 45 [48]; 186, 169 [174]; 186, 216 [225]; 187, 69 [73]; 187, 104 [111]; 187, 187 [203]; 188, 40 [44]; 188, 85 [90]; 188, 198 [205]; 189, 79 [85]; 189, 142 [148]; 189, 196 [201]; 190, 112 [117]; 190, 159 [178]; 190, 241 [247]; 191, 267 [279]; 192, 277 [283]; 193, 32 [38]; 193, 167 [176]; 193, 297 [323]; 194, 104 [108]; 194, 135 [144]; 194, 163 [172]; 195, 182 [187]; 195, 216 [231]; 196, 171 [174]; 196, 209 [216]; 197, 83 [113]; 197, 169 [175]; 197, 253 [282]; 198, 265 [277]; 199, 1 [9]; 199, 42 [60]; 199, 96 [102]; 200, 48 [56]; 200, 91 [98]; 200, 108 [115]; 200, 241 [249]; 201, 62 [74]; 201, 145 [156]; 201, 241 [254]; 202, 109 [124]; 202, 191 [195]; 202, 226 [232]; 203, 104 [116]; 203, 155 [159]; 203, 269 [272]; 204, 209 [220]; 204, 220 [227]; 205, 191 [206]; 205, 220 [230]; 206, 62 [65]; 206, 210 [230]; 207, 123 [130]; 207, 226 [242]; 208, 314 [323]; 209, 167 [171]; 209, 229 [233]; 210, 1 [16]; 210, 99 [101]; 210, 136 [140]; 210, 182 [191]; 211, 64 [71]; 211, 131 [140]; 211, 217 [224]; 212, 1 [15]; 212, 81 [86]; 212, 273 [278]; 213, 54 [77]; 213, 93 [104]; 213, 237 [274]; 214, 105 [111]; 214, 139 [142]; 214, 224 [234]; 215, 197 [201]; 215, 276 [328]; 216, 74 [80]; 216, 145 [172]; 216, 220 [239]; 217, 126 [134]; 217, 262 [269]; 218, 177 [181]; 218, 241 [253]; 219, 76 [97]; 219, 151 [174]; 219, 243 [248]; 220, 140 [163]; 220, 237 [240]; 221, 48 [53]; 221, 92 [94]; 221, 139 [143]; 222, 64 [73]; 222, 106 [111]; 222, 125 [132]; 222, 165 [181]; 223, 154 [161]; 223, 175 [178]; 224, 74 [84]; 224, 322 [327]; 225, 71 [77]; 225, 83 [85]; 225, 130 [140]; 225, 221 [227]; 226, 171 [175]; 226, 196 [209]; 227, 108 [113]; 227, 167 [172]; 228, 162 [169]; 228, 220 [231]; 229, 91 [96]; 229, 121 [131]; 230, 47 [51]; 230, 65 [70]; 230, 173 [182]; 231, 130 [135]; 231, 137 [140]; 231, 233 [236]; 232, 1 [13]; 232, 87 [92]; 232, 165 [170]; 232, 273 [277]; 233, 52 [71]; 233, 125 [136]; 233, 171 [183]; 234, 105 [106]; 234, 132 [139]; 234, 165 [171]; 235, 65 [74]; 235, 94 [96]; 235, 185 [191]; 236, 1 [10]; 236, 150 [160]; 236, 237 [248]; 237, 81 [91]; 237, 97 [111]; 237, 239 [241]; 238, 1 [12]; 238, 179 [194]; 238, 217 [239]; 239, 1 [3]; 239, 96 [97]; 239, 179 [181]; 240, 254 [257]; 241, 1 [7]; 241, 29 [33]; 241, 96 [101]; 241, 167 [170]; 242, 374 [384]; 243, 291 [314]; 244, 1 [37]; 244, 59 [61]; 244, 130 [132]; 245, 1 [20]; 245, 69 [77]; 245, 97 [101]; 246, 96 [99]; 246, 120 [130]; 246, 385 [387]; 247, 1 [8]; 247, 95 [101]; 247, 130 [137]; 247, 314 [318]; 248, 77 [84]; 248, 130 [134]; 248, 169 [171]; 248, 255 [261]; 249, 54 [62]; 249, 65 [70]; 249, 186 [188]; 250, 142 [145]; 250, 165 [169]; 251, 154 [156]; 251, 181 [186]; 252, 42 [52]; 252, 131 [139]; 252, 183 [196]; 253, 37 [40]; 253, 56 [66]; 253, 144 [155]; 254, 100 [107]; 254, 172 [175]; 254, 274 [289]; 255, 142 [144]; 255, 191 [194]; 256, 22 [28]; 256, 54 [56]; 256, 90 [92]; 257, 29 [33]; 257, 43 [65]; 257, 97 [99]; 258, 40 [48]; 258, 300 [309]; 259, 29 [35]; 259, 208 [215]; 260, 28 [35]; 260, 109 [114]; 260, 177 [181]; 261, 1 [10]; 261, 63 [66]; 261, 191 [206]; 262, 28 [43]; 262, 100 [104]; 262, 167 [172]; 263, 131 [134]; 263, 151 [154]; 263, 170 [172]; 264, 1 [23]; 264, 72 [76]; 264, 128 [137]; 264, 171 [178]; 265, 54 [76]; 265, 76 [86]; 265, 198 [204]; 266, 1 [39]; 266, 116 [135]; 266, 226 [238]; 267, 1 [25]; 267, 26 [29]; 267, 44 [56]; 267, 81 [87]; 267, 150 [183]; 268, 1 [13]; 268, 91 [97]; 268, 121 [130]; 268, 187 [203]; 269, 46 [59]; 269, 106 [120]; 269, 150 [154]; 270, 1 [6]; 270, 96 [100]; 270, 138 [146]; 270, 174 [188]; 271, 182 [193]; 271, 225 [230]; 272, 84 [95]; 272, 122 [136]; 272, 167 [196]; 273, 66 [79]; 273, 118 [125]; 273, 148 [160]; 274, 145 [148]; 274, 182 [185]; 275, 1 [20]; 275, 108 [115]; 275, 167 [169]; 276, 1 [43]; 276, 83 [88]; 276, 145 [161]; 277, 125 [137]; 277, 216 [227]; 278, 1 [30]; 278, 58 [69]; 278, 123 [145]; 279, 1 [26]; 279, 64 [71]; 279, 169 [173]; 280, 142 [151]; 280, 244 [249]; 281, 1 [8]; 281, 139 [141]; 281, 203 [209]; 282, 167 [183]; 282, 260 [268]; 283, 1 [31]; 283, 162 [169]; 283, 223 [242]; 284, 1 [22]; 284, 54 [91]; 284, 119 [131]; 284, 167 [179]; 285, 1 [71]; 285, 80 [85]; 285, 109 [114]; 285, 141 [157]; 286, 1 [10]; 286, 109 [116]; 286, 171 [180]; 287, 119 [122]; 287, 254 [295]; 288, 97 [105]; 288, 129 [137]; 288, 187 [196]; 289, 1 [22]; 289, 63 [68]; 289, 109 [116]; 289, 214 [219]; 290, 63 [81]; 290, 107 [115]; 290, 141 [148]; 290, 173 [176]; 291, 1 [11]; 291, 65 [81]; 291, 126 [134]; 291, 167 [178]; 292, 26 [71]; 292, 78 [99]; 292, 141 [150]; 292, 203 [212]; 293, 37 [77]; 293, 130 [137]; 293, 186 [205]; 294, 1 [51]; 294, 84 [120]; 294, 181 [203]; 295, 91 [100]; 295, 173 [184]; 295, 267 [272]; 296, 15 [56]; 296, 109 [117]; 296, 171 [181]; 297, 94 [100]; 297, 135 [141]; 297, 169 [176]; 298, 83 [96]; 298, 169 [184]; 298, 261 [263]; 299, 74 [78]; 299, 145 [178]; 299, 246 [250]; 300, 61 [65]; 300, 125 [131]; 300, 181 [201]; 301, 82 [96]; 301, 131 [137]; 301, 207 [209]; 302, 1 [19]; 302, 57 [64]; 302, 131 [139]; 302, 191 [198]; 303, 1 [32]; 303, 77 [82]; 303, 127 [131]; 303, 188 [193]; 304, 1 [4]; 304, 54 [60]; 304, 129 [135]; 304, 182 [190]; 305, 1 [6]; 305, 58 [64]; 305, 96 [98]; 305, 165 [180]; 306, 1 [4]; 306, 45 [48]; 306, 96 [98]; 306, 181 [189]; 307, 1 [24]; 307, 59 [63]; 307, 98 [101]; 307, 144 [154]; 308, 1 [19]; 308, 53 [59]; 308, 86 [92]; 308, 155 [160]; 309, 1 [39]; 309, 64 [71]; 309, 86 [89]; 309, 139 [143]; 310, 1 [37]; 310, 63 [65]; 310, 104 [108]; 310, 142 [145]; 311, 1 [17]; 311, 63 [67]; 311, 94 [97]; 311, 142 [147]; 312, 1 [18]; 312, 45 [48]; 312, 67 [69]; 312, 135 [140]; 313, 1 [19]; 313, 54 [58]; 313, 73 [77]; 313, 143 [148]; 314, 1 [18]; 314, 63 [68]; 314, 84 [86]; 314, 163 [168]; 315, 1 [16]; 315, 51 [54]; 315, 63 [69]; 315, 104 [108]; 316, 1 [17]; 316, 45 [48]; 316, 73 [76]; 316, 112 [116]; 317, 1 [8]; 317, 45 [48]; 317, 67 [69]; 317, 141 [145]; 318, 1 [28]; 318, 45 [48]; 318, 67 [69]; 318, 122 [124]; 319, 1 [26]; 319, 45 [48]; 319, 67 [69]; 319, 104 [113]; 320, 1 [36]; 320, 45 [48]; 320, 67 [69]; 320, 104 [108]; 321, 1 [31]; 321, 45 [48]; 321, 67 [69]; 321, 104 [108]; 322, 1 [8]; 322, 45 [48]; 322, 67 [69]; 322, 104 [108]; 323, 1 [16]; 323, 45 [48]; 323, 67 [69]; 323, 104 [108]; 324, 1 [18]; 324, 45 [48]; 324, 67 [69]; 324, 104 [108]; 325, 1 [15]; 325, 45 [48]; 325, 67 [69]; 325, 104 [108]; 326, 1 [16]; 326, 45 [48]; 326, 67 [69]; 326, 104 [108]; 327, 1 [18]; 327, 45 [48]; 327, 67 [69]; 327, 104 [108]; 328, 1 [36]; 328, 45 [48]; 328, 67 [69]; 328, 104 [108]; 329, 1 [42]; 329, 45 [48]; 329, 67 [69]; 329, 104 [108]; 330, 1 [25]; 330, 45 [48]; 330, 67 [69]; 330, 104 [108]; 331, 1 [18]; 331, 45 [48]; 331, 67 [69]; 331, 104 [108]; 332, 1 [44]; 332, 45 [48]; 332, 67 [69]; 332, 104 [108]; 333, 1 [15]; 333, 45 [48]; 333, 67 [69]; 333, 104 [108]; 334, 1 [14]; 334, 45 [48]; 334, 67 [69]; 334, 104 [108]; 335, 1 [41]; 335, 45 [48]; 335, 67 [69]; 335, 104 [108]; 336, 1 [27]; 336, 45 [48]; 336, 67 [69]; 336, 104 [108]; 337, 1 [33]; 337, 45 [48]; 337, 67 [69]; 337, 104 [108]; 338, 1 [20]; 338, 45 [48]; 338, 67 [69]; 338, 104 [108]; 339, 1 [14]; 339, 45 [48]; 339, 67 [69]; 339, 104 [108]; 340, 1 [25]; 340, 45 [48]; 340, 67 [69]; 340, 104 [108]; 341, 1 [16]; 341, 45 [48]; 341, 67 [69]; 341, 104 [108]; 342, 1 [14]; 342, 45 [48]; 342, 67 [69]; 342, 104 [108]; 343, 1 [16]; 343, 45 [48]; 343, 67 [69]; 343, 104 [108]; 344, 1 [14]; 344, 45 [48]; 344, 67 [69]; 344, 104 [108]; 345, 1 [14]; 345, 45 [48]; 345, 67 [69]; 345, 104 [108]; 346, 1 [14]; 346, 45 [48]; 346, 67 [69]; 346, 104 [108]; 347, 1 [14]; 347, 45 [48]; 347, 67 [69]; 347, 104 [108]; 348, 1 [14]; 348, 45 [48]; 348, 67 [69]; 348, 104 [108]; 349, 1 [14]; 349, 45 [48]; 349, 67 [69]; 349, 104 [108]; 350, 1 [14]; 350, 45 [48]; 350, 67 [69]; 350, 104 [108]; 351, 1 [14]; 351, 45 [48]; 351, 67 [69]; 351, 104 [108]; 352, 1 [14]; 352, 45 [48]; 352, 67 [69]; 352, 104 [108]; 353, 1 [14]; 353, 45 [48]; 353, 67 [69]; 353, 104 [108]; 354, 1 [14]; 354, 45 [48]; 354, 67 [69]; 354, 104 [108]; 355, 1 [14]; 355, 45 [48]; 355, 67 [69]; 355, 104 [108]; 356, 1 [14]; 356, 45 [48]; 356, 67 [69]; 356, 104 [108]; 357, 1 [14]; 357, 45 [48]; 357, 67 [69]; 357, 104 [108]; 358, 1 [14]; 358, 45 [48]; 358, 67 [69]; 358, 104 [108]; 359, 1 [14]; 359, 45 [48]; 359, 67 [69]; 359, 104 [108]; 360, 1 [14]; 360, 45 [48]; 360, 67 [69]; 360, 104 [108]; 361, 1 [14]; 361, 45 [48]; 361, 67 [69]; 361, 104 [108]; 362, 1 [14]; 362, 45 [48]; 362, 67 [69]; 362, 104 [108]; 363, 1 [14]; 363, 45 [48]; 363, 67 [69]; 363, 104 [108]; 364, 1 [14]; 364, 45 [48]; 364, 67 [69]; 364, 104 [108]; 365, 1 [14]; 365, 45 [48]; 365, 67 [69]; 365, 104 [108]; 366, 1 [14]; 366, 45 [48]; 366, 67 [69]; 366, 104 [108]; 367, 1 [14]; 367, 45 [48]; 367, 67 [69]; 367, 104 [108]; 368, 1 [14]; 368, 45 [48]; 368, 67 [69]; 368, 104 [108]; 369, 1 [14]; 369, 45 [48]; 369, 67 [69]; 369, 104 [108]; 370, 1 [14]; 370, 45 [48]; 370, 67 [69]; 370, 104 [108]; 371, 1 [14]; 371, 45 [48]; 371, 67 [69]; 371, 104 [108]; 372, 1 [14]; 372, 45 [48]; 372, 67 [69]; 372, 104 [108]; 373, 1 [14]; 373, 45 [48]; 373, 67 [69]; 373, 104 [108]; 374, 1 [14]; 374, 45 [48]; 374, 67 [69]; 374, 104 [108]; 375, 1 [14]; 375, 45 [48]; 375, 67 [69]; 375, 104 [108]; 376, 1 [14]; 376, 45 [48]; 376, 67 [69]; 376, 104 [108]; 377, 1 [14]; 377, 45 [48]; 377, 67 [69]; 377, 104 [108]; 378, 1 [14]; 378, 45 [48]; 378, 67 [69]; 378, 104 [108]; 379, 1 [14]; 379, 45 [48]; 379, 67 [69]; 379, 104 [108]; 380, 1 [14]; 380, 45 [48]; 380, 67 [69]; 380, 104 [108]; 381, 1 [14]; 381, 45 [48]; 381, 67 [69]; 381, 104 [108]; 382, 1 [14]; 382, 45 [48]; 382, 67 [69]; 382, 104 [108]; 383, 1 [14]; 383, 45 [48]; 383, 67 [69]; 383, 104 [108]; 384, 1 [14]; 384, 45 [48]; 384, 67 [69]; 384, 104 [108]; 385, 1 [14]; 385, 45 [48]; 385, 67 [69]; 385, 104 [108]; 386, 1 [14]; 386, 45 [48]; 386, 67 [69]; 386, 104 [108]; 387, 1 [14]; 387, 45 [48]; 387, 67 [69]; 387, 104 [108]; 388, 1 [14]; 388, 45 [48]; 388, 67 [69]; 388, 104 [108]; 389, 1 [14]; 389, 45 [48]; 389, 67 [69]; 389, 104 [108]; 390, 1 [14]; 390, 45 [48]; 390, 67 [69]; 390, 104 [108]; 391, 1 [14]; 391, 45 [48]; 391, 67 [69]; 391, 104 [108]; 392, 1 [14]; 392, 45 [48]; 392, 67 [69]; 392, 104 [108]; 393, 1 [14]; 393, 45 [48]; 393, 67 [69]; 393, 104 [108]; 394, 1 [14]; 394, 45 [48]; 394, 67 [69]; 394, 104 [108]; 395, 1 [14]; 395, 45 [48]; 395, 67 [69]; 395, 104 [108]; 396, 1 [14]; 396, 45 [48]; 396, 67 [69]; 396, 104 [108]; 397, 1 [14]; 397, 45 [48]; 397, 67 [69]; 397, 104 [108]; 398, 1 [14]; 398, 45 [48]; 398, 67 [69]; 398, 104 [108]; 399, 1 [14]; 399, 45 [48]; 399, 67 [69]; 399, 104 [108]; 400, 1 [14]; 400, 45 [48]; 400, 67 [69]; 400, 104 [108]; 401, 1 [14]; 401, 45 [48]; 401, 67 [69]; 401, 104 [108]; 402, 1 [14]; 402, 45 [48]; 402, 67 [69]; 402, 104 [108]; 403, 1 [14]; 403, 45 [48]; 403, 67 [69]; 403, 104 [108]; 404, 1 [14]; 404, 45 [48]; 404, 67 [69]; 404, 104 [108]; 405, 1 [14]; 405, 45 [48]; 405, 67 [69]; 405, 104 [108]; 406, 1 [14]; 406, 45 [48]; 406, 67 [69]; 406, 104 [108]; 407, 1 [14]; 407, 45 [48]; 407, 67 [69]; 407, 104 [108]; 408, 1 [14]; 408, 45 [48]; 408, 67 [69]; 408, 104 [108]; 409, 1 [14]; 409, 45 [48]; 409, 67 [69]; 409, 104 [108]; 410, 1 [14]; 410, 45 [48]; 410, 67 [69]; 410, 104 [108]; 411, 1 [14]; 411, 45 [48]; 411, 67 [69]; 411, 104 [108]; 412, 1 [14]; 412, 45 [48]; 412, 67 [69]; 412, 104 [108]; 413, 1 [14]; 413, 45 [48]; 413, 67 [69]; 413, 104 [108]; 414, 1 [14]; 414, 45 [48]; 414, 67 [69]; 414, 104 [108]; 415, 1 [14]; 415, 45 [48]; 415, 67 [69]; 415, 104 [108]; 416, 1 [14]; 416, 45 [48]; 416, 67 [69]; 416, 104 [108]; 417, 1 [14]; 417, 45 [48]; 417, 67 [69]; 417, 104 [108]; 418, 1 [14]; 418, 45 [48]; 418, 67 [69]; 418, 104 [108]; 419, 1 [14]; 419, 45 [48]; 419, 67 [69]; 419, 104 [108]; 420, 1 [14]; 420, 45 [48]; 420, 67 [69]; 420, 104 [108]; 421, 1 [14]; 421, 45 [48]; 421, 67 [69]; 421, 104 [108]; 422, 1 [14]; 422, 45 [48]; 422, 67 [69]; 422, 104 [108]; 423, 1 [14]; 423, 45 [48]; 423, 67 [69]; 423, 104 [108]; 424, 1 [14]; 424, 45 [48]; 424, 67 [69]; 424, 104 [108]; 425, 1 [14]; 425, 45 [48]; 425, 67 [69]; 425, 104 [108]; 426, 1 [14]; 426, 45 [48]; 426, 67 [69]; 426, 104 [108]; 427, 1 [14]; 427, 45 [48]; 427, 67 [69]; 427, 104 [108]; 428, 1 [14]; 428, 45 [48]; 428, 67 [69]; 428, 104 [108]; 429, 1 [14]; 429, 45 [48]; 429, 67 [69]; 429, 104 [108]; 430, 1 [14]; 430, 45 [48]; 430, 67 [69]; 430, 104 [108]; 431, 1 [14]; 431, 45 [48]; 431, 67 [69]; 431, 104 [108]; 432, 1 [14]; 432, 45 [48]; 432, 67 [69]; 432, 104 [108]; 433, 1 [14]; 433, 45 [48]; 433, 67 [69]; 433, 104 [108]; 434, 1 [14]; 434, 45 [48]; 434, 67 [69]; 434, 104 [108]; 435, 1 [14]; 435, 45 [48]; 435, 67 [69]; 435, 104 [108]; 436, 1 [14]; 436, 45 [48]; 436, 67 [69]; 436, 104 [108]; 437, 1 [14]; 437, 45 [48]; 437, 67 [69]; 437, 104 [108]; 438, 1 [14]; 438, 45 [48]; 438, 67 [69]; 438, 104 [108]; 439, 1 [14]; 439, 45 [48]; 439, 67 [69]; 439, 104 [108]; 440, 1 [14]; 440, 45 [48]; 440, 67 [69]; 440, 104 [108]; 441, 1 [14]; 441, 45 [48]; 441, 67 [69]; 441, 104 [108]; 442, 1 [14]; 442, 45 [48]; 442, 67 [69]; 442, 104 [108]; 443, 1 [14]; 443, 45 [48]; 443, 67 [69]; 443, 104 [108]; 444, 1 [14]; 444, 45 [48]; 444, 67 [69]; 444, 104 [108]; 445, 1 [14]; 445, 45 [48]; 445, 67 [69]; 445, 104 [108]; 446, 1 [14]; 446, 45 [48]; 446, 67 [69]; 446, 104 [108]; 447, 1 [14]; 447, 45 [48]; 447, 67 [69]; 447, 104 [108]; 448, 1 [14]; 448, 45 [48]; 448, 67 [69]; 448, 104 [108]; 449, 1 [14]; 449, 45 [48]; 449, 67 [69]; 449, 104 [108]; 450, 1 [14]; 450, 45 [48]; 450, 67 [69]; 450, 104 [108]; 451, 1 [14]; 451, 45 [48]; 451, 67 [69]; 451, 104 [108]; 452, 1 [14]; 452, 45 [48]; 452, 67 [69]; 452, 104 [108]; 453, 1 [14]; 453, 45 [48]; 453, 67 [69]; 453, 104 [108]; 454, 1 [14]; 454, 45 [48]; 454, 67 [69]; 454, 104 [108]; 455, 1 [14]; 455, 45 [48]; 455, 67 [69]; 455, 104 [108]; 456, 1 [14]; 456, 45 [48]; 456, 67 [69]; 456, 104 [108]; 457, 1 [14]; 457, 45 [48]; 457, 67 [69]; 457, 104 [108]; 458, 1 [14]; 458, 45 [48]; 458, 67 [69]; 458, 104 [108]; 459, 1 [14]; 459, 45 [48]; 459, 67 [69]; 459, 104 [108]; 460, 1 [14]; 460, 45 [48]; 460, 67 [69]; 460, 104 [108]; 461, 1 [14]; 461, 45 [48]; 461, 67 [69]; 461, 104 [108]; 462, 1 [14]; 462, 45 [48]; 462, 67 [69]; 462, 104 [108]; 463, 1 [14]; 463, 45 [48]; 463, 67 [69]; 463, 104 [108]; 464, 1 [14]; 464, 45 [48]; 464, 67 [69]; 464, 104 [108]; 465, 1 [14]; 465, 45 [48]; 465, 67 [69]; 465, 104 [108]

8. „Die Fusspunkte der Normalen, welche man von einem gegebenen Punkte P auf einen gegebenen Mittelpunktskegelschnitt K fällen kann, sind die Schnittpunkte von K mit einer durch P, die unendlich fernen Punkte A und B der Achsen von K und den Mittelpunkt C von K gehenden gleichseitigen Hyperbel. Und umgekehrt schneidet jede gleichseitige Hyperbel durch A, B, C den gegebenen Kegelschnitt K in vier Punkten, wofür die auf K errichteten Normalen durch einen Punkt gehen".

Dieser dem Apollonius von Perga (247 v. Chr.) zugeschriebene Satz wird leicht geometrisch bewiesen. Ist nämlich PQ (Fig. 7.) irgend eine Gerade durch P und CQ der Durchmesser von K, welcher in K dem senkrecht auf PQ stehenden Durchmesser conjugirt ist, so bilden die Strahlen PQ und CQ zwei projectivische Büschel, und ist der Ort des Schnittpunktes Q von PQ und CQ also ein durch P und C gehender Kegelschnitt, der, wie man unmittelbar erblickt, auch durch die unendlich fernen Punkte A und B geht. Diese Curve ist also eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten zu den Achsen von K parallel sind. Und die Schnittpunkte dieser Curve mit K sind offenbar die Fusspunkte der von P an K möglichen Tangenten [10]).

Umgekehrt schneidet jede gleichseitige Hyperbel durch A, B, C die gegebene Curve K in vier Punkten, wofür die auf K errichteten Normalen durch einen Punkt gehen. Ist nämlich P der Schnittpunkt der Normalen an K in zwei der vier Schnittpunkte von K mit dieser gleichseitigen Hyperbel, so hat die dem Punkte P zukommende Hyperbel des Apollonius schon fünf Punkte mit der angenommenen gleichseitigen Hyperbel gemein, und fallen also die beiden Curven zusammen [11]).

---

10) Eine merkwürdige Ableitung dieser Hyperbel gab Poncelet („Traité des propriétés projectives des figures", 2me édition, tome I, art. 492).

Jede Hyperbel des Apollonius ist dem uneigentlichen Poldreieck ABC von K umgeschrieben und enthält also die Eckpunkte einer einfach unendlichen Anzahl von Poldreiecken von K (Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite 122; Picquet, a. a. O., tome I, § 209—216). Die Seiten dieser Poldreiecke umhüllen eine Parabel, die Polarfigur der Hyperbel von Apollonius in Bezug auf K („Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte" von A. Milinowski, Sätze und Aufgaben, Nr. 90—95).

11) Die den verschiedenen Punkten P der Ebene zukommenden Hyperbeln des Apollonius bilden ein Netz mit drei Basispunkten, den Punkten A, B, C. Dieses Netz ist bekanntlich zum ebenen Systeme der Punkte P projectivisch, und es ändert sich und seine Verwandtschaft zum ebenen Systeme der Punkte

Digitized by Go

9. „Die Punkte Q einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel H mit dem Mittelpunkte C (Fig. 8.), für deren jeden die Tangente q zu der durch einen gegebenen Punkt P geführten Geraden QP antiparallel ist in Bezug auf irgend einen Durchmesser CR, sind die Schnittpunkte von H mit einem durch C und P gehenden Kreise. Und umgekehrt schneidet jeder durch C gehende Kreis die Curve H in vier Punkten Q, für welche die zu den Tangenten q in Bezug auf CR antiparallel durch Q gelegten Geraden durch einen bestimmten Punkt dieses Kreises gehen".

Sind CX und CY (Fig. 9.) die Asymptoten der gegebenen gleichseitigen Hyperbel H, ist P der gegebene Punkt und CR der gegebene Durchmesser, so suchen wir den Ort des Schnittpunktes Q von jeder durch P gehenden Geraden PQ mit dem Durchmesser CQ von H, welcher dem zu PQ in Bezug auf CR antiparallelen Durchmesser CS von H conjugirt ist. Nun findet man leicht, dass der Winkel PQC constant ist, denn da PQ und CS antiparallel sind in Bezug auf CR, CS und CQ antiparallel sind in Bezug auf CX, so ist nach Artikel 5. immer Wkl. $PQC = 2$ Wkl. RCX. Also ist der Ort der Punkte Q ein durch C und P gehender Kreis [12]). Da nun die Schnittpunkte von H mit diesem Kreise nach der Entstehungsweise von diesen offenbar die in dem Satze angedeuteten Punkte Q sind, und umgekehrt jeder Punkt Q des Satzes dem gefundenen Kreise angehören muss, ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Und die Umkehrung wird ganz so behandelt wie jene des vorhergehenden Satzes [13]).

Zur Abkürzung nennen wir die durch den Punkt Q von H (Fig. 8.) in Bezug auf CR zu der Tangente q von H in Q antiparallele Gerade QP die „Anti-Normale" von H in Q für CR. Und die Curve, welche von dieser Anti-Normale eingehüllt wird, wenn Q die gleichseitige Hyperbel H durchläuft, möge hiermit in Uebereinstimmung die „Anti-Evolute" von H für CR heissen [14]). Diese Anti-

---

P nicht, wenn man die Achsen von K in dem nämlichen Maasse vergrössert oder verkleinert. Man vergleiche Steiner's Abhandlung „Ueber algebraische Curven und Flächen", a. a. O., zweiter Band, Seite 627).

12) Wenn man auf das Zeichen der Winkel achtet, so sieht man unmittelbar, dass die an verschiedenen Seiten von CP liegenden Kreissegmente, welche man erhält, wirklich einen Vollkreis bilden.

13) Die den verschiedenen Punkten P der Ebene zukommenden Kreise bilden ebenfalls ein dem ebenen Systeme der Punkte P projectivisches Netz, das sich und seine Verwandtschaft zu diesem ebenen Systeme nicht ändert, wenn man die gleichseitige Hyperbel H vom Centrum C aus in irgend einem Maasse vergrössert oder verkleinert.

14) Obgleich diese Anti-Normale und Anti-Evolute einen besonderen Fall

Evoluten können nach Artikel 5. offenbar auch betrachtet werden als die Einhüllenden der Geraden, welche die centralen Radien Vectoren von den Punkten von H in diesen Punkten unter bestimmten und im bestimmten Sinne gezählten Winkeln schneiden.

10. „Die Anti-Evoluten von H in Bezug auf ihre verschiedenen Durchmesser CR sind concentrische und einander ähnliche Curven".

Ist CR (Fig. 10.) irgend ein Durchmesser und CD eine Achse von H, sind Q und Q' zwei an einander grenzende Punkte dieser Curve, QR_1 und $Q'R_1$ die Anti-Normalen von H in Q und Q' für CR, und sind QD_1 und $Q'D_1$ die Anti-Normalen von H in Q und Q' für CD, so liegen einerseits die Punkte C, Q, Q', R_1 auf einem Kreise, da Wkl. R_1QC = Wkl. $R_1Q'C$ (= 2 Wkl. RCX) ist, und andererseits die Punkte C, Q, Q', D_1, da Wkl. D_1QC = Wkl. $D_1Q'C$ (= 2 Wkl. DCX) recht ist. Beim Grenzübergange des Zusammenfallens der Punkte Q und Q' liegen also die dem Punkte Q von H entsprechenden Punkte R_1 und D_1 der Anti-Evoluten für CR und CD so auf einem durch C und Q die H in Q berührenden Kreise, dass die Kreisbögen CR_1 und CD_1 in Graden fortwährend die nämlichen Werte beibehalten, wenn Q sich der H entlang bewegt; denn man findet unmittelbar Bog. CR_1=4 Wkl. RCX und Bog. CD_1=4 Wkl. DCX=180° Und hieraus folgt, dass die Anti-Evolute für CR aus jener für CD abgeleitet wird, indem man diese letztere um C über einen Winkel = 2 DCR dreht und zur selben Zeit ihre von C ausgehenden Radien Vectoren durch Multiplication mit cos 2 Wkl. DCR verkleinert [15]).

Die Anti-Evolute von H in Bezug auf die Achse CD ist nach ihrer Entstehungsweise die erste negative Fusspunktencurve von H in Bezug auf den Centrum C. Also ist die Anti-Evolute von H in Bezug auf CR die erste negative Fusspunktencurve von der gleichseitigen Hyperbel, die man durch Drehung von H um C über den Winkel = 2 DCR und Verkleinerung der Durchmesser mittelst Multiplication mit cos 2 Wkl. DCR erhält ebenfalls in Bezug auf das Centrum C.

---

bilden von der Quasi-Normale und Quasi-Evolute („Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven" von G. Salmon, deutsch von Dr. W. Fiedler, 2te Auflage, Art. 10b), so achte ich mich der Merkwürdigkeit des besonderen Falles wegen doch berechtigt einen neuen Namen einzuführen.

15) Ueber die Anwendung dieser Multiplication vergleiche man Julius Petersen's in fast alle modernen Sprachen übersetztes Werkchen „Methoden und Theorien".

Digitized by Google

Der Kürze wegen deuten wir im Folgenden die Curve, welche aus einer gegebenen Mittelpunktscurve Φ durch Drehung um den Mittelpunkt im Sinne der Uhrbewegung über den Winkel α und Multiplication der centralen Radien Vectoren mit m abgeleitet wird, mittelst des Symboles $\Phi(\alpha, m)$ an. Es ist dann die so eben gefundene gleichseitige Hyperbel als H(2 Wkl. DCR, cos 2 Wkl. DCR) zu bezeichnen.

Die Anti-Evolute von H in Bezug auf die Achsen ist in Fig. 11. vorgestellt; sie hat in der Richtung von jeder der beiden Asymptoten von H einen parabolischen Ast von besonderer Beschaffenheit; wir kommen im folgenden Abschnitte auf diese merkwürdige Curve zurück [16]).

11. „Ersetzt man eine ungerade Anzahl der Schnittpunkte von einem Mittelpunktskegelschnitte K mit irgend einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten zu den Achsen von K parallel sind, durch die ihnen in K diametral gegenüber liegenden Punkte, so erhält man vier Punkte eines Kreises.

Ersetzt man eine ungerade Anzahl der Schnittpunkte von einer gleichseitigen Hyperbel H mit irgend einem Kreise durch die ihnen in H diametral gegenüber liegenden Punkte, so erhält man vier Punkte, die so mit einander zusammenhangen, dass jeder von ihnen der Höhenschnittpunkt ist des von den drei anderen bestimmten Dreiecks".

Ist von den vier Fusspunkten N_1, N_2, N_3, N_4 (Fig. 12.) der aus irgend einem unbekannten Punkte auf K zu fällenden Normalen nur die Verbindungslinie p von zwei aus ihnen gegeben, so findet man, nach den schönen Untersuchungen Joachimsthals [17]), die Verbindungslinie p' der beiden anderen, wenn man zum Pole P von p für K den in Bezug auf das Centrum C symmetrisch liegenden Punkt P_1' bestimmt und die senkrechten Projectionen dieses Punktes auf die Achsen von K mit einander verbindet. Dabei ist dann die supplementäre Sehne $N_1'N_2$ von N_1N_2 parallel zu $P_1'C$, also antiparallel zu N_3N_4

16) Mit Verweisung auf Artikel 27. bemerke ich hier nur noch, dass die in den Richtungen der Asymptoten von H liegenden Berührungspunkte der unendlich fernen Geraden mit der Anti-Evolute Rückkehrpunkte dieser Curve sind, was sich dadurch verrät, dass die beiden einer nämlichen Asymptote von H zukommenden Aeste in entgegengesetzten Richtungen in's Unendliche verschwinden.

17) „Ueber die Normalen der Ellipse und des Ellipsoids" (Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Band XXVI, Seite 172).

igitized by

in Bezug auf die Achsen von K, und sind deshalb die Punkte N_1', N_2, N_3, N_4 nach Artikel 6. vier Punkte eines Kreises. Und dies bleibt offenbar der Fall, wenn man noch zwei der Punkte N_2, N_3, N_4 durch die ihnen diametral gegenüber liegenden Punkte von K ersetzt.

Dieser bekannte Joachimsthal'sche Satz ist aber einer Erweiterung fähig. Was nach dem Obigen von den vier Schnittpunkten des Mittelpunktskegelschnittes K mit irgend einer seiner Hyperbeln des Apollonius gilt, das kann auch von den vier Schnittpunkten von K mit irgend einer wohl durch die unendlich fernen Endpunkte A und B der Achsen von K, nicht aber durch das Centrum C von K gehenden gleichseitigen Hyperbel behauptet werden. Zum Beweise dieser Verallgemeinerung bemerke ich, dass die gleichseitigen Hyperbeln des von den Punkten A, B, N_3, N_4 als Basispunkte bestimmten Büschels in K eine quadratische Involution von Punkten N_1, N_2 einschneiden, welche auch von den parallelen Strahlen eines Strahlenbüschels mit unendlich fernem Scheitel getragen wird. Indem nämlich jede quadratische Involution auf K von einem Strahlenbüschel erzeugt werden kann, so enthält dieser Büschel in unserem Falle die unendlich ferne Gerade, da diese mit der Geraden N_3N_4 eine Curve des Büschels bildet. Es führt also die Ersetzung der durch N_3 und N_4 bestimmten Hyperbel des Apollonius durch irgend eine Curve des von A, B, N_3, N_4 bestimmten Büschels nur zu einer parallelen Verschiebung der Geraden p und also auch nur zu einer parallelen Verschiebung der Geraden $N_1'N_2$, was nach Artikel 6. die Lage der vier Punkte N auf einem Kreise nicht aufhebt.

Sind weiter N_1, N_2, N_3, N_4 (Fig. 13.) die Schnittpunkte der gegebenen gleichseitigen Hyperbel H mit irgend einem Kreise, so sind die Sehnen N_1N_2 und N_3N_4 nach Artikel 6. antiparallel in Bezug auf die Achsen von H und ist dies mit den supplementären Sehnen N_1N_2 und $N_1'N_2$ nach Artikel 4. in Bezug auf die Asymptoten von H der Fall. Also sind nach Artikel 5. die Sehnen $N_1'N_2$ und N_3N_4 zu einander senkrecht. Und da dies von den Sehnenpaaren $N_1'N_3$ und N_2N_4, $N_1'N_4$ und N_2N_3 ebenso bewiesen werden kann, haben die vier Punkte N_1', N_2, N_3, N_4 die im Satze angegebene merkwürdige Lage.

12. „Wenn eine gleichseitige Hyperbel einem Dreieck umgeschrieben ist, so geht sie auch durch den Schnittpunkt seiner Höhen. Ist das Dreieck rechtwinklig, so berühren also die umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln im Eckpunkte des rechten Winkels alle die von diesem Punkte auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte".

Digitized by Go

Dieser bekannte Satz [18]) ist eine unmittelbare Folge des zweiten Teiles des vorhergehenden. Es liegt nämlich in Fig. 13.) der dem Punkte N_1 der gleichseitigen Hyperbel H diametral gegenüber liegende Punkt N_1' ebenfalls auf H, und dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks $N_2N_3N_4$.

Beiläufig bemerke ich, dass diese Betrachtungen für den Ort der Mittelpunkte der einem Dreieck umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln den Neunpunktskreis dieses Dreiecks liefern.

13. „Die Polarfigur einer gleichseitigen Hyperbel H in Bezug auf irgend eine andere concentrische gleichseitige Hyperbel H_1 ist wieder eine concentrische gleichseitige Hyperbel H_2. Die reelle Achse von H_2 ist antiparallel zu der reellen Achse von H in Bezug auf die Achsen von H_1, und ihre Grösse a_2 ist an jene a und a_1 der reellen Achsen von H und H_1 gebunden durch die Gleichung $aa_2 = a_1^2$. Ist $H_1 = H(\alpha, m)$, so ist $H_2 = H_1(\alpha, m) = H(2\alpha, m^2)$. Und bei diesem Uebergange von H zu H_2 mittelst Drehung und Multiplication entspricht dem Berührungspunkte irgend einer Tangente von H wirklich der auf H_2 liegende Pol dieser Tangente in Bezug auf H_1.

Nimmt man bei einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel H noch die beiden Curven an, in welche H übergeht, wenn man sie in positivem und negativem Sinne um ihr Centrum C um den Winkel von 60^0 dreht, so erhält man drei Curven, die zu einander in der besonderen Beziehung stehen, dass jede von ihnen in Bezug auf irgend eine der beiden übrigen die Polarfigur der dritten ist [19])".

Ist die Polarfigur eines Kegelschnittes K in Bezug auf einen anderen Kegelschnitt K_1 im Allgemeinen wieder ein Kegelschnitt K_2 [20]), so folgt hier aus radialer Symmetrie in Bezug auf das gemeinschaftliche Centrum C von H und H_1 (Fig. 14.), dass die Polarfigur ein mit H und H_1 concentrischer Kegelschnitt ist. Nun sind aber die Asymptoten CX und CY von H in Bezug auf H_1 die Polaren der unendlich fernen Punkte dieser Polarfigur, d. h. CX und CY sind in Bezug auf H_1 die den Asymptoten der Polarfigur conjugirten Durchmesser. Also sind die Asymptoten der gesuchten Curve

---

18) Man vergleiche Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite 183, Aufgabe 118 und Salmon's „Conics", Artikel 228, Problem 1 und Artikel 315, Problem 9.

19) Einen analytischen Beweis dieses Satzes enthält meine „Notiz über die Lemniskate" (Sitzungsberichte d. k. Akad. der Wissensch. zu Wien, Band LXXXIX, 2te Abteilung, Seite 1264).

20) Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite 82.

Digitized by Go

in Bezug auf die Asymptoten CX_1 und CY_1 von H_1 antiparallel zu CX und CY und stehen sie deshalb auch senkrecht auf einander, d. h. die gesuchte Curve ist ebenfalls eine gleichseitige Hyperbel H_2. Und dann sind auch die Achsen von H_2 antiparallel zu den Achsen von H in Bezug auf die Achsen von H_1.

Ist P ein Scheitel von H, also $CP = a$ und p seine Polare in Bezug auf H_1, so erkennt man, dass (nach Artikel 5.) p senkrecht steht auf der Achse CD_2 von H_2; denn CD, die den Scheitel P enthaltende Achse von H, ist antiparallel zu p in Bezug auf die Asymptoten von H_1 und CD und CD_2 sind es in Bezug auf die Achsen von H_1. Also ist p eine Scheiteltangente von H_2, der Schnittpunkt P_2 von CD_2 und p ein Scheitel von H_2 und $CP_2 = a_2$. Hieraus folgt im Vorübergehen, dass die Achse von H_2, welche antiparallel ist zu der reellen Achse CD von H in Bezug auf die Achsen von H_1, ihre reelle Achse ist. Ist weiter Q einer der beiden Schnittpunkte von CD mit H_1 und P' der Schnittpunkt von CD mit p, so ist $CP.CP' = CQ^2$; denn die in Bezug auf H_1 zu einander conjugirten Punkte P, P' gehören einer auf CD liegenden Involution an, welche C zum Centralpunkte und Q zu einem der Doppelpunkte hat. Aber wenn Q_0 der Schnittpunkt ist von CD_2 mit der zu p parallelen Tangente q von H_1 in Q, so hat man auch $CP_2 : CP' = CQ_0 : CQ$ und diese Proportion giebt mit der angeführten Gleichung unmittelbar die Relation $CP.CP_2 = CQ.CQ_0$. Sind nun endlich Q_x und Q_y die Schnittpunkte von q mit den Asymptoten CX_1 und CY_1 von H_1, so hat man nach einander $CQ.CQ_0 = QQ_x.CQ_0 = \frac{1}{2}CQ_x.CQ_y$ und deshalb, da nach einem bekannten Satze der gleichseitigen Hyperbel [21]) $\frac{1}{2}CQ_x.CQ_y = a_1^2$ ist, auch $aa_2 = a_1^2$ [22]).

Ist $H_1 = H(\alpha, m)$, so ist deshalb $\alpha =$ Wkl. DCD_1 und $m = \frac{a_1}{a}$.

Aber wir finden Wkl. $D_2CD_1 =$ Wkl. DCD_1 und $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1}{a}$; also ist $H_2 = H_1(\alpha, m) = H(2\alpha, m^2)$. Und hierbei ist es, wie der Satz oben angiebt, bemerkenswert, dass der Uebergang von H zu H_2 durch Drehung und Multiplication ein beliebig auf H gewählter Punkt R von H (Fig. 15.) in den Punkt R_2 von H_2 überführt, dessen Polare in Bezug auf H_1 die Tangente von H in R ist. Ist nämlich r die Tangente von H in R und R_2 der Pol von r in Bezug auf H_1, so ist die Tangente r antiparallel zu CR in Bezug auf CY und zu CR_2

---

21) Reye, a. a. O., 1. Abteilung, Seite 94.

22) Aus diesen metrischen Relationen beweist man ohne Mühe, dass die gleichseitige Hyperbel, wie Herr Brocard mir brieflich mitteilte, ihre eigene Polarfigur ist in Bezug auf den sie doppelt berührenden concentrischen Kreis.

Digitized by Go

in Bezug auf CY_1; also ist nach Artikel 5. der Winkel $RCR_2 =$ 2 Wkl. $YCY_1 = 2\alpha$, u. s. w. [23]).

Der zweite Teil des Satzes ist eine unmittelbare Folge des ersten.

14. „Wenn man von den zwei Curven C_1^n und C_2^n, welche man mittelst Drehung einer gegebenen Curve C^n um irgend einen Punkt M in positivem und negativem Sinne um den Winkel von 60^0 erhält, jene Elemente einander entsprechen lässt, welche sich aus einem nämlichen Elemente von C^n entwickelt haben, so ist die Enveloppe der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte von C_1^n und C_2^n die von M aus halbirte erste negative Fusspunktencurve von C^n für M und der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Tangenten von C_1^n und C_2^n die von M aus verdoppelte erste positive Fusspunktencurve von C^n für M."

Ist in Fig. (16.) der Punkt M der Drehpunkt, und sind P, P_1, P_2 entsprechende Punkte der drei Curven C^n, C_1^n, C_2^n, so steht die Verbindungslinie P_1P_2 in der Mitte von MP auf MP senkrecht, was den ersten Teil des Satzes beweiset. Sind weiter p, p_1, p_2 die entsprechenden Tangenten der Curven in diesen Punkten, und bezeichnet man den Schnittpunkt von p mit MP_1 als Q, von p_1 mit MP_2 als Q_1 und von p_2 mit MP als Q_2, so ist Wkl. $MP_1Q_1 =$ Wkl. MP_2Q_2. Deshalb liegt der Schnittpunkt P' von p_1 und p_2, dessen Ort wir in dem zweiten Teil des Satzes angegeben haben, auf dem durch M, P_1 und P_2 gehenden Kreise, ist der Winkel $P_1P'P_2$ als das Supplement vom Winkel $P_2MP_1 = 60^0$ und wird von der durch die Mitte M des Kreisbogens P_2MP_1 gehenden Gerade $P'M$ halbirt. Aber da P offenbar der Mittelpunkt des durch M, P_1, P_2 und P' gehenden Kreises ist, und p mit p_1 und p_2 ein gleichseitiges Dreieck bildet, so steht p in der Mitte Q' von MP' auf MP' senkrecht, und ist hiermit der zweite Teil des Satzes bewiesen.

Ist C^n die gleichseitige Hyperbel von Artikel 13. und sind also C_1^n und C_2^n die dort auftretenden Curven H_1 und H_2, so ist die

---

23) Wenn H durch den Scheitel P_1 von H_1 geht, so geht H_1 aus Aehnlichkeitsgründen durch den Scheitel P_2 von H_2 und berührt nach der letzten Bemerkung des Textes die Scheiteltangente von H, welche dem Punkte P zukommt, ebenfalls die H_1 in P_2. Also ist der Ort der Scheitel P von den gleichseitigen Hyperbeln H mit einem gemeinschaftlichen Durchmesser P_1P_1' als die erste positive Fusspunktencurve der gleichseitigen Hyperbel H_1 für ihren Mittelpunkt C eine Lemniskate (Steiner, a. a. O., zweiter Band, Seite 414).

Digitized by Go

Enveloppe der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte von H_1 und H_2 als die von M aus halbirte erste negative Fusspunktencurve von H für M die von C aus halbirte Curve von Fig. 11., also die Anti-Evolute von der von C aus halbirten gleichseitigen Hyperbel H in Bezug auf die Achsen. Und der Ort des Schnittpunktes der entsprechenden Tangenten von H_1 und H_2 ist als die von M aus verdoppelte erste positive Fusspunktencurve von H für M, d. h. als die erste positive Fusspunktencurve der von M aus verdoppelten gleichseitigen Hyperbel H für M eine Lemniskate von leicht angeblicher Lage.

Ersetzt man den Winkel von 60^0 durch irgend einen Winkel α, so wird die Enveloppe die aus M mit $\cos\alpha$ multiplicirte erste negative und der Ort die aus M mit $\sec\alpha$ multiplicirte erste positive Fusspunktencurve von C^n für M. Indem dieses Resultat für die Enveloppe unmittelbar einleuchtet, findet man in Bezug auf den Ort, dass $MP_2P'P_1$ wie oben ein Kreisviereck ist und der Winkel $P_1P'P_2$ von $180^0 - 2\alpha$ durch MP' gehälftet wird. Deutet man dann weiter Wkl. MPQ = Wkl. MP_1Q_1 = Wkl. MP_2Q_2 durch β an, so hat man Wkl. $MQP = 180^0 - (\alpha+\beta)$ und Wkl. $Q'MP = (\alpha+\beta) - 90^0$, und steht also QQ' senkrecht auf MP'. Und endlich folgt aus den Relationen $MQ' = MQ\sin(\alpha+\beta)$ und $MP'\cos\alpha = MQ\sin(\alpha+\beta)$ noch $MQ'\sec\alpha = MP'$ [24]).

---

24) Für die Anwendung des zweiten Teiles dieses allgemeineren Satzes auf den Fall einer gleichseitigen Hyperbel vergleiche man meine „Notiz über die Lemniskate“ (a. a. O., Seite 1265).

Bemerkung zur Arnoldschen Theorie der Pneumatosis.

Von

K. Reiche.

Die in Band 149 dieses Archivs von mir gegebene Theorie der Pneumatosis cystoides intestinorum hominis ist von Arnold (Heidelberg) in Band 150 dieses Archivs angegriffen worden. Ich habe mich bemüht, die Einwände Arnolds zu widerlegen und meine Theorie aufrecht zu erhalten. Ich habe dabei Arnold gegenüber den Standpunkt vertreten, daß die Pneumatosis cystoides intestinorum hominis eine Krankheit sui generis sei, die mit Emphysem nichts zu tun habe. Arnold hat mir nun in Band 150 dieses Archivs vorgeworfen, ich hätte seine Arbeiten nicht gelesen, weil ich sonst wissen müßte, daß er selbst schon vor mir die Ansicht vertreten habe, daß die Pneumatosis cystoides intestinorum hominis eine Krankheit sui generis sei. Ich habe Arnolds Arbeiten sehr wohl gelesen, aber ich habe sie nicht so verstanden, wie Arnold jetzt behauptet. Ich habe sie so verstanden, daß Arnold die Pneumatosis cystoides intestinorum hominis für eine Form des Emphysems hält.

Curve s bestimmt, so sind die Relationen der Coordinaten in der Form gegeben:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + pf + qf' + rl \\ y_1 &= y + pg + qg' + rm \\ z_1 &= z + ph + qh' + rn \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Hieraus gehen die Relationen der Richtungscosinus der begleitenden Axen hervor:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= af + bf' + cl;\ g_1 = ag + \dots \\ f_1' &= a_1 f + b_1 f' + c_1 l;\ g_1' = a_1 g + \dots \\ l_1 &= a_2 f + b_2 f' + c_2 l;\ m_1' = a_2 g + \dots \end{aligned}\right\} \text{etc. mit gleichen Coefficienten.} \qquad (2)$$

und zugleich das Bogenelement ∂s_1 und die Contingenzwinkel $\partial\tau_1, \partial\vartheta_1$.

Ueber das Bogenelement ∂s_1 kann man, wie ich in meiner Curventheorie gezeigt habe, noch beliebig verfügen und die Coordinaten $x_1 y_1 z_1$ dadurch berechnen, nachdem alle Grössen, die keine Linearausdehnung enthalten, der Aufgabe gemäss bestimmt sind. Daher würde jeder andre Weg unnötige Complicationen schaffen als der, welcher von der Gl. (2) ausgeht und erst nach deren Erledigung die Lineargrössen zuzieht.

In den Gl. (1)(2) sind alle Grössen als Functionen einer Variabeln anzusehen (ohne constante Werte auszuschliessen).

Wir nennen nun die Darstellung einer Curve s_1, die gemäss den Gl. (1) oder (2) in Beziehung zur Curve s steht, eine Ableitung von derselben nach einem durch die Coefficienten ausgedrückten Princip.

Diese Erklärung lässt indes noch zweierlei Auffassung zu. Sind alle Grössen Functionen eines Parameters φ, so kann man φ entweder zum Princip oder zur Curve rechnen. Der Unterschied zeigt sich, wenn man von verschiedenen Curven nach demselben Princip ableiten will. Im ersten Fall bleiben a, b, c immer dieselben Functionen von φ, während τ, ϑ in andre Functionen von φ übergehen. Im letztern Falle muss nicht nur φ mit Veränderung der Curve mit verändert werden, sondern es müssen auch a, b, c derart definirt sein, dass die veränderte Abhängigkeit vom veränderten Parameter substituirt werden kann. Sei z. B. τ selbst Parameter,

$$\vartheta = \vartheta(\tau);\ a = a(\tau, \vartheta(\tau));\ \text{etc.}$$

dann wird bei Anwendung desselben Princips auf eine neue Curve im ersten Falle

Digitized by Google

Nous choisissons de nouvelles inconnues α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ, μ, ν, ξ, o, π, ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω définies par les équations

$$\begin{aligned}
x &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + o + \pi + \rho + \sigma + \tau + \upsilon + \varphi + \chi + \psi + \omega \\
y &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + o + \pi + \rho + \sigma + \tau + \upsilon + \varphi + \chi + \psi - \omega \\
z &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + o + \pi + \rho + \sigma + \tau + \upsilon - \varphi - \chi - \psi + \omega \\
t &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + o + \pi + \rho + \sigma + \tau - \upsilon + \varphi + \chi + \psi + \omega \\
u &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + o + \pi + \rho + \sigma - \tau + \upsilon + \varphi + \chi + \psi + \omega \\
v &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + o + \pi + \rho - \sigma + \tau + \upsilon + \varphi + \chi + \psi + \omega \\
w &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + o + \pi - \rho + \sigma + \tau + \upsilon + \varphi + \chi + \psi + \omega
\end{aligned}$$

Nous supposons que les équations précédentes soient résolues par rapport aux nouvelles inconnues, et représentons leurs valeurs par les équations

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2^{23}}(x + y + z + t + u + v + w + \ldots) \\
\beta &= \frac{1}{2^{23}}(x + y + z + t + u + v - w + \ldots) \\
\gamma &= \frac{1}{2^{23}}(x + y + z + t + u - v + w + \ldots) \\
&\ldots\ldots\ldots

Sei nun

$$a = \cos 2\alpha; \quad b = \sin 2\alpha \cos\beta; \quad c = \sin 2\alpha \sin\beta \tag{6}$$

also

$$f_1 = f\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\,(f'\cos\beta + l\sin\beta) \tag{7}$$

Dies differentiirt gibt nach Vergleichung der 2 Ausdrücke von f_1'

$$\left.\begin{aligned} a_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau} &= -\sin 2\alpha\,(2\alpha' + \cos\beta) \\ b_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau} &= \cos 2\alpha\cos\beta\,(2\alpha' + \cos\beta) - \sin\beta\,[(\beta' + \vartheta')\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\sin\beta] \\ c_1\frac{\partial\tau_1}{\partial\tau} &= \cos 2\alpha\sin\beta\,(2\alpha' + \cos\beta) + \cos\beta\,[(\beta' + \vartheta')\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\sin\beta] \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Nach Einsetzung dieser Werte wird Gl. (5):

$$\begin{aligned} 0 &= 2\cos^2\alpha\,\{\sin\beta\,(2\alpha' + \cos\beta) + \cos\beta\,[(\beta' + \vartheta')\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\sin\beta]\} \\ &= 4\cos^2\alpha\,\{\alpha'\sin\beta + \sin\alpha\,[(\beta' + \vartheta')\cos\alpha + \sin\alpha\sin\beta]\cos\beta\} \end{aligned}$$

Die eine Lösung ist $\cos\alpha = 0$. Hier ist

$$f_1 = -f; \quad f_1' = \mp f'; \quad l_1 = \pm l; \quad \tau_1 = \pm\tau$$

die andre erfordert die Integration der Gleichung:

$$\partial\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\,[\partial(\beta + \vartheta)\cos\alpha + \partial\tau\sin\alpha\sin\beta] = 0 \tag{9}$$

Wird nun für gegebenes Ableitungsprincip die Curve gesucht, so hat man:

$$\partial\vartheta = -\partial\beta - \partial\tau\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\beta - \frac{\partial\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\alpha\cos\alpha} \tag{10}$$

wo α und β in τ gegeben sind. Durch ϑ als Function von τ ist die Curvenclasse bestimmt, doch hängt ihre Darstellung von der Integration einer linearen Gleichung 2. Ordnung ab, ist daher im allgemeinen nicht ausführbar.

Ferner gibt es einzelne Werte von α, β, welche die Gleichung unabhängig von ϑ erfüllen, so dass die Curve willkürlich bleibt. Hiervon später.

Sucht man hingegen das Ableitungsprincip für beliebig gegebene Curve, also für gegebene Relation zwischen τ und ϑ, so ist Gl. (9) linear in cot α, und man findet:

$$\cot\alpha = -\frac{1}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial\vartheta}\right)^2}}\int\frac{\partial k}{\vartheta'}; \quad \cot\beta = -\frac{\partial k}{k\partial\vartheta} \tag{11}$$

wo k willkürliche Function von τ oder ϑ ist.

Digitized by Go

Diatonic set {0,2,4,5,7,9,11} (pitch set {0,2,4,5,7,9,11}) is similar to

$$\{0,2,4,5,7,9,11\}\ \{0,2,4,5,7,9,11\}$$
$$\{0,2,4,5,7,9,11\}\ \{0,2,4,5,7,9,11\}$$

and

woraus durch Elimination von ∂p, ∂q, ∂r:

$$\left.\begin{aligned}(1+a)(\partial s_1-\partial s) &= q(\partial\tau_1-\partial\tau)\\ b(\partial s_1-\partial s) &= -p(\partial\tau_1-\partial\tau)+r(\partial\vartheta_1-\partial\vartheta)\\ c(\partial s_1-\partial s) &= -q(\partial\vartheta_1-\partial\vartheta)\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Eliminirt man q, so kommt:

$$\frac{\partial\vartheta_1-\partial\vartheta}{\partial\tau_1-\partial\tau}=-\frac{c}{1+a} \tag{20}$$

wie auch Gl. (13) und (16) ergeben. Eliminirt man die Differentiale, so erhält man:

$$(1+a)p+bq+cr=0 \tag{21}$$

Die Gl. (18) lassen sich jetzt vertreten durch die 3 letzten derselben und die Gl. (19); letztere wieder durch

$$\partial s_1=\partial s+q\frac{\partial\tau_1-\partial\tau}{1+a} \tag{22}$$

und durch die Gl. (20) (21). Eliminirt man noch ∂s_1, so hat man im ganzen die 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}-(1-a)\partial s &= \partial p-q\frac{a\partial\tau_1+\partial\tau}{1+a}\\ b\,\partial s &= \partial q+p\,\partial\tau_1-r\partial\vartheta_1\\ c\,\partial s &= \partial r+q\partial\vartheta_1\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

woraus, nach Multiplication mit $1+a$, b, c und Addition:

$$0=(1+a)\partial p+b\partial q+c\partial r+bp\partial\tau_1-q(a\partial\tau_1+\partial\tau-c\partial\vartheta_1)-br\,\partial\vartheta_1$$

das ist nach Gl. (21)

$$p\partial a+q\partial b+r\partial c=bp\partial\tau_1-q(a\partial\tau_1+\partial\tau-c\partial\vartheta_1)-br\partial\vartheta_1$$

Diese Gleichung zeigt sich nach Einführung der Werte (6) (13) (15) für a, b, c, $\partial\tau_1$, $\partial\vartheta_1$ identisch mit (21), folglich ist jede der Gl. (23) eine Folge der beiden andern. Durch Verbindung der 2 letzten erhält man:

$$\begin{aligned}(1-a^2)\partial s &= \partial(bq+cr)+bp\partial\tau_1+(cq-br)\partial\vartheta_1-q\partial b-r\partial c\\ 0 &= \partial(cq-br)+cp\partial\tau_1-(bq+cr)\partial\vartheta_1-q\partial c+r\partial b\end{aligned}$$

Führt man die Werte (6) ein und setzt

$$q=u\cos\beta-v\sin\beta;\qquad r=u\sin\beta+v\cos\beta \tag{24}$$

so werden die beiden Gleichungen:

Digitized by Go

Quindi $a_1 = a_2 \cos\varphi_2 \pm b_2 \sin\varphi_2$

$$b_1 = \pm a_2 \sin\varphi_2 + b_2 \cos\varphi_2$$

Ora, se φ_2 è un angolo del primo quadrante, $\cos\varphi_2$ e $\sin\varphi_2$ sono positivi, e quindi a_1 è la differenza o la somma di due numeri positivi, mentre b_1 è la somma di due numeri positivi.

wird, so muss nach der ersten Gl. (9) $\partial s_1 = \partial s$ sein, mithin beide Curven identisch werden. Eine Ableitung ist nicht möglich.

Für den Fall $\cos\alpha = 0$, wo β willkürlich ist, braucht man nur $\cos\beta = 0$ zu setzen; dann ist er auch in dem erst genannten Falle enthalten. Man findet dann:

$$f_1 = -f;\quad f_1' = -f';\quad l_1 = l$$
$$\partial\tau_1 = \partial\tau;\qquad \partial\vartheta_1 = -\partial\vartheta$$

und nach Einsetzung der Werte $a = -1$, $b = c = 0$ in die Gl. (19):

$$q = 0;\qquad r = 0$$

dann nach der zweiten Gl. (18) auch $p = 0$. Auch hier sind die Curven s und s_1 congruent.

Sei α constant, $\beta = R$, also

$$\begin{aligned} f_1 &= f\cos 2\alpha + l\sin 2\alpha \\ f_1' &= -f' \\ l_1 &= f\sin 2\alpha - l\cos 2\alpha \\ \tau_1 &= -\tau\cos 2\alpha + \vartheta\sin 2\alpha \\ \vartheta_1 &= \tau\sin 2\alpha + \vartheta\cos 2\alpha \end{aligned}$$

Hier zeigt sich die Abweichung von den Gl. (13) (16).

Die Gl. (19), deren erste und dritte übereinstimmen, geben:

$$\left.\begin{aligned} \partial s_1 - \partial s &= q(\partial\vartheta\,\mathrm{tg}\,\alpha - \partial\tau) \\ 0 &= (p\cos\alpha + r\sin\alpha)(\partial\vartheta\,\mathrm{tg}\,\alpha - \partial\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Entweder ist also

$$\vartheta' = \cot\alpha;\qquad \partial s_1 = \partial s$$

oder

$$p\cos\alpha + r\sin\alpha = 0 \qquad (29)$$

Nimmt man hierzu die 3 letzten Gl. (18), und eliminirt p und ∂s_1, so werden die 4. und 6te identisch, und es bleibt:

$$\partial s\sin 2\alpha = \partial r + q(\partial\tau\sin 2\alpha + \partial\vartheta\cos 2\alpha) \qquad (30)$$
$$\partial q = r(\partial\tau\,\mathrm{tg}\,\alpha + \partial\vartheta) \qquad (31)$$

Setzt man

$$\eta = \tau\sin\alpha + \vartheta\cos\alpha$$

so wird

$$r = \frac{\partial q}{\partial\eta}\cos\alpha \qquad (32)$$

$$\frac{\partial s}{\partial\eta}\sin 2\alpha = \frac{\partial^2 q}{\partial\eta^2}\cos\alpha + q\left(\frac{\partial\tau}{\partial\eta}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\right) \qquad (33)$$

Comité Directeur de la Société française de Géologie pour l'année 1911.

Bureau. — Mm. les :

Président : M. Ch. Barrois, ✻, ☆, ☆, ☆

VII.

Transformationen der elliptischen Integrale und Functionen in Verbindung mit der Theorie der Kettenlinie.

Von

Emil Oekinghaus.

Erster und zweiter Teil.

Die von Abel und Jacobi in die Mathematik eingeführten elliptischen Functionen und deren Reihenentwickelungen scheinen in analytischer Hinsicht zwar zu einem gewissen Abschluss gelangt zu sein, so dass es schwer sein dürfte, auf diesem so viel durchforschten Gebiete noch etwas Nennenswertes zu Tage zu fördern; dagegen ist wohl bisher unbemerkt geblieben, dass auch nach geometrischer Richtung hin diesen Functionen und Reihen eine nicht geringe Bedeutung zukommt, welche die Theorie derselben in neuem Lichte erscheinen lässt.

Es ist eine zunächst durch den Kreis vermittelte zum Zweck einer geometrischen Darstellung dieser Functionen eingeführte Transformation, welche in allen auf Reihenentwickelungen bezüglichen Untersuchungen sich als eine überaus reiche Quelle neuer wertvoller Relationen zeigt und aus dem Grunde zu fast unerschöpflichen Neubildungen Veranlassung gibt, weil jede transformirte Reihe einer mehrfachen Transformation unterworfen werden kann. Bei der Ableitung einer grossen Zahl elliptischer Functionen treten einzelne Reihen von so rascher Convergenz auf, dass mehrere derselben einfachen geschlossenen Ausdrücken gleich gesetzt werden können, und ferner führt die Specialisirung verschiedener dieser Formen zu neuen Sätzen der höheren Arithmetik, worunter einer eine Verallgemeinerung

Digitized by Go

eines von Jacobi unter ähnlichen Verhältnissen gefundenen Satzes zu enthalten scheint.

Die eigentliche Bedeutung der Transformation besteht aber darin, dass dieselbe mit der Kettenlinie in einigen Zusammenhang tritt, indem nicht blos sämmtliche Eigenschaften letzterer formell in Reihenform sich darstellen lassen, sondern auch die Curve selbst wieder zum Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen benutzt werden kann. Durch diese Verbindung der Analysis mit der Geometrie zugleich unter Anwendung der Differentiation und Integration werden neue analytische Verhältnisse geometrischer Natur gewonnen und auch teilweise vermittelst einer dynamischen Betrachtung und Einkleidung in mechanischem Sinne gedeutet. Auch haben wir zur Berechnung der unvollständigen elliptischen Integrale der 1. und 2. Art neue Reihenentwickelungen abgeleitet, deren Convergenz wohl nichts zu wünschen übrig lässt. Die Methode des Imaginairen konnte ebenfalls mit Erfolg verwertet werden, wodurch die bekannteren elliptischen Functionen zu neuen Darstellungen gelangten.

Ebenso wichtig wie merkwürdig ist die Art, wie der irreductible Fall der kubischen Gleichungen in Verbindung mit der Kettenlinie und der Theorie der elliptischen Functionen auftritt und damit eine bestimmte Verwandtschaft dieser Curve mit der von uns früher in anderm Sinne behandelten Lemniskate und gleichseitigen Hyperbel documentirt. Indem wir nun nach dieser Richtung hin die Eigenschaften der Lemniskate weiter untersuchten, resultirte eine ganze Classe neuer eigenartiger Gleichungen, von denen die genannten Fälle der Gleichungen 3. Grades die untere Grenze bilden, während die allgemeine Lösung der diesen verwandten höheren Gleichungen vermittelst der Curve in einer der Cardanischen entsprechenden Formel auf das einfachste und eleganteste vermittelt wird.

Zum Schluss haben wir noch eine geometrische Darstellung von Wurzelausdrücken aus den Eigenschaften der Kettenlinie abgeleitet, die sich durch Leichtigkeit und Einfachheit empfiehlt.

Erster Teil.

I.

Wir geben zunächst die geometrischen Relationen für diejenigen Verhältnisse, welche aus den verschiedenen Lagen einer um einen festen Punkt drehbaren Geraden zu einem Kreise hervorgehen. Die Entfernung dieses Punktes vom Centrum sei R, der Radius a. Die Gerade schneide den Kreis in 2 Punkten, welche mit dem Centrum

Digitized by Go

O verbunden die Centriwinkel $2\varphi_1$ und $2\varphi_2$ bestimmen. Den 2. Schnittpunkt der Centrale RO (Fig. 1.) verbinden wir mit den genannten Punkten P_1 und P_2 durch Sehnen, welche verlängert mit der Secante RP_2P_1 die Winkel φ_2 und φ_1 bez. einschliessen, endlich bezeichnen wir noch den Steigungswinkel der Geraden zur Centrale mit $\tau = 90^0 - \alpha$. Demnach hat man, wenn die Strecken RP_1 und RP_2 bezüglich x_1 und x_2 genannt werden $x_1 + x_2 = R\cos\tau$ und $x_1x_2 = R^2 - a^2$ aber auch die quadratische Gleichung

$$1) \qquad x^2 - 2R\cos\tau \,.\, x + R^2 - a^2 = 0$$

Die Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi$, welche leicht abzuleiten ist, wird dargestellt durch

$$2) \qquad \operatorname{tg}\varphi^2 - \frac{2a}{R-a}\cot\tau \,.\, \operatorname{tg}\varphi + \frac{R+a}{R-a} = 0$$

Da wir noch die Formen $\sin\varphi_1 \sin\varphi_2$ und $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2$ nötig haben. so bemerken wir, dass dieselben aus der Gleichung

$$2)_* \qquad \operatorname{tg}\varphi^2 - A\operatorname{tg}\varphi + B = 0$$

leicht berechnet werden können, man findet

$$3) \quad \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + (1-b)^2}}, \quad \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (1-b)^2}}$$

Wir setzen nun für die nachfolgenden Untersuchungen fest, dass die Winkel $\varphi_1 \varphi_2$ die Amplituden zweier elliptischen Integrale der ersten Art seien, deren Argumente einer Bedingungsgleichung genügen, die wir wie folgt ableiten.

Das Additionstheorem der elliptischen Integrale 1. Art basirt auf der Bedingungsgleichung

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \triangle(\varphi) = \cos\varphi$$

die wir nach Potenzen von φ als Amplitude eines analogen Integrals entwickeln und für welche demnach die Beziehungen 3) aus der Gleichung 2) zu berechnen sind.

Man findet nach einigen Entwickelungen schliesslich

$$4) \quad \cos\varphi^2\left(\frac{a^2}{\sin\tau^2} - z^2\frac{(R+a)^2}{4}\right) - a\frac{(R-a)}{\sin\tau}\cos\varphi + z^2\frac{(R+a)^2}{4} - Ra = 0$$

deren Wurzeln zwei Amplituden und also auch 2 Integrale bestimmen. Man bemerke aber, was für das folgende von Bedeutung ist, dass das gleich Null gesetzte Absolutglied der Gleichung kein τ enthält und den Modulus $z^2 = \frac{4Ra}{(R+a)^2}$ bestimmt. Indem wir also die-

(2) Prove that, when n is not an integer, $J_n(x)$ and $J_{-n}(x)$ are connected by the relation

$$J_n(x) = \frac{\sin n\pi}{\sin n\pi}\left\{\frac{x}{2}\right\}^n \left\{\frac{1}{\Gamma(n+1)} - \frac{x^2}{2^2\,1!\,\Gamma(n+2)} + \frac{x^4}{2^4\,2!\,\Gamma(n+3)} - \&c.\right\}$$

$$- \left\{\frac{x}{2}\right\}^{-n} \left\{\frac{1}{\Gamma(-n+1)} - \frac{x^2}{2^2\,1!\,\Gamma(-n+2)} + \frac{x^4}{2^4\,2!\,\Gamma(-n+3)} - \&c.\right\}$$

Hence, when n is an integer, $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$.

(3) Prove that, when n is not an integer, $J_n(x)$ and $J_{-n}(x)$ are connected by the relation

$$J_n(x) = \frac{\sin n\pi}{\sin n\pi}\left\{\frac{x}{2}\right\}^n \left\{\frac{1}{\Gamma(n+1)} - \frac{x^2}{2^2\,1!\,\Gamma(n+2)} + \frac{x^4}{2^4\,2!\,\Gamma(n+3)} - \&c.\right\}$$

$$- \left\{\frac{x}{2}\right\}^{-n} \left\{\frac{1}{\Gamma(-n+1)} - \frac{x^2}{2^2\,1!\,\Gamma(-n+2)} + \frac{x^4}{2^4\,2!\,\Gamma(-n+3)} - \&c.\right\}$$

Hence, when n is an integer, $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$.

(4) Prove that, when n is not an integer, $J_n(x)$ and $J_{-n}(x)$ are connected by the relation

$$J_n(x) = \frac{\sin n\pi}{\sin n\pi}\left\{\frac{x}{2}\right\}^n \left\{\frac{1}{\Gamma(n+1)} - \frac{x^2}{2^2\,1!\,\Gamma(n+2)} + \frac{x^4}{2^4\,2!\,\Gamma(n+3)} - \&c.\right\}$$

$$- \left\{\frac{x}{2}\right\}^{-n} \left\{\frac{1}{\Gamma(-n+1)} - \frac{x^2}{2^2\,1!\,\Gamma(-n+2)} + \frac{x^4}{2^4\,2!\,\Gamma(-n+3)} - \&c.\right\}$$

Hence, when n is an integer, $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$.

(5) Prove that, when n is not an integer, $J_n(x)$ and $J_{-n}(x)$ are connected by the relation

$$J_n(x) = \frac{\sin n\pi}{\sin n\pi}\left\{\frac{x}{2}\right\}^n \left\{\frac{1}{\Gamma(n+1)} - \frac{x^2}{2^2\,1!\,\Gamma(n+2)} + \frac{x^4}{2^4\,2!\,\Gamma(n+3)} - \&c.\right\}$$

$$- \left\{\frac{x}{2}\right\}^{-n} \left\{\frac{1}{\Gamma(-n+1)} - \frac{x^2}{2^2\,1!\,\Gamma(-n+2)} + \frac{x^4}{2^4\,2!\,\Gamma(-n+3)} - \&c.\right\}$$

Hence, when n is an integer, $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$.

15) $$\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\Delta\varphi_1} = \frac{\sin 2\varphi_1}{2x_1}(R+a) = \frac{R+a}{2a}\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{1-z'},$$

wie sich aus dem Siuussatz für das Dreieck ROP_1 ergibt.

Wir stellen ferner die Formeln für $\sin\varphi_1^2$ und $\sin\varphi_2^2$ auf, sie sind

16) $$2\sin\varphi_1^2 = 1+\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha^2+\sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2},$$

$$2\sin\varphi_2^2 = 1+\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha^2-\sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2},$$

woraus

17) $$\sin\varphi_1^2+\sin\varphi_2^2 = 1+\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha^2,$$

$$\sin\varphi_1^2-\sin\varphi_2^2 = \sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2}.$$

Um $\varphi_1+\varphi_2$ zu bilden, benutzen wir für 2$_*$) die Formel

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{A}{1-B}$$

Die Anwendung derselben auf 2) liefert die Relation

18) $$\varphi_1+\varphi_2 = 90^0+\tau = 180^0-\alpha.$$

Ebenso bemerke man noch

19) $$\sin\varphi_1 \pm \sin\varphi_2 = \sqrt{\frac{1-z'+(1+z')\cos\alpha^2 \pm 2\cos\alpha}{1-z'}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \text{ und } \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sin\alpha \pm \sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2\cos\alpha^2}}{2z'\cos\alpha}(1-z')$$

Wir stellen noch die Werte von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ durch φ dar.

20) $$\sin\alpha^2 = \frac{2z'}{1+z'}\frac{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+1}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+z'},$$

$$\cos\alpha^2 = \frac{1-z'}{1+z'}\frac{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}-z'}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+z'}$$

Die letzte kann auch in

21) $$\cos\alpha = \frac{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}-z'}{(1+z^2)\cos\varphi}$$

Digitized by Google

transformirt werden. Bezüglich der Formel 5) führen wir einen Hülfswinkel ein, indem wir zunächst dieselbe in

$$22)\quad \frac{z}{z'}\cos\varphi = \frac{2\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\cos\alpha}{1-\left(\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\cos\alpha\right)^2}$$

umwandeln. Wir setzen demnach

$$23)\quad \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\cos\alpha = \operatorname{tg}\psi,$$

und man hat

$$24)\quad \frac{z}{z'}\cos\varphi = \operatorname{tg} 2\psi,$$

welchen Relationen wir noch die folgende beifügen:

$$25)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-z'\cot\frac{1}{2}\alpha^2}{1-z'\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha^2}}.$$

In den Anwendungen werden wir häufig der Kürze wegen einfach φ anstatt $\operatorname{am} u$ schreiben.

Diese Formeln reichen hin, um diejenigen Transformationen der elliptischen Functionen durchzuführen, welche in ihren verschiedenen Formen eine geometrische Erklärung der analytischen Relationen ermöglichen. Die oben eingeführte Transformation ist übrigens nicht die einzige, aber, da alle anderen zu denselben Zielen führen, haben wir die hier angewandte wegen ihrer Einfachheit und Leichtigkeit besonders ausgewählt.

Der in der Theorie der elliptischen Functiznen angewendeten Transformationen werden wir uns ebenfalls gelegentlich bedienen und bemerken demnach an dieser Stelle, dass, wenn z durch $\frac{1-z'}{1+z'}$, ferner u durch $(1+z')u$ ersetzt wird: K sich in $\frac{1}{2}(1+z')K$ und q in q^2 verwandelt. Ebenso werden wir die bekannten Relationen

$$\Delta\operatorname{am}(K-u) = \frac{z'}{\Delta\operatorname{am} u},$$

$$26)\quad \sin\operatorname{am}(K-u) = \frac{\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},$$

$$\cos\operatorname{am}(K-u) = \frac{z'\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}$$

häufig benutzen.

Digitized

Das durch die Amplitude φ definirte Integral

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - z^2 \sin \varphi^2}}$$

hat übrigens eine leicht anzugebende dynamische Bedeutung, wie aus unserer Abhandlung über die elliptischen Integralfunctionen bezüglich der Anwendung letzterer auf den Kreis gefolgert werden kann. Mit Hinzunahme einer Constanten bedeutet es die Zeit, welche ein schwerer Punkt zur Zurücklegung des Bogens $P_1 P_2$ gebraucht, vorausgesetzt, dass die entsprechende Sehne stets durch einen festen harmonischen Punkt des Kreises geht.

II.

Wir benutzen jetzt die entwickelten Formeln, um dieselben auf die Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen anzuwenden und letztere zu transformiren. Die daraus hervorgehenden Reihen haben den Vorzug, dass sie eine stärkere Convergenz besitzen und eine geometrische Deutung zulassen, die für die weitere Untersuchung von Wert ist. Bei den folgenden Darstellungen haben wir nun zu beachten, dass stets $u_1 + u_2 = K$, wo K das vollständige elliptische Integral der 1. Art bezeichnet und $u_1 - u_2 = u$ ist, worin das Argument u sich auf die Amplitude $\varphi = \operatorname{am} u$ bezieht, während die andern $u_1 u_2$ durch die Amplituden $\varphi_1 \varphi_2$, wie sie in der Kreisgleichung 2) erscheinen, definirt werden.

Wir wählen zuerst die folgende Reihe

$$27) \quad \varphi = \operatorname{am} u = \frac{\pi u}{2K} + \frac{2q}{1+q^2} \sin \frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2} \frac{2q^2}{1+q^2} \sin \frac{2\pi u}{K} + \frac{1}{3} \frac{2q^3}{1+q^6} \sin \frac{3\pi u}{K} \ldots,$$

und bringen mit dieser die aus 18) hervorgehende Relation

$$28) \qquad \operatorname{am} u_1 + \operatorname{am} u_2 = \frac{\pi}{2} + \tau$$

in Beziehung. In der Reihe setzen wir zuerst $u = u_1$ und dann $= u_2$ und addiren, indem wir beachten, dass

$$\sin m u_1 + \sin m u_2 = 2 \sin \frac{m}{2} (u_1 + u_2) \cos \frac{m}{2} (u_1 - u_2)$$

ist. Die Glieder mit geraden Potenzen fallen aus, und man hat

$$29) \quad \frac{1}{4} \tau = \frac{q}{1+q^2} \cos \frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3} \frac{q^3}{1+q^6} \cos \frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5} \frac{q^5}{1+q^{10}} \cos \frac{5\pi u}{2K} - \ldots$$

Digitized by Go

Folgen mit Werte $+\infty$ und $-\infty$ sollen als bestimmt divergent bezeichnet werden.

Beispiel 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+1}{n} = -\infty$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n > 0$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n < 0$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $a_n > 0$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = +\infty$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $a_n > 0$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}} = 0$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $a_n > 0$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $a_n > 0$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^2} = 0$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $a_n > 0$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^k} = 0$ für $k > 0$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $a_n > 0$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^k} = +\infty$ für $k < 0$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $a_n > 0$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^k} = 1$ für $k = 0$.

Beispiel 3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-2}} = +\infty$.

Gilt $a_n \leq b_n$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$, wenn diese Grenzwerte existieren.

Gilt $a_n < b_n$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$, wenn diese Grenzwerte existieren.

Gilt $a_n \leq b_n$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, wenn diese Grenzwerte existieren.

Satz 1. Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so ist

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad \text{wenn } b \neq 0$$

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, wenn $a_n > 0$ für alle n.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k$, wenn $a_n > 0$ für alle n.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$, wenn $a_n > 0$ für alle n.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{a^2}$, wenn $a_n > 0$ für alle n.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^k} = \frac{1}{a^k}$, wenn $a_n > 0$ für alle n.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^k} = 1$ für $k = 0$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^k} = \frac{1}{a^k}$ für $k < 0$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^k} = \frac{1}{a^k}$ für $k >

$$35)\quad \frac{1}{4}\arcsin\sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}\,\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{\pi u}{8K} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \cdots$$

Bezüglich der Reihe 30) kann man den unter 23) bestimmten Hülfswinkel ψ benutzen und man hat

$$36)\quad \operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\sin 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right),$$

$$\cos\varphi = \frac{z'}{z}\operatorname{tg} 2\psi.$$

Für ein gegebenes $u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}}$ lässt sich hiernach ψ und damit die Amplitude φ berechnen.

Man kann die gefundenen Reihen noch leicht vermehren. So ist gemäss 29)

$$37)\quad \sqrt{\frac{\Delta+1}{\Delta+z'}\,\frac{2z'}{1+z'}} = \cos 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots\right).$$

Wir setzen hierin zuerst u gleich u_1 und darauf $= u_2$, dasselbe gelte für Δ. Beide Ausdrücke multipliciren wir und ersetzen $2\cos A\cos B$ durch $\cos(A+B)+\cos(A-B)$, das Product $\frac{\Delta_1+1}{\Delta_1+z'}\cdot\frac{\Delta_2+1}{\Delta_2+z'}$ wird gleich $\frac{1}{z'}$ und das schliessliche Resultat ist

$$38)\quad \frac{4\sqrt{z'}}{1+z'} = \cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{4K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{4K} - \frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{4K} - \frac{1}{7}\frac{q^7}{1+q^{14}}\cos\frac{7\pi u}{4K}\cdots\right)$$
$$+\cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{4K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{4K} - \frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{4K} + \frac{1}{7}\frac{q^7}{1+q^{14}}\sin\frac{7\pi u}{4K}\cdots\right)$$

In ähnlicher Art folgt aus der Reihe

$$39)\quad \sqrt{\frac{\Delta-z'}{\Delta+z'}\,\frac{1-z'}{1+z'}} = \sin 4\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\cdots\right)$$

die nachstehende, die analog der vorhergehenden auch in ein Product zweier Sinus transformirt werden kann:

Digitized by Google

40) $$-2\frac{1-z'}{1+z'}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=$$
$$\cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{4K}+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{4K}-\frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{4K}-\ldots\right)$$
$$-\cos 4\sqrt{2}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{4K}-\frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{4K}-\frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{4K}+\ldots\right).$$

III.

Die elliptischen Functionen leiten ferner die folgende Reihe ab

41)
$$\Delta\mathrm{am}u=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{q^2}{1+q^4}+\frac{2\pi u}{K}+\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{K}+\ldots\right).$$

Um dieselbe zu transformiren, benutzen wir die Formel

$$\Delta\,\mathrm{am}\,u_1+\Delta\,\mathrm{am}\,u_2=(1+z')\sin\alpha.$$

Führen wir hierin den Wert von $\sin\alpha$ aus 20) ein, so ergibt sich wie früher

42) $$\frac{1}{4}\sqrt{2z'(1+z')\frac{\Delta+1}{\Delta+z'}}=\frac{\pi}{K}\left(\frac{1}{4}-\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{q^4}{1+q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}-\ldots\right),$$

43) $$\frac{1}{4}\sqrt{2(1+z')\frac{z'+\Delta}{1+\Delta}}=\frac{\pi}{K}\left(\frac{1}{4}+\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{q^4}{1+q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}+\ldots\right).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen lassen sich mehrere Specialformen ableiten, deren eine wir wegen ihrer Wichtigkeit besonders hervorheben.

Wir setzen wieder $\varphi=90^0$ und $K=u$, es folgt

44) $$1+z'=\frac{\pi}{K}\left(1+\frac{4q^2}{1+q^4}+\frac{4q^4}{1+q^8}+\ldots\right).$$

Ferner wird für $\varphi=0$

45) $$2\sqrt{z'}=\frac{\pi}{K}\left(1-\frac{4q^2}{1+q^4}+\frac{4q^4}{1+q^8}-\frac{4q^6}{1+q^{12}}+\ldots\right).$$

Ziehen wir diese Gleichung von der obern ab, so erhält man

46) $$(1-\sqrt{z'})^2=\frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^4}+\frac{q^6}{1+q^{12}}+\frac{q^{10}}{1+q^{20}}+\ldots\right).$$

Entwickeln wir nun die Ausdrücke in der Klammer nach Potenzen von q, so resultirt zunächst folgendes.

Digitized by Go

47) $$(1-\sqrt{z'})^2 = \frac{8\pi}{K}(q^2+2q^{10}+q^{18}+2q^{26}+2q^{34}+3q^{50}\ \ldots).$$

Eine genauere Betrachtung der Reihe zeigt, dass dieselbe das Quadrat einer zweiten ist, so dass man hat

48) $$\frac{K}{\pi} = \frac{8}{(1-\sqrt{z'})^2}(q+q^9+q^{25}+q^{49}\ \ldots)^2.$$

Die Berechnung von K nach dieser Formel ist wegen der ausserordentlich starken Convergenz der Reihe, die vielleicht von keiner zweiten mehr erreicht wird, sehr leicht, da schon das erste Glied hinreicht um eine Genauigkeit bis q^{10} herbeizuführen. Man hat also mit grosser Genauigkeit

49) $$K = \frac{8\pi q^2}{(1-\sqrt{z'})^2}.$$

Andere Reihen sind nach dem Vorstehenden leicht zu gewinnen, so ist

50) $$(1+\sqrt{z'})^2 = \frac{8\pi}{K}\left(\frac{1}{4}+\frac{q^4}{1+q^8}+\frac{q^8}{1+q^{16}}\cdots\right).$$

Setzen wir in 42)

$$u = \frac{K}{2},$$

also

$$\Delta\ \mathrm{am}\ \frac{K}{2} = \sqrt{z'},$$

so kommt

51) $$\sqrt{2(1+z')\sqrt{z'}} = \frac{\pi}{K}\left(1-\frac{4q^4}{1+q^8}+\frac{4q^8}{1+q^{16}}-\frac{4q^{12}}{1+q^{24}}\cdots\right).$$

Führen wir auch hier die Reihenentwickelungen durch, so resultirt

52) $$\sqrt{2(1+z')\sqrt{z'}} = \frac{\pi}{K}(1-4q^4+4q^8+4q^{16}-8q^{20}+4q^{32}-4q^{36}\ \ldots)$$

oder

53) $$\sqrt{2(1+z')\sqrt{z'}} = \frac{\pi}{K}(1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+2q^{64}\ \ldots)^2.$$

Während also die Exponenten der Reihe 48) durch die 2. Potenzen der ungeraden Zahlen bestimmt werden, gilt dies bei der vorstehenden für die Geraden Zahlen der Zahlenreihe.

Eine weitere Transformation der letzten Formel ergibt noch

54) $$K = \frac{\pi}{2\sqrt{z'}}(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}\ \ldots)^2.$$

Digitized by Google

Ungleichen wie dies mit den Gleichen der Algebraischen Gleichungen.

$$\text{(1)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots + x_n^3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

Es folgt aus ihnen, daß $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ die Nullwerthe irgend einer ganzen Function n^{ten} Grades sind.

Es ist daher die Zahl der Gleichungen (1) gleich der Zahl der Unbekannten.

Die Gleichungen (1) lassen sich nun folgendermaßen darstellen, wo $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ die Coefficienten einer ganzen Function n^{ten} Grades sind:

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_1^2 - 2s_2 = 0 \\ s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_1^{n-1} - (n-1)s_1^{n-3}s_2 + \cdots = 0 \end{cases}$$

Die Gleichungen (2) haben nun die Eigenschaften, daß wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ihre Wurzeln sind, dann auch

$$x_1 + \varepsilon, \; x_2 + \varepsilon, \; x_3 + \varepsilon, \ldots, x_n + \varepsilon$$

ihre Wurzeln sind, wo ε eine beliebige Größe ist.

Ferner wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ihre Wurzeln sind, dann auch

$$\varepsilon x_1, \; \varepsilon x_2, \; \varepsilon x_3, \ldots, \varepsilon x_n$$

wo ε eine beliebige Größe ist.

Wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ihre Wurzeln sind, dann auch

$$\frac{1}{x_1}, \; \frac{1}{x_2}, \; \frac{1}{x_3}, \ldots, \frac{1}{x_n}$$

wo $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ von Null verschieden sind.

Wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ihre Wurzeln sind, dann auch

$$\frac{\varepsilon}{x_1}, \; \frac{\varepsilon}{x_2}, \; \frac{\varepsilon}{x_3}, \ldots, \frac{\varepsilon}{x_n}$$

wo ε eine beliebige Größe ist, die nicht Null ist.

Wenn $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ihre Wurzeln sind, dann auch

$$\frac{x_1}{\varepsilon}, \; \frac{x_2}{\varepsilon}, \; \frac{x_3}{\varepsilon}, \ldots, \frac{x_n}{\varepsilon}$$

wo ε eine beliebige Größe ist, die nicht Null ist.

61) $$\sqrt{2z'(1-z')\frac{1-\Delta}{z'+\Delta}} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K} \ldots\right),$$

oder transformirt

62) $$\sqrt{2(1-z')\frac{\Delta-z'}{\Delta+1}} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1+q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} \ldots\right),$$

welche den Reihen in 42), 43) entsprechen.

Dieselben können wiederum vermittelst einer Addition oder Subtraction transformirt werden, wenn wir beachten, dass unter der Voraussetzung $u_1 + u_2 = K$ die Relation $\Delta q_1 \Delta q_2 = z'$ besteht. Es kommt also diese Umwandlung darauf hinaus, den algebraischen Ausdruck

$$\sqrt{\frac{\Delta_1+1}{\Delta_1+z'}} \pm \sqrt{\frac{\Delta_2+1}{\Delta_2+z'}}$$

auf die geeignete Form zu bringen, die durch die obige Relation wesentlich vereinfacht wird. Man findet unter Benutzung von $\Delta_1 + \Delta_2 = (1+z')\sin\alpha$

63)

$$(1-\sqrt{z'})\sqrt{2\frac{(1+z')\sin\alpha - 2\sqrt{z'}}{1+\sin\alpha}} = \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^6}{1+q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

$$(1+\sqrt{z'})\sqrt{2\frac{(1+z')\sin\alpha + 2\sqrt{z'}}{1+\sin\alpha}} = \frac{2\pi}{K} - \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^4}{1+q^8}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{q^8}{1+q^{16}}\cos\frac{2\pi u}{K} \ldots\right).$$

Vermittelst Differentiation lassen sich aus den gegebenen Reihen mehrere neue ableiten. Dasselbe ist der Fall, wenn wir die mit $\frac{d\varphi}{\Delta} = u$ multiplicirten Glieder integriren. Wählen wir zu diesem Zwecke die Reihe 42), so muss demnach das Integral der Reihe

$$\int\sqrt{2z'(1+z')\frac{1+\Delta}{z'+\Delta}}\,\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{\pi u}{K} - \frac{4\pi}{K}\int\left(\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K} \ldots\right)du$$

gesucht werden.

Wir substituiren $z \sin\varphi = \sin\psi$, bezeichnen darauf $\cos\psi$ durch y, und das Integral wird demzufolge zu

$$\int \frac{dy}{(z'+y)\sqrt{-z'+(1+z')y-y^2}}.$$

Führen wir noch ein

$$\frac{1+z'}{2} - y = z,$$

so wird letzteres

$$\int \frac{dz}{\left(\frac{1+3z'}{2} - z\right)\sqrt{\frac{(1-z')^2}{4} - z^2}}.$$

Nach bekannten Methoden führt das Integral auf einen arc tg mit der $C = \frac{\pi}{2}$ und man hat

64) $$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+z'}{2z'}\,\frac{\Delta-z'}{1-\Delta}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi u}{2K} + 2\left(\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{1}{2}\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots\right).$$

oder nach einer einfachen Umformung

65) $$\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2z'}{1+z'}\,\frac{1-\Delta}{\Delta-z'}} = \frac{\pi u}{8K} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} - \dots$$

Man kann hierin $u = \frac{K}{2}$, $\Delta = \sqrt{z'}$ einführen, schreibt man alsdann anstatt z' und q^2 bezüglich $\frac{1-z}{1+z}$ und q, so erhält man

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{z'} = \frac{\pi}{4} - \frac{2q}{1+q^2} + \frac{2}{3}\frac{q^3}{1+q^7} - \frac{2}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}} + \dots,$$

oder auch

66) $$\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}} = \frac{2q}{1+q^2} - \frac{1}{3}\frac{2q^3}{1+q^6} + \frac{1}{5}\frac{2q^5}{1+q^{10}} - \dots,$$

welche für $z' = 0$ und $q = 1$ in die Leibnitz'sche Reihe übergeht. Die vorstehende konnte auch aus 32) entwickelt werden.

Erinnert man sich der aus den elliptischen Functionen bekannten Formel

Digitized by Google

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}} = \frac{q+q^9+q^{25}+\ldots}{1+2q^4+2q^{16}+\ldots},$$

so resultirt aus den beiden letzten noch

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2q+2q^9+2q^{25}-\ldots}{1+2q^4+2q^{16}+\ldots} = \frac{2q}{1+q^2} - \frac{1}{3}\,\frac{2q^3}{1+q^6} + \frac{1}{5}\,\frac{2q^5}{1+q^{10}} - \cdots$$

Eine weitere Entwickelung der allgemeinen Reihen kann vermittelst der Relation

$$\operatorname{arc\,tg} x \pm \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

geschehen. Demnach erhält man 2 neue Reihen und zwar zunächst

$$\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1-\sqrt{z'}}\sqrt{2\frac{(1+z')\sin\alpha+2\sqrt{z'}}{1-\sin\alpha}} =$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{3}\,\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots,$$

welche in arc sin transformirt zur folgenden wird:

67) $$\frac{1}{4}\arcsin\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$$

$$\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\,\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots,$$

und ferner

68) $$\frac{1}{4}\arccos\frac{1+\sqrt{z'}}{1-\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$$

$$\frac{\pi u}{8K} - \frac{1}{2}\,\frac{q^4}{1+q^8}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{4}\,\frac{q^8}{1+q^{16}}\sin\frac{2\pi u}{K} - \ldots$$

Man bemerke, dass in den letzten Reihen der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau$$

ist, aus den Formeln

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\sin\tau$$

und

$$\cos\varphi = \frac{z'}{z}\operatorname{tg} 2\psi$$

erhält man also bei gegebenem Argument

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+z^2\sin\varphi^2}}$$

ist dann die zweite Lösung, und zugleich diejenige, die praktisch allein in Betracht kommt.

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta}{\sin^2\alpha\cos\beta + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta}{\sin^2\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\cos\beta + \cos\alpha(1-\cos\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta}{\cos\beta + \cos\alpha(1-\cos\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta}{\cos\beta + \cos\alpha - \cos\alpha\cos\beta}$$

Multiplizieren wir Zähler und Nenner links mit $\sin\alpha$ und rechts mit $\cos\alpha$, so wird

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\cos\alpha\cos\beta}$$

Die rechten Verhältnisse sind in einander übergeführt, wenn man $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ setzt. Dann ergibt sich durch Division mit $\cos\alpha$ in Zähler und Nenner

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta}{\cos\beta + \cos\alpha - \cos\alpha\cos\beta}$$

Die rechten Verhältnisse sind in einander übergeführt, wenn man $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ setzt. Dann ergibt sich durch Division mit $\cos\alpha$ in Zähler und Nenner

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta}{\cos\beta + \cos\alpha - \cos\alpha\cos\beta}$$

Der Augenblick, wo φ verschwindet, tritt ein, wenn $\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta = 0$ ist. Das kann geschehen, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = 90°$ oder $\beta = 90°$ ist. Der Fall $\alpha = 0$ ist ausgeschlossen, weil dann die Bildweite unendlich groß wird. Der Fall $\alpha = 90°$ ist ebenfalls ausgeschlossen, weil dann der Gegenstand unendlich weit entfernt ist. Es bleibt also nur der Fall $\beta = 90°$ übrig.

Der Augenblick, wo φ verschwindet, tritt ein, wenn $\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta = 0$ ist. Das kann geschehen, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = 90°$ oder $\beta = 90°$ ist. Der Fall $\alpha = 0$ ist ausgeschlossen, weil dann die Bildweite unendlich groß wird. Der Fall $\alpha = 90°$ ist ebenfalls ausgeschlossen, weil dann der Gegenstand unendlich weit entfernt ist. Es bleibt also nur der Fall $\beta = 90°$ übrig.

Der Augenblick, wo φ verschwindet, tritt ein, wenn $\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta = 0$ ist. Das kann geschehen, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = 90°$ oder $\beta = 90°$ ist. Der Fall $\alpha = 0$ ist ausgeschlossen, weil dann die Bildweite unendlich groß wird. Der Fall $\alpha = 90°$ ist ebenfalls ausgeschlossen, weil dann der Gegenstand unendlich weit entfernt ist. Es bleibt also nur der Fall $\beta = 90°$ übrig.

$$\sin\varphi_1^2 - \sin\varphi_2^2 = \sin\alpha\sqrt{1 - \frac{(1+z')^2}{(1-z')^2}\cos\alpha^2}$$

aus, so findet sich

$$73)\quad \sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)^2}\cos\alpha^2 = 4\left(\frac{\pi}{zK}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right),$$

woraus nach Einsetzung des Wertes von $\sin\alpha^2$ und $\cos\alpha^2$ sich ergibt

$$73_*)\quad \frac{z'\sin\varphi}{z'+\Delta} = 2\left(\frac{\pi}{zK}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

Als specieller Wert für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $u = K$ folgt hieraus

$$74)\quad \frac{1}{4}\left(\frac{zK}{\pi}\right)^2 = \frac{q}{1-q^2} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \frac{5q^5}{1-q^{10}} + \ldots$$

Führen wir in der vorletzten Reihe für Δ und $\sin\varphi$ die entsprechenden Transformationswerte ein, welche der Bedingung $u = K - u$ genügen, so findet man noch

$$57)\quad \frac{\cos\varphi}{1+\Delta} = 2\left(\frac{\pi}{zK}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

Die Reihe 72) kann nochmals transformirt werden, indem der Ausdruck $\frac{\Delta_1}{z'+\Delta_1} \pm \frac{\Delta_2}{z'+\Delta_2}$ leicht angebbar ist. So findet man die beiden Reihen

$$\frac{(1-z')^2}{1+\sin\alpha} = 1 + z'^2 - \frac{2E}{K} + \frac{16\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^4}{1-q^8}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^8}{1-q^{16}}\cos\frac{2\pi u}{K} \ldots\right)$$

$$76)\quad \frac{\sqrt{\left(\frac{1-z'}{1+z'}\right)^2 - \cos\alpha^2}}{1+\sin\alpha} = 8\left(\frac{\pi}{zK}\right)^2\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^6}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

Aus der ersten gewinnen wir für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $u = K$ eine rasch convergirende Reihe zur Berechnung von E nämlich

$$77)\quad \frac{E}{K} = \frac{(1+z')^2}{4} - \frac{8\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^4}{1-q^8} + \frac{2q^8}{1-q^{16}} + \frac{3q^{12}}{1-q^{24}}\ldots\right),$$

und ebenso geht aus der zweiten eine Reihe für

Digitized by

78) $$\left(\frac{K}{4\pi}\right)^2 = \frac{1}{(1-z')^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{3q^6}{1-q^{12}}+\frac{5q^{10}}{1-q^{20}}+\cdots\right)$$

hervor. Vergleichen wir mit dieser die in 57) abgeleitete Reihe, nachdem dieselbe mit 2 potenzirt worden, so dass man hat

$$\left(\frac{K}{4\pi}\right)^2 = \frac{q^2}{(1-z')^2}(1+q^4+q^{12}+q^{24}\ldots)^4.$$

so folgt die Relation

79) $$\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{3q^6}{1-q^{12}}+\frac{5q^{10}}{1-q^{20}}+\cdots = q^2(1+q^4+q^{12}+q^{24}\ldots)^4.$$

Diese interessante Relation können wir mit der Zahlentheorie in Verbindung bringen, wenn wir eine kleine Umgestaltung mit derselben vornehmen. Wir dividiren beiderseits durch q^2 und setzen darauf $q^4 = x$. Es entsteht dann folgende sehr bemerkenswerte Formel

80) $$\frac{1}{1-x}+\frac{3x}{1-x^3}+\frac{5x^2}{1-x^5}+\frac{7x^3}{1-x^7}+\frac{9x^4}{1-x^9}\cdots = (1+x^1+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}\ldots)^4,$$

deren Bildungsgesetz leicht ersichtlich ist. Die Exponenten der letzten Reihe sind die Trigonalzahlen. Bezüglich der zahlentheoretischen Bedeutung dieser Doppelreihe erinnern wir an die Darstellung einer ähnlichen Reihe in der „Theorie der elliptischen Functionen" von Durège, wo in § 66. der Satz Jacobi's abgeleitet wird, dass jede ganze Zahl die Summe von 4 Quadraten ist. So ist z. B.

$$105 = 1^2+2^2+6^2+8^2 = 2^2+4^2+6^2+7^2.$$

Wie aus der 2. Reihe hervorgeht, sind die Exponenten nichts anders als die figurirten Zahlen 1, 3, 6, 10 etc. Demnach ergeben sich auch hier Beziehungen zwischen denjenigen ganzen Zahlen, welche die Exponenten der einen Reihe und denjenigen ganzen Zahlen, die die Exponenten der anderen Reihe bilden.

Bei Ansicht der 2. Reihe bemerkt man sofort, dass die 4. Potenz derselben aus lauter Gliedern besteht, bei denen jeder Exponent die Summe von 4 figurirten Zahlen ist und die 1. Reihe ergibt ohne weitere Untersuchung, dass sie sämmtliche Potenzen von x enthalten wird. Hieraus folgt der neue Satz, dass jede ganze Zahl die Summe von vier figurirten Zahlen der 1. Ordnung ist.

Für jede ganze Zahl h besteht also die Relation

$$h = f_1+f_2+f_3+f_4,$$

Digitized by Go

wobei wir bemerken, dass h auf mehrfache Art aus jenen bestimmten Zahlen gebildet werden kann. So ist z. B.

$$141 = 1+21+28+91 = 3+15+45+78,$$

während die Quadrate für

$$141 = 1^2+2^2+6^2+10^2 = 2^2+3^2+8^2+8^2$$

sind. Ebenso können die f_1, f_2, f_3, f_4 irgend vier gleiche oder verschiedene ganze Zahlen oder auch Null bedeuten.

Der soeben entwickelte Satz über die Trigonalzahlen ist demnach ein Analogon zu dem von Jacobi gegebenen Satz über die Quadratzahlen.

Indem wir wieder auf die allgemeinen Reihenentwickelungen zurückgehen, benutzen wir ferner die Formel

81)
$$\frac{1}{\sin\varphi^2} = \frac{K-E}{K} + \frac{\pi^2}{4K^2}\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{2K}^2} - \frac{2\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^4}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}\cdots\right)$$

Die Transformation derselben lässt folgende neue Relationen entstehen: Durch Addition folgt

82)
$$\frac{z^2\Delta}{\Delta - z'} = \frac{K-E}{K} + \frac{\pi^2}{2K^2}\frac{1}{\cos\frac{\pi u}{2K}^2} + \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^4}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^8}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}\cdots\right)$$

Durch Subtraction

83)
$$\frac{2z'z^2\sin\varphi}{\Delta - z'} = \frac{\pi^2}{K^2}\frac{\sin\frac{\pi u}{2K}}{\cos\frac{\pi u}{2K}^2} - 4\frac{\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^6}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}\cdots\right).$$

Wir setzen in der ersten $u = \frac{K}{2}$, also $\Delta = \sqrt{z'}$, es resultirt

84)
$$\frac{z^2}{1-\sqrt{z'}} = \frac{K-E}{K} + \frac{\pi^2}{K^2} + \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{2q^8}{1-q^8} - \frac{4q^{16}}{1-q^{16}} + \cdots\right),$$

welche sich ebenfalls zur Berechnung von E benutzen lässt. Demnach ist

85)
$$\frac{E}{K} = 1 - \frac{z^2}{1-\sqrt{z'}} + \frac{\pi^2}{K^2}\left(1 + \frac{8q^8}{1-q^8} - \frac{16q^{16}}{1-q^{16}} + \cdots\right),$$

welche Reihe sich durch starke Convergenz auszeichnet.

Digitiz

Ist die Gleichung $f(x) = 0$ irreductibel, dagegen jede Gleichung, welche durch eine Tschirnhaus-Transformation aus ihr hervorgeht, reductibel, so sagt man, die Gleichung $f(x) = 0$ gehöre einer Gruppe von Tschirnhaus-Transformationen an. Diese Gruppe ist dann eine Untergruppe der Gruppe, welche aus allen Tschirnhaus-Transformationen besteht, die sich überhaupt auf die Gleichung $f(x) = 0$ anwenden lassen. Diese letztere Gruppe soll die Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$ heissen.

Sind die Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{\alpha_1} & x_{\alpha_2} & \cdots & x_{\alpha_n} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{\beta_1} & x_{\beta_2} & \cdots & x_{\beta_n} \end{pmatrix}$$

beide rational bekannt, so bezeichne ich mit

$$ST = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{\gamma_1} & x_{\gamma_2} & \cdots & x_{\gamma_n} \end{pmatrix}$$

diejenige Substitution, welche aus der Aufeinanderfolge von S und T hervorgeht, so dass

$$\begin{pmatrix} x_{\alpha_1} & x_{\alpha_2} & \cdots & x_{\alpha_n} \\ x_{\beta_1} & x_{\beta_2} & \cdots & x_{\beta_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{\gamma_1} & x_{\gamma_2} & \cdots & x_{\gamma_n} \end{pmatrix}$$

ist. Ferner bezeichne ich mit

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} x_{\alpha_1} & x_{\alpha_2} & \cdots & x_{\alpha_n} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

die zu S inverse Substitution. Ist nun $\varphi(x_1, x_2, \cdots x_n)$ eine rationale Function der Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$, so bezeichne ich mit

$$S\varphi = \varphi(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \cdots x_{\alpha_n})$$

diejenige Function, welche aus φ hervorgeht, wenn man $x_1, x_2, \cdots x_n$ beziehungsweise durch $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \cdots x_{\alpha_n}$ ersetzt. Offenbar ist dann

$$S(T\varphi) = (ST)\varphi.$$

Ist $\varphi(x_1, x_2, \cdots x_n)$ eine Function, welche durch μ verschiedene Substitutionen

$$S_1, S_2, \cdots S_\mu$$

in $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_\mu$ übergeht, so dass

$$S_1\varphi = \psi_1, \quad S_2\varphi = \psi_2, \quad \cdots \quad S_\mu\varphi = \psi_\mu,$$

mit Erfolg verwerten, wenn man die zur Transformation des Ausdruckes

$$\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,u_1}+\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{\cos\varphi_1+\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}$$

nötigen Werte mit Hülfe der Formeln in I) berechnet.

Es kommt schliesslich

$$90)\qquad \frac{\pi}{K}\frac{\cos\frac{\pi u}{4K}}{\cos\frac{\pi u}{2K}}-\frac{(1-z')}{\sqrt{2\cos\alpha}}\sqrt{1+\frac{2z}{1-z'}\cos\alpha-\frac{1+z'}{1-z'}\cos\alpha^2}$$

$$=\frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{4K}+\frac{q^3}{1+q^3}\cos\frac{3\pi u}{4K}-\frac{q^5}{1+q^5}\cos\frac{5\pi u}{4K}\right.$$
$$\left.-\frac{q^7}{1+q^7}\cos\frac{7\pi u}{4K}+\cdots\right).$$

Ist $u=0$, so folgt wegen $\cos\alpha=\frac{1-z'}{1+z'}$

$$90_*)$$
$$\sqrt{2z'(1+z')}=\frac{\pi}{K}\left(1-\frac{2q}{1+q}-\frac{2q^3}{1+q^3}+\frac{2q^5}{1+q^5}+\frac{2q^7}{1+q^7}-\cdots\right)$$

Wir dividiren die Reihe durch die ähnliche in III 53) und man findet

$$91)\qquad \sqrt{z'}=\frac{\left(1-\frac{2q}{1+q}-\frac{2q^3}{1+q^3}+\frac{2q^5}{1+q^5}+\frac{2q^7}{1+q^7}-\cdots\right)^2}{(1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}\ldots)^4}$$

oder wegen 55_*)

$$=\frac{1-2q+2q^4-2q^9\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9\ldots}.$$

Schreiben wir diese Gleichung noch einmal und setzen $-q$ statt q, so erhalten wir durch Multiplication beider

$$92)\qquad \left(1-\frac{2q}{1+q}-\frac{2q^3}{1+q^3}+\frac{2q^5}{1+q^5}+\frac{2q^7}{1+q^7}-\cdots\right)$$
$$\times\left(1+\frac{2q}{1-q}+\frac{2q^3}{1-q^3}-\frac{2q^5}{1-q^5}-\frac{2q^7}{1-q^7}+\cdots\right)$$
$$=(1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+2q^{64}\ldots)^4$$

Man wird bei genauerer Durchsicht dieser Relation bemerken, dass dieselbe mit dem früher angeführten Satz von Jacobi in gewissem Zusammenhang steht. Führt man nämlich $q^4=x$ ein, so enthält die 4. Potenz die Quadrate der natürlichen Zahlen als Exponen-

Em cálculo de transformadas Fourier são quase todas as propriedades importantes.

Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções integráveis e α e β são constantes, então $\alpha f(t) + \beta g(t)$ é integrável e $\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{F}\{f\} + \beta \mathcal{F}\{g\}$. Esta propriedade é chamada linearidade. Ela é facilmente demonstrada usando propriedades básicas da integral.

Mudança de escala: Se $f(t)$ é integrável e $a \neq 0$ é um número real, então

$$\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Se $f(t)$ é integrável e t_0 é um número real, então

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\}(\omega) = e^{-2\pi i t_0 \omega}\hat{f}(\omega)$$

Se $f(t)$ é integrável e ω_0 é um número real, então

$$\mathcal{F}\{e^{2\pi i \omega_0 t} f(t)\}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

Se $f(t)$ é integrável e $a \neq 0$ é um número real, então

$$\mathcal{F}\{f(at - t_0)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}e^{-2\pi i \frac{t_0}{a}\omega}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Simetria: Se $f(t)$ é integrável e $\hat{f}(\omega)$ também é integrável, então

$$\mathcal{F}\{\hat{f}(t)\}(\omega) = f(-\omega)$$

Derivação: Se $f(t)$ é integrável e $f'(t)$ também é integrável, então

$$\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = 2\pi i \omega \hat{f}(\omega)$$

Derivação: Se $f(t)$ é integrável e $t^n f(t)$ também é integrável, então

$$\mathcal{F}\{t^n f(t)\}(\omega) = \frac{1}{(-2\pi i)^n}\hat{f}^{(n)}(\omega)$$

Derivação: Se $f(t)$ é integrável e $f^{(n)}(t)$ também é integrável, então

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\}(\omega) = (2\pi i \omega)^n \hat{f}(\omega)$$

97)

$$4\left(\frac{1}{4}+\frac{2x}{1-x}+\frac{4x^2}{1+x^2}+\frac{6x^3}{1-x^3}+\cdots\right)=(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots)^4.$$

Diese beiden geben von neuem eine Relation, wenn wir ihr Product bilden und die in 56) abgeleitete Reihe beachten. Gestalten wir die Ausdrücke noch etwas um, so gewinnt man folgende Formel

98)
$$\left(1+\frac{8q}{1-q}+\frac{16q^2}{1+q^2}+\frac{24q^3}{1-q^3}+\frac{32q^4}{1+q^4}+\cdots\right)$$
$$\times\left(1-\frac{8q}{1+q}+\frac{16q^2}{1+q^2}-\frac{24q^3}{1+q^3}+\frac{32q^4}{1+q^4}-\cdots\right)$$
$$=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\ldots)^8.$$

Diese merkwürdige Relation, die augenscheinlich eine Erweiterung des Jacobi'schen Satzes von der Quadratsumme ist, schreiben wir nach der Entwickelung der Brüche in Reihen in folgender Form:

99)
$$(1+8q+24q^2+32q^3+24q^4+48q^5+96q^6+64q^7+24q^8\ldots)$$
$$\times(1-8q+24q^2-32q^3+24q^4-48q^5+96q^6-64q^7+24q^8\ldots)$$
$$=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-2q^{50}+\ldots)^8.$$

Bei der Multiplication der obigen Reihen verschwinden die Glieder mit ungeraden Exponenten und die Function erhält nur noch die Potenzen von q^2. Ersetzen wir also wieder q^2 durch x, so werden in der ersten Reihe wahrscheinlich sämmtliche Potenzen von q vorkommen.

Die transformirte Form wäre also

100)
$$1-16q+112q^2-448q^3+1136q^4-\ldots$$
$$=(1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-2q^{25}+\ldots)^8.$$

Daher hat man den allgemeinen Satz, dass die achte Potenz einer Reihe, deren Exponenten die Quadrate aller Zahlen sind, gleich einer Reihe ist, die alle Zahlen als Exponententen enthält. Da aber jedes Glied der auf die achte Potenz erhobenen zweiten Reihe aus dem Product von acht Gliedern besteht und also die Form

$$q^{a_1^2+a_2^2+a_3^2\ldots a_8^2}$$

hat, so ist für irgend eine ganze Zahl z. B. $h=1000$,

$$h=a_1^2+a_2^2+a_3^2\ldots a_8^2=1^2+2^2+3^2+4^2+7^2+10^2+14^2+25^2,$$

woraus der Satz folgt, dass jede ganze Zahl die Summe von acht Quadraten ist, die irgend acht gleiche oder verschiedene ganze Zahlen oder auch Null bedeuten.

Digitized by

Wir machen hier darauf aufmerksam, dass in Folge der Formel

$$(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots)(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)$$
$$= (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + \ldots)^2$$

die vorhin entwickelten Relationen fortgesetzt werden können, wodurch eine ausserordentliche Allgemeinheit entsteht. Multiplicirt man nämlich die Reihe 100) mit der ihr analogen, nachdem in letzterer $-q$ statt q gesetzt ist, so verschwinden die ungeraden Potenzen und es entsteht eine Reihe, in welcher wir q anstatt q^2 setzen. Daher geht in Folge der Benutzung der letzten Hülfsformel eine neue Relation ähnlich ihren Vorläufern hervor, und diese Reihe wird jedenfalls sämtliche Potenzen von q enthalten. Da aber ihr gleichwertiger Ausdruck durch die 16. Potenz einer Reihe dargestellt wird, deren Glieder die Quadrate der natürlichen Zahlen zu Exponenten hat, so kann jede ganze Zahl in eine Summe von 16 Quadraten zerlegt werden. Beachtet man die Ordnung dieser Potenzen, so hat man allgemein den Satz, dass jede ganze Zahl die Summe von 2^{n+2} Quadraten ist.

Dies einigermassen überraschende Resultat setzt allerdings voraus, dass in den bezüglichen Reihen sämtliche Potenzen von q vorhanden sind. Ob diese Annahme allgemein gültig ist, müssen wir vorläufig dahin gestellt sein lassen, scheint aber doch zweifellos zu sein.

Hinsichtlich der in 80) aufgestellten Reihe möchte ich hier noch einschalten, dass die bekannten Relationen

101)
$$\sqrt{z} = 2\frac{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$
$$\sqrt{z'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}$$

in Folge der Formel $z^2 + z'^2 = 1$ auf die folgende,

102)
$$(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)^4 - (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots)^4$$
$$= 16q(1 + q^2 + q^6 + q^{10} + \ldots)^4$$

führen, deren Bedeutung wir oben schon festgesetzt haben. Ob der der darauf bezügliche Satz über die figurirten Zahlen wegen der Leichtigkeit dieser zweiten Ableitung schon früher gefunden ist, ist mir nicht bekannt.

Digitized by Google

VI.

Für die folgende Untersuchung beschäftigen wir uns mit der Reihe für $E(\mathrm{am}\,u)$, welche bekannt ist unter der Form

$$103)\quad E(\mathrm{am}\,u) = \frac{E}{K}u + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right).$$

wobei wir die Relation

$$E\varphi_1 \pm E\varphi_2 = E\varphi \pm z^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi$$

benutzen werden. Bezüglich des Ausdrucks $\sin\varphi_1 \sin\varphi_2$ erinnern wir an die Formel 15).

Die Addition würde auf ein schon bekanntes Resultat hinauskommen, die Subtraction ergibt

$$104)\quad E\varphi = \frac{z^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta + z'} + \frac{E}{K}u - \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right).$$

Auch diese Reihe lässt eine nochmalige Umwandlung zu, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\Delta_1 + z'} \pm \frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_2}{\Delta_2 + z'} = \frac{\Delta_2 \sin 2\varphi_1 \pm \Delta_1 \sin 2\varphi_2 + z'(\sin 2\varphi_1 \pm \sin 2\varphi_2)}{2z'(1+z')(1+\sin\alpha)}$$

ist. Da aber

$$\frac{x_2}{R+a} = \Delta_2, \quad \Delta_2 \sin 2\varphi_1 = \frac{a}{R+a}, \quad \frac{\sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2}{\cos\alpha} = \Delta_1 \sin 2\varphi_2,$$

so ergibt die Berechnung für das obere Zeichen

$$z^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{2+(1+z')\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)}\cos\alpha - \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K} \ldots\right)$$

welcher Ausdruck schliesslich in die folgende Reihe

$$105)\quad (1-z')\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

übergeht. Man sehe über die Anwendung derselben die Formeln 68) in III. nach.

Indem wir ferner das untere Zeichen berücksichtigen, folgt nach einigen Umwandlungen

106) $$E\varphi = \operatorname{tg}\varphi\left(\sqrt{\Delta+z'} - \sqrt{\frac{2z'(1+z')}{\Delta+z'}}\right) + \frac{E}{K}u - \frac{8\pi}{K}\left(\frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^8}{1-q^{16}}\sin\frac{2\pi u}{K} \ldots\right).$$

Eine neue Reihe ergibt auch die Subtraction der Gleichungen 104) und 103)

107) $$\frac{K}{2\pi}\,\frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+z'} = \frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3(1+q^3)^2}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{K},$$

deren Bildungsgesetz klar ist. Ebenso ist für spätere Untersuchungen der Differentialquotient von 104) von Bedeutung. Man findet nach einigen Rechnungen

108) $$z'\,\frac{1+z'\Delta}{z'+\Delta} = \frac{E}{K} - \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{K} \ldots\right).$$

Es lässt sich auch die Reihe 104) mit der bekannten

$$\frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - z'\operatorname{tg}\operatorname{am} u = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right)$$

zur Aufstellung einer neuen benutzen. Sie ist

109) $$E\varphi = 2z'\operatorname{tg}\varphi + \frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+z'} - \frac{\pi}{K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{E}{K}u - \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^4}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^8}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right).$$

Endlich wollen wir noch diese mit 2 multiplicirte Gleichung von 106) abziehen, man hat

110) $$E\varphi = \frac{E}{K}u - \frac{2\pi}{K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} + \operatorname{tg}\varphi\left(2z' + 2\Delta + \sqrt{\frac{2z'(1+z')}{1+\Delta}} - \sqrt{z'+\Delta}\right) - \frac{8\pi}{K}\,\frac{q^8}{(1-q^8)}\sin\frac{\pi u}{K}$$ u. s. w.

Die entwickelten Formeln können zur Berechnung von

$$\int\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}\,d\varphi$$

dienen.

Man kann ferner die bekannte Reihe

$$\frac{2\Delta}{\cos\varphi} - \frac{\pi}{K}\sec\frac{\pi u}{2K} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

mit der aus 87) folgenden transformirten

$$\frac{\Delta - z'}{\cos\varphi} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

vermittelst Subtraction verbinden, das Resultat ist

111) $$\frac{\Delta + z'}{\cos\varphi} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{1}{4}\sec\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^2}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^6}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right),$$

und wird die Reihe mit der aus 105) folgenden verknüpft, so ist das Endresultat

112) $$\frac{\Delta + z'}{\cos\varphi} \cdot \frac{1-z'}{2}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

$$= \frac{4\pi}{K}\left(\frac{1}{4}\sec\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^4}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^{12}}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right),$$

woraus

$$(1+\sqrt{z'})^2 = \frac{8\pi}{K}\left(\frac{1}{4} + \frac{q^4}{1-q^4} - \frac{q^{12}}{1-q^{12}} + \frac{q^{20}}{1-q^{20}} - \ldots\right).$$

Auch die Reihe

$$\frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi u}{2K} - \cot\varphi = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right)$$

gibt transformirt

113) $$\frac{K}{4\pi}(1-z')\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}\sec\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^6}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} - \ldots,$$

woraus für $u = 0$ und $\cos\alpha = \dfrac{1-z'}{1+z'}$

114) $$\frac{K}{2\pi}\sqrt{z'} = \frac{1}{4} - \frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^6}{1+q^6} - \frac{q^{10}}{1+q^{10}} + \ldots,$$

Benutzen wir ferner die bekannte Formel

$$\ln\sin\varphi - \ln\sin\frac{\pi u}{2K} = \ln\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{z}} + 2\left(\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right),$$

so ergibt sich daraus als transformirte

$$\ln\frac{\cos\alpha}{1-z'}-\ln\frac{1}{2}\cos\frac{\pi u}{2K}=\ln\frac{4\sqrt{q}}{z}-4\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}-\ldots\right),$$

d. i.

$$\frac{1}{8}\ln 4q\frac{\Delta+z'}{\Delta-z'}\cos\frac{\pi u^2}{2K}=\frac{\frac{1}{2}q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{\frac{1}{4}q^4}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}+\ldots),$$

114) $$\frac{1}{8}\ln 2q\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\cos\frac{\pi u}{2K}=\frac{\frac{1}{4}q^4}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{1}{8}\frac{q^8}{1+q^8}\cos\frac{2\pi u}{K}+\ldots,$$

$$\frac{1}{8}\ln 2q\frac{1+\sqrt{z'}}{1-\sqrt{z'}}=\frac{1}{4}\frac{q^4}{1+q^4}-\frac{1}{8}\frac{q^8}{1+q^8}+\frac{1}{12}\frac{q^{12}}{1+q^{12}}-\ldots$$

Man sieht, mit welcher Leichtigkeit solche Reihen abgeleitet werden können, und wie ungezwungen sie sich den mannigfachsten Verhältnissen anschmiegen. Eine wertvolle Anwendung gibt auch die bekannte Relation

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(u+iK')=i\cot\mathrm{am}\,u,$$

welche wir auf 108) beziehen wollen. Demnach geht der Ausdruck zur Linken oder $\frac{z'(1+z'\Delta)}{z'+\Delta}$ über in $\frac{z'(1-z'\cot\varphi\,.\,i)\,(z'+\cot\varphi\,.\,i)}{z'^2+\cot\varphi^2}=\frac{z'^2}{\Delta^2}+z'^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}\,i$. Rechter Hand transformirt sich $\cos\frac{\pi n}{K}$ in

$$\cos\left(\frac{\pi u}{K}+\frac{\pi K'}{K}\,i\right)=\frac{e^{\frac{\pi K'}{K}}+e^{-\frac{\pi K'}{K}}}{2}\cos\frac{\pi u}{K}-i\frac{e^{\frac{\pi K'}{K}}-e^{-\frac{\pi K'}{K}}}{2}\sin\frac{\pi u}{K}$$

oder in $\frac{1+q^2}{2q}\cos\frac{\pi u}{K}-i\frac{1-q^2}{2q}\sin\frac{\pi u}{K}$.

Werden sämtliche Glieder in dieser Art berücksichtigt und nach reellen und imaginairen getrennt, so erhält man die folgenden Reihen

$$\frac{1}{\Delta\mathrm{am}u^2}=\frac{E}{z^2K}-\frac{2\pi^2}{z^2K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K}-\ldots\right),$$

115)

$$\frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}=\frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}-\ldots\right).$$

Wird diese Reihe durch die bekannte für $\frac{\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}$ dividirt, so folgt

$$\Delta\mathrm{am}\,u=2z'\frac{K}{\pi}\frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}+\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K}+\ldots}{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}+\frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K}-\ldots}$$

Digitized by Google

116)a $$\Delta \operatorname{am} u = \frac{\pi}{2K} \frac{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots}{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K} + \ldots}$$

$$\Delta \operatorname{am} u^2 = z' \frac{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots}{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{3g^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots}$$

Aus 115) können auch noch die folgenden Quotienten berechnet werden.

$$\Delta = \frac{\pi}{2K} \frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{9q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots}{\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots}$$

116)b

$$\Delta^2 = \frac{\pi^2}{4K^2} \frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{9q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots}{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K} + \ldots}$$

Auf die hier benutzte Relation $\cot\operatorname{am}(u+iK') = i\Delta\operatorname{am} u$ kommen wir nachher bei der Kettenlinie wieder zurück. Auf 62) angewandt, resultirt noch:

$$\sqrt{(1-z')(\Delta+1-(1+z')\sin\varphi^2)} = \frac{2\pi}{K}\left(\sqrt{q}\,\frac{1+q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} + \sqrt{q^3}\,\frac{1+q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

$$\sqrt{(1-z')(\Delta-1+(1+z')\sin\varphi^2)} = \frac{2\pi}{K}\left(\sqrt{q}\,\frac{1-q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \sqrt{q^3}\,\frac{1+q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

VII.

Wir stellen noch einige Betrachtungen an über die durch Partialbrüche und Quotienten ausgedrückten elliptischen Functionen.

Es werden sich vermittelst der Transformation noch einige bemerkenswerte Resultate ergeben. Gehen wir demnach aus von der Reihe

$$\frac{K}{2\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}-\frac{1}{4}=\frac{q\cos 2x-q^2}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{q^3\cos 2x-q^6}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\cdots$$

so kommt es darauf an, den Ausdruck

$$\frac{q\cos 2x_1-q^2}{1-2q\cos 2x_1+q^2}\pm\frac{q\cos 2x_2-q^2}{1-2q\cos 2x_2-q^2}$$

in die geeignete Form umzuwandeln.

Für das untere Zeichen wird man schliesslich finden

$$\frac{q(1-q^2)(\cos 2x_1-\cos 2x_2)}{(1-2q\cos 2x_1+q^2)(1-2q\cos 2x_2+q^2)}=\frac{2q(1-q^2)\sin\frac{\pi u}{2K}}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}$$

Daher bestehen für beide Zeichen die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{K}{4\pi}(1-z')\sqrt{1-\left(\frac{1+z'}{1-z'}\right)\cos\alpha^2}$$
$$=\sin\frac{\pi u}{2K}\left(\frac{q(1-q^2)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}-\frac{q^3(1-q^6)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}+\cdots\right)$$

117)

$$\frac{K}{4\pi}\sqrt{2z'(1-z')\frac{1+\Delta}{z'+\Delta}}$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{q^2\left(\cos\frac{\pi u}{K}+q^2\right)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}+\frac{q^6\left(\cos\frac{\pi u}{K}+q^6\right)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}\Big)+\cdots$$

Um die Gleichung

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin x\frac{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)}\cdots$$

zur Transformation geschickt zu machen, nehme man die Logarithmen.

Die zusammengehörigen Argumente x_1 und x_2 sind dann leicht in die geeignete Form zu bringen und da

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Kx_1}{\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2Kx_2}{\pi}=\sin\varphi_1\sin\varphi_2=\frac{\cos\alpha}{1-z'}$$

ist, so ergibt sich

118) $$\sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}} =$$

$$2\sqrt{q}\cos\frac{\pi u}{2K}\frac{(1+2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8)\left(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16}\right)\ldots}{(1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4)\left(1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}\right)\ldots},$$

und diese Gleichung geht für $u = 0$ über in

119) $$\sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}} = 2\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^4)(1+q^8)\ldots}{(1+q^2)(1+q^6)\ldots}\right]^2.$$

Führen wir hierin $\frac{1-z'}{1+z'} = z$ und $q^2 = q$ ein, so folgt

120) $$\sqrt{z} = 2\sqrt[4]{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right].$$

Mit dieser verbinden wir die in der Theorie der elliptischen Functionen bekannte Relation

$$\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{z'}\sqrt[4]{q}} = \left[\frac{(+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}\right]^2$$

und erhalten die neue Formel

121) $$\sqrt[4]{z'} = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}.$$

Infolge der einfachen Ausführung einer auf 118) bezüglichen 2. Transformation gewinnt man noch

122) $$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$$

$$2q\cos\frac{\pi u}{2K}\frac{(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16})\left(1+2q^{16}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{32}\right)\ldots}{(1+2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8)\left(1+2q^{12}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{24}\right)\ldots},$$

woraus

123) $$\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}} = 2q\left[\frac{(1+q^8)(1+q^{16})\ldots}{(1+q^4)(1+q^{12})\ldots}\right]^2.$$

Eine nochmalige Transformation würde zur folgenden Formel führen

124)
$$\frac{\sqrt{1+\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}-\sqrt{1-\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}}{\sqrt{1+\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}+\sqrt{1-\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}}}$$
$$= 2q^2\cos\frac{\pi u}{2K}\frac{\left(1+2q^{16}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{32}\right)\ldots}{\left(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16}\right)\ldots}$$

Der Ausdruck links ist geeignet zu einer goniometrischen Umformung. Wegen $\alpha = 90^0 - \tau$ können wir setzen

125)
$$\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\tau = \sin 2\gamma, \quad \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}}\sin\tau = \operatorname{tg}\varphi,$$
$$\frac{z}{z'}\cos\varphi = \operatorname{tg} 2\psi,$$

also

126)
$$\operatorname{tg}\gamma = 2q^2\cos\frac{\pi u}{2K}\frac{\left(1+2q^{16}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{32}\right)\ldots}{\left(1+2q^8\cos\frac{\pi u}{K}+q^{16}\right)\ldots}$$

und wegen

127)
$$\arcsin\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$$
$$4\left(\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right),$$

folgt also auch

128)
$$\frac{1}{2}\gamma = \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\frac{q^6}{1+q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots$$

Diese Ableitungen können zur Berechnung der zum Argument u gehörenden Amplitude φ benutzt werden.

Wie bekannt ist, lassen sich die Factorenfolgen durch Reihensummen ersetzen.

$$Q(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots$$
$$= 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots$$

$$Q\sqrt[4]{q}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots$$
$$= \sqrt[4]{q}\sin x-\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x\ldots,$$

darin bedeutet

$$Q = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots$$

Indem man also die vorhin gefundenen Gleichungen für diese Fälle einrichtet, hat man

$$129)\quad \sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}} = \frac{2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi u}{2K} + 2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{5\pi u}{2K} \ldots}{1 + 2q^2\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^8\cos\frac{2\pi u}{K} \ldots},$$

ferner

$$130)\quad \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \frac{2q\cos\frac{\pi u}{2K} + 2q^9\cos\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{25}\cos\frac{5\pi u}{2K} + \ldots}{1 + 2q^4\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^{16}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots}$$

u. s. w.

Als Specialfälle findet man aus diesen

$$131)\quad \sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}} = 2\sqrt{q}\,\frac{q + q^4 + q^{12} + \ldots}{1 + 2q^2 + 2q^8 + \ldots},$$

$$\frac{1-\sqrt{z'}}{1+\sqrt{z'}} = 2\,\frac{q + q^9 + q^{25} + \ldots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots},$$

und deren transformirte

$$\sqrt{z} = 2\sqrt[4]{q}\,\frac{1 + q^2 + q^6 \ldots}{1 + 2q + 2q^4 \ldots}.$$

Führen wir hinsichtlich dieser Reihenquotienten die **Thetafunctionen**

$$\begin{aligned}
\vartheta(z) &= 1 - 2e^{-\varrho}\cos 2z + 2e^{-4\varrho}\cos 4z - 2e^{-9\varrho}\cos 6z + \ldots,\\
\vartheta_1(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\varrho}}\sin z - 2\sqrt[4]{e^{-9\varrho}}\sin 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\varrho}}\sin 5z + \ldots,\\
\vartheta_2(z) &= 2\sqrt[4]{e^{-\varrho}}\cos z + 2\sqrt[4]{e^{-9\varrho}}\cos 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\varrho}}\cos 5z + \ldots,\\
\vartheta_3(z) &= 1 + 2e^{-\varrho}\cos 2z + 2e^{-4\varrho}\cos 4z + 2e^{-9\varrho}\cos 6z + \ldots
\end{aligned} \qquad 132)$$

ein, worin

$$\varrho = \frac{\pi K'}{K} \quad \text{und} \quad z = \frac{\pi u}{2K},$$

so ergiebt sich nach dem Vorhergehenden

$$133)\quad \sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}} = \frac{\vartheta_2(2\varrho z)}{\vartheta_3(2\varrho z)}, \quad \sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{\vartheta_1(2\varrho z)}{\vartheta(2\varrho z)},$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau = \frac{\vartheta_2(4\varrho z)}{\vartheta_3(4\varrho z)}.$$

Benutzt man noch die bekannte Differentialformel der Thetafunctionen

$$\frac{d\left(\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right)}{dz} = -\frac{u\vartheta(z)\vartheta_1(z)}{\vartheta_3(z)^2},$$

so folgt

134) $$\frac{2Kz'z\sin\varphi}{\pi(\Delta+z')} = \frac{u\vartheta_2\varrho z\,\vartheta_1 2\varrho z}{(\vartheta_3 2\varrho z)^2}.$$

Zweiter Teil.

VIII.

Die in ihren Folgen wichtigste Transformation bezieht sich auf die jetzt noch zu betrachtende Reihe für $\ln \Delta\varrho$

$$\ln\Delta\varphi = \frac{1}{2}\ln z' + 4\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{K} + \ldots\right)$$

Zunächst folgt für die Addition

$$\Delta\varphi_1\,\Delta\varphi_2 = z'.$$

Dagegen gibt die Subtraction

1) $$\ln\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2} = -8\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

Für $\ln\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2}$ können wir unter Benutzung der obigen bekannten Formel $\ln\frac{\Delta\varphi_1^2}{z'}$ oder $-\ln\frac{\Delta\varphi_2^2}{z'}$ schreiben. Da nun aber $\Delta\varphi_1^2 = 1 - z^2\sin\varphi_1^2$ ist, so führen wir die in I. entwickelten Werte für $\sin\varphi_1^2$ und $\sin\varphi_2^2$ ein, wonach für beide Ausdrücke die Relation

$$2\Delta\varphi^2 = 2 - z^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2 \pm (1+z')\sin\alpha\sqrt{(1-z')^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2}$$

gilt. Daher haben wir unter Benutzung der Exponentialfunction

2) $$\frac{2 - z^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2 \pm (1+z')\sin\alpha\sqrt{(1-z')^2 - (1+z')^2\cos\alpha^2}}{2z'e^{\pm 8\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)}}.$$

Wir bezeichnen nun die periodische Function dieses Ausdrucks mit x, indem wir damit die Abscisse eines Punktes einer noch anzugebenden Curve bezeichnen. Also sei

$$3)\quad x = 8\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K} \ldots\right).$$

Die Gleichung 2) nimmt nun die folgende doppelte Form an

$$4)\quad \frac{1+z'^2-(1+z')^2\cos\alpha^2}{2z'} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\frac{(1+z')\sin\alpha\sqrt{(1-z')^2-(1+z')^2\cos\alpha^2}}{2z'} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Hierin müssen noch die sin und $\cos\alpha$ mittelst der in der Einleitung gegebenen Werte durch die Amplitude φ ersetzt werden. Man wird haben

$$5)\quad \frac{1+z'\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}}{z'+\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\frac{z^2\sin\varphi}{z'+\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Bezeichnen wir endlich den variabeln Ausdruck der linken Seite der ersten Gleichung mit y, so ist

$$6)\quad y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

die bekannte Gleichung der Kettenlinie, deren Eigenschaften für die geometrische Durchführung der gegebenen Transformation von hoher Bedeutung sind. Wir haben demnach zu zeigen, dass die elliptischen Functionen und ihre Reihenentwickelungen durch die Geometrie der Kettenlinie eine wertvolle Bereicherung und Ergänzung erfahren können und wollen daher zunächst an die schon bekannten Eigentümlichkeiten dieser Curve erinnern. (Fig. 2.)

Der Differentialquotient

$$7)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{tg}\delta = s$$

hat erstens die bekannte trigonometrische Bedeutung $\operatorname{tg}\delta$ und zweitens bedeutet er die zur Abscisse x gehörenden Curvenbogen s, wenn man wie hier geschehen, den tiefsten Punkt als Anfangspunkt der Bogenlängen nimmt und die Constante $= 1$ setzt. Diese Bemerkung nebst der Formel $y^2 = s^2+1$ oder $y = \frac{1}{\cos\delta}$ und der daraus sich ergebenden Eigenschaft, dass die Projection der Ordinate y auf die Tangente eine Strecke gleich dem Bogen s bestimmt, welche von dem zur Ordinate gehörenden Abscissenpunkt die Entfernung gleich 1 hat, genügt für die folgenden Auseinandersetzungen.

Demgemäss haben wir

$$8) \qquad y = \frac{1+z'\Delta}{z'+\Delta}, \quad s = \operatorname{tg}\delta = \frac{z^2 \sin\varphi}{z'+\Delta},$$

$$u = \int \frac{dy}{\sqrt{(1+z'^2-2z'y)(y^2-1)}}.$$

Es kommt nun vor allem darauf an, die Amplitude φ in geometrischen Sinne zu definiren. Die Berechnung derselben aus den obigen Formeln führt auf folgenden einfachen Ausdruck

$$9) \qquad \sin\varphi = \frac{s}{y-z'},$$

dessen Construction in Folge der Eigenschaften der Kettenlinie sehr einfach ist. Indem wir also festsetzen, dass durch die Reihe 3) die entsprechende Abscisse der Curve charakterisirt sei, wird auch y und die Gerade s bestimmt. Daher kann mau für alle Fälle eine zur x-Achse parallele Gerade vom Abstand z' benutzen, um mit der Differenz $y-z'$ gleich um den entsprechenden Curvenpunkt xy einen Kreisbogen bis zum Durchschnitt mit jener Einheitsverticalen ziehen zu können. Die letztere schliesst mit der Verbindungsgeraden beider genannten Punkte die gesuchte Amplitude φ ein.

Bezüglich der Reihe für x bemerken wir, dass dieselbe auch auf eine andere Form gebracht werden kann.

Aus der bekannten Formel

$$-\tfrac{1}{2}\ln(1-2q\cos x+q^2) = q\cos x+\tfrac{1}{2}q^2\cos 2x+\tfrac{1}{3}q^3\cos 3x \ \ldots$$

lässt sich die folgende ableiten

$$\frac{1}{4}\ln\frac{1+2q\sin x+q^2}{1-2q\sin x+q^2} = q\sin x-\tfrac{1}{3}q^3\sin 3x+\tfrac{1}{5}q^5\sin 5x\ldots$$

Demzufolge entwickeln wir in

$$\frac{x}{8} = \frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\ldots$$

die Brüche in Reihen und schreiben

$$\frac{x}{8} = (q+q^3+q^5\ldots)\sin\frac{\pi u}{2K},$$

$$-(q^3+q^9+q^{15}\ldots)\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi u}{2K},$$

$$+(q^5+q^{15}+q^{25})\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi u}{2K},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Werden hierin die Verticalreihen mittelst der genannten Formel summirt, so gelangt man zum Resultate

$$10)\quad x = 2\ln\frac{(1+2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)(1+2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)\ldots}{(1-2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)(1-2q^3\sin)\frac{\pi u}{2K}+q^6)\ldots},$$

oder

$$e^x = \frac{1+z'\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}+z^2\sin\varphi}{z'+\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}} = y+s$$

$$11)\quad = \frac{(1+2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1+2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\ldots}{(1-2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1-2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\ldots}$$

woraus noch für $u = K$, $\varphi = 90^0$ ein schon früher entwickelter Ausdruck

$$12)\qquad \sqrt{z'} = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^2$$

folgt.

Wir haben den Winkel der Tangente mit der x-Achse durch δ bezeichnet, wir führen noch seinen Complementwinkel $\varepsilon = 90^0 - \delta$ als Winkel der Tangente mit der y-Achse ein, beachten den Ausdruck

$$y+s = y+\sqrt{y^2-1}$$

und substituiren

$$y = \frac{1}{\cos\delta} = \frac{1}{\sin\varepsilon},$$

dann resultirt

$$13)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{(1-2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1-2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\ldots}{(1+2q\sin\frac{\pi u}{2K}+q^2)^2(1+2q^3\sin\frac{\pi u}{2K}+q^6)^2\ldots}.$$

Der eingeführte Winkel ε der Tangente mit der y-Achse wird demnach durch ein unendliches Product ausgedrückt.

Die in VI. 108) entwickelte Reihe lässt sich zur Darstellung von y als Ordinate der Curve verwerten, wenn wir beachten, dass $y = \frac{1+z'\Delta}{z'+\Delta}$ ist. Führen wir diese Substitution ein, so resultirt

$$14)$$

$$y = \frac{E}{z'K} - \frac{4\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^6}{1-q^{12}}\cos\frac{3\pi u}{K}\ldots\right).$$

Um für y noch andere Entwickelungen anzubahnen, gehen wir auf die Reihe 87)

$$\sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}} = \frac{4\pi}{zK}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6} - \frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

zurück und berücksichtigen, dass

$$y = \frac{z'\Delta + 1}{\Delta + z'}$$

ist. Führen wir das hieraus berechnete Δ in die obige Reihe ein, so erhalten wir

15) $$\sqrt{1 + z'^2 - 2z'y} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

Man kann übrigens auch noch den folgenden Ausdruck leicht aufstellen, wenn man $2z'y = (1+z')^2\cos\alpha^2$ setzt und die Formel 29) beachtet. Daher ist:

16) $$y = \frac{(1-z')^2}{4z'} + \frac{(1+z')^2}{4z'}\cos 8\left(\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right),$$

woran sich später noch andere anschliessen werden.

Um neue Formeln herzuleiten, differentiiren wir 15) nach y und und u, man hat

$$dy = \frac{8\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)\times \left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)du,$$

ebenso ergibt die Differentiation von x

$$dx = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right)du.$$

Aus beiden Reihen folgt durch Division

17) $$\frac{dy}{dx} = s = \operatorname{tg}\delta = \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{5q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\ldots\right).$$

Damit haben wir die trigonometrische Tangente oder den gleichwertigen Ausdruck für den Bogen s durch eine Reihe ausgedrückt.

Eine andere geometrische Beziehung lässt sich wie folgt ableiten:

In VI. haben wir die Reihe

$$\frac{\Delta - z'}{\cos\varphi} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

aufgestellt, welche wir mit der Kettenlinie in Verbindung bringen können.

Berechnet man nämlich s als Function von φ, so ergeben die obigen Werte

$$s = \operatorname{tg}\varphi\,\frac{\sqrt{1 - z_2 \sin\varphi^2} - z'}{\cos\varphi}.$$

Der daraus folgende Ausdruck

$$s\cot\varphi = \frac{\Delta - z'}{\cos\varphi}$$

bedeutet 'geometrisch die auf der Einheitsnormalen durch CF bezeichnete Gerade l, welche demnach durch die Relation

18) $$l = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

bestimmt ist.

Man bemerke aber, dass sowohl $s.\cot\varphi = l$ als auch s durch Reihen gegeben sind, der Quotient wird demnach in einer Beziehung zu $\operatorname{tg}\operatorname{am} u$ stehen. Daher folgt das Resultat

19) $$\operatorname{tgam} u = \frac{\pi}{2z'K}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}.$$

Diese neue Formel ist unter anderm auch aus dem Grunde bemerkenswert, weil sie zur Aufstellung einer Differentialgleichung Veranlassung gibt. Wie man bemerkt, ist der Zähler das Differential des Nenners. Führen wir demnach ein

20) $$Z = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\cdots,$$

so haben wir nach einigen Zwischenrechnungen

21) $$-\frac{dZ}{Z} = z'\operatorname{tgam} u\,.\,du$$

Substituiren wir hierin die bekannte Formel

$$z' \operatorname{tg} \operatorname{am} u = \frac{\pi}{2K} \operatorname{tg} \frac{\pi u}{2K} - \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1+q^2} \sin \frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1+q^4} \sin \frac{2\pi u}{K} + \dots\right),$$

so ergibt sich ohne Mühe aus

$$-\int \frac{dZ}{Z} = \frac{2\pi}{K} \int \left(\frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi u}{2K} - \frac{q^2}{1+q^2} \sin \frac{\pi u}{K} + \frac{q^4}{1+q^4} \sin \frac{2\pi u}{K} \dots\right) du$$

das allgemeine Integral

$$-\ln Z = -\ln \cos \frac{\pi u}{2K} + 1 \frac{2q^2}{1+q^2} \cos \frac{\pi u}{K} - \frac{1}{2} \frac{2q^4}{1+q^4} \cos \frac{2\pi u}{K} + \dots + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constanten setzen wir $u = 0$, dann ist

$$-\ln Z_0 = \frac{1}{1} \frac{2q^2}{1+q^2} - \frac{1}{2} \frac{2q^4}{1+q^4} + \frac{1}{3} \frac{2q^6}{1+q^6} - \dots + \text{Const.}$$

Da aber

$$Z = \frac{K}{4\pi} \sqrt{1 + z'^2 - 2z'y},$$

so ist

$$Z_0 = \frac{K}{4\pi}(1 - z'),$$

so dass man schliesslich hat, wenn man noch

21) $$\sqrt{1 + z'^2 - z'y} = z \sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{1-z'}{1+z'}} \cdot \frac{\sqrt{1-\Delta}}{1+\Delta}$$

beachtet

22)

$$\frac{1}{8} \ln \sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'} \cdot \frac{1+z'}{1-z'}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi u}{2K}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{1+q^2} \sin \frac{\pi u^2}{2K} - \frac{1}{4} \frac{q^4}{1+q^4} \sin \frac{2\pi u^2}{2K} +$$

$$\ln \frac{1+z'}{1-z'} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta = \ln \sin \frac{\pi u}{2K} + 8\left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{1+q^2} \cos \frac{\pi u^2}{2K} - \frac{1}{4} \frac{q^4}{1+q^4} \sin \frac{2\pi u^2}{2K} + \dots\right)$$

Eine zweite Anwendung der Differentialgleichung 21) geht unter Benutzung der Relation $\operatorname{tg} \operatorname{am} u = \operatorname{tg} \varphi$ in Verbindung mit $du = \frac{d\varphi}{\Delta}$ hervor. Daher ist

23) $$\frac{dZ}{Z} = -\frac{z' \operatorname{tg} \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - z^2 \sin \varphi^2}}$$

zu integriren.

Das Integral

$$\ln Z = -z' \int \frac{\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-z^2\sin\varphi^2}}$$

kann durch Einführung von $\cos\varphi = x$ auf folgende Art geschrieben werden:

$$\ln Z = z' \int \frac{dx}{x\sqrt{z'^2+z^2x^2}}$$

und ist, wie nach bekannten Methoden ersichtlich ist, ebenfalls logarithmisch. Man findet schliesslich das folgende Resultat:

$$\ln Z = \ln \frac{z\cos\varphi - \Delta + z'}{z\cos\varphi - \Delta - z'} + \text{Const.}$$

Für $\varphi = 0$ wird

$$Z_0 = \frac{1-z'}{4\pi}.K,$$

so dass

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{z-1-z'}{z-1+z'}\,\frac{z\cos\varphi - \Delta + z'}{z\cos\varphi - \Delta - z'},$$

und endlich

$$24)\quad \frac{Kz}{4\pi} - \frac{z\cos\varphi - \Delta + z'}{z\cos\varphi + \Delta + z'} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots$$

Aus der letzten Formel folgt noch

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1-z}{1+z'}}\,\frac{z\cos\varphi - \Delta + z'}{-z\cos\varphi + \Delta + z'}.$$

IX.

Der Differentialquotient von s kann auch benutzt werden, um eine neue Relation für y herzustellen. Aus derselben entwickeln wir dann eine kubische Gleichung, deren Absolutglied eine periodische Function ist. Aus 7) folgt

$$\frac{ds}{du} = \frac{\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\,\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{25q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} \cdots\right),$$

und wenn man beachtet, dass $\int y\,dx = s$, also $y = \frac{ds}{dx}$ ist, bei Berücksichtigung des Wertes von $\frac{dx}{du}$

$$25)\quad y = \frac{\pi^2}{4z'K^2}\,\frac{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots}.$$

Den Nenner dieses Quotienten können wir durch den Ausdruck

$$26)\quad \frac{K}{4\pi}\sqrt{1+z'^2-2z'y} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots$$

ersetzen. Erheben wir darauf die Formel auf die 2. Potenz und ordnen nach Potenzen von y so, so erhalten wir die kubische Gleichung

$$27)\quad y^3 - \frac{1+z'^2}{2z'}y^2 + \frac{\pi^6}{2z'^3K^6}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\varphi u}{2K} + \frac{25q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K}\cdots\right)^2 = 0,$$

mit deren Untersuchung wir uns zunächst beschäftigen wollen.

Das zweite Glied ist nur vom Modulus z abhängig. Der Coefficient des folgenden ist = Null, woraus sich auf gewisse Beziehung der Gleichung zu den reducirten kubischen Gleichungen schliessen lässt. Das durch eine periodische Reihe ausgedrückte Absolutglied ist stets positiv, wie auch die hier geometrisch brauchbare Wurzel stets grösser als 1 sein muss.

Machen wir die Gleichung mit der

$$28)\quad y^3 - Ay^2 + C = 0$$

identisch, so folgt aus $A = \frac{1+z'^2}{2z'}$ der Modulus

$$29)\quad z' = A - \sqrt{A^2-1},$$

und ferner ist

$$30)\quad \frac{K^3}{\pi^3}\sqrt{2z'^3C} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - 9\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots,$$

und vermöge 25)

$$31)\quad y = \frac{K}{4\pi}\,\frac{\sqrt{2z'C}}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots}.$$

Unter gewissen noch anzugebenden Bedingungen würde demnach die obige reducirte Gleichung vermittelst elliptischer Functionen lös-

bar sein, indem aus den Constanten derselben der Modulus auf einfache Art bestimmt werden kann und in Folge der hierdurch bekannten K und q die Aufgabe von der Lösung der transcendenten Reihe abhängt. Sofern q klein ist, und dies ist meistens der Fall, ergibt sich durch Versuche der Wert von u, so dass y ebenfalls bekannt ist. Da diese Bestimmung wenigstens theoretisches Interesse hat, so wollen wir noch die Bedingungen der Aufgabe in Kürze aufsuchen. Wird $y = 1$ gesetzt, ist also

$$\frac{K^3}{\pi^3} z'(1-z') = \frac{q}{1-q^2} - \frac{9q^3}{1-q^6} + \frac{25q^5}{1-q^{10}} \cdots,$$

so wird stets in den andern Fällen

$$\frac{K^3}{\pi^3} \sqrt{2z'^3 C} < \frac{q}{1-q^2} - \frac{9q^3}{1-q^6} + \cdots,$$

d. i.

$$\frac{K^3}{\pi^3} \sqrt{2z'^3 C} < \frac{K^3}{\pi^3} z'(1-z')$$

sein müssen. Oder einfacher, es muss

$$C < \frac{1+z'^2}{2z'} - 1,$$

d. i.

$$C < A - 1$$

sein. Da ausserdem auch $A > 1$, wie aus 29) hervorgeht, so setzen wir für eine allgemeinere Betrachtung die Gleichung

32) $$x'^3 - axx'^2 + c = 0$$

fest, worin a und c vorläufig willkürliche positive Zahlen sein mögen, und setzen $x' = ny$.

Also wäre

$$y^3 - \frac{a}{n} y^2 + \frac{c}{n^3} = 0$$

mit der Gleichung 28) in Beziehung zu bringen. Gemäss der obigen Bedingung hat man

$$\frac{c}{n^3} < \frac{a}{n} - 1 \quad \text{oder} \quad c < an^2 - n^3.$$

Da aber $\frac{a}{n} = \frac{1+z'^2}{2z'}$ d. i. $n = \frac{2z'a}{1+z'^2}$ ist, so muss

$$\frac{c}{4a^3} < \frac{z'^2(1-z')^2}{(1+z'^2)^3}$$

sein. Oder was dasselbe ist

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a^3}} < \frac{z'(1-z')}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die weitere Untersuchng hätte sich nun mit dem Ausdruck rechter Hand zu beschäftigen, der für verschiedene Moduli verschiedene Werte erhält. Daher muss der Grenzfall des grössten Wertes gesucht, d. h.

$$\frac{z'(1-z')}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

differentiirt werden. Der hieraus berechnete dem Maximum des obigen Ausdrucks entsprechende Wert von z' bestimmt die Grenze für

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a^3}},$$

welche nicht überschritten werden darf.

Die Differentiation führt auf

$$z'^3 - 2z'^2 - 2z' + 1 = 0,$$

woraus für den Grenzfall

$$z' = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Eingesetzt in die Ungleichung folgt

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a^3}} < \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad c < \frac{4a^3}{27}.$$

Man wird schon in dieser Bestimmung das für reducirte kubische Gleichungen von der Form

33) $$x^3 - px + q = 0$$

wesentliche Unterscheidungsmerkmal für reelle und imaginaire Wurzeln erkannt haben. Indem wir die letztere Gleichung anstatt der früheren hier benutzen, also $x = \frac{1}{x'}$, $a = \frac{p}{q}$, $c = \frac{1}{q}$ einführen, geht die Ungleichung in die folgende

$$27q^2 < 4p^3$$

(dessen q mit dem q der periodischen Reihen nicht verwechselt werden darf) über, welche die Bedingung von 3 reellen Wurzeln ausdrückt.

Die Gleichungen, welche wir vorhin gefunden, beziehen sich also auf den casus irreductibilis, worin eine Wurzel die Ordinate y ausdrückt.

Aus der Transformation der obigen Gleichungen resultirt demnach

$$34)\quad \frac{1}{2}(1+z'^2)\frac{q}{p}\frac{K^3}{\pi^3}\sqrt{\frac{1+z'^2}{p}} = \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots$$

Wenn man mit Umgehung des Grenzfalles, für den es einer Unterscheidung nicht mehr bedarf, ein bestimmtes z wählt, so muss

$$35)\quad \frac{q^2}{4p^3} < \frac{z'^2(1-z')^2}{(1+z'^2)^3} \quad \text{sein.}$$

Die Constanten q und K sind dadurch gegeben, so ist z. B. für $z^2 = \frac{3}{4}$ und $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{125}$, $q = 0{,}085\,7957$, $K = 2{,}156\,515$. Bei kleinen Werten von q ist die Berechnung von u nicht besonders umständlich.

Die durch eine periodische Reihe darstellbare Wurzel der Gleichung ist dann

$$36)\quad x = \frac{4\pi}{K}\sqrt{\frac{p}{1+z'^2}}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \ldots\right).$$

Wir geben nachher auch noch die Auflösung der übrigen durch die Cardani'sche Formel lösbaren Fälle der kubischen Gleichungen vermittelst der Kettenlinie.

X.

In 19) haben wir tg am u in Form eines Quotienten durch zwei periodische Functionen ausgedrückt, so dass die Frage entsteht, ob ebenfalls sin am u und cos am u auf ähnliche Art bestimmbar seien. Wir erinnern zu dem Ende an die Reihe 104)

$$E\varphi = \frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+z'} + \frac{E}{K}u - \frac{4\pi}{K}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right),$$

welche wir mit

$$E\varphi = \frac{E}{K}u + \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right)$$

durch Subtraction verbinden. Man findet folgende Relation

$$37)\quad \frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+z'} = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + q^2\frac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + q^3\frac{(1+q^3)^2}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{K} \ldots\right).$$

Dieselbe lässt sich mit der Reihe 17) für s weiter verbinden.

Die Division beider ergibt geordnet

$$38)\quad \cos\mathrm{am}\,u = \frac{z'K}{\pi}\,\frac{q\frac{(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + q^2\frac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots}{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}$$

woraus noch nach Multiplication von $\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,u$

$$39)\quad \sin\mathrm{am}\,u = \frac{1}{2}\,\frac{q\frac{(1-q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + q^2\frac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}$$

folgt.

Beide Reihen besitzen gleichen Zähler.

Da $\sin\varphi = \frac{s}{y-z'}$ ist, so kann man für $\sin\mathrm{am}\,u$ und ebenso für $\cos\mathrm{am}\,u$ zwei analoge Ausdrücke leicht herstellen, wenn man die für s und y entwickelten Reihen einsetzt. Die Reihe

$$40)\quad z'y - \frac{E}{K} = \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right)$$

wird für $y = \frac{1+z'^2}{2z'}$ zum Maximum, d. h. es ist

$$\tfrac{1}{2}(1+z'^2) = \frac{E}{K} + \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4} + \frac{2q^4}{1-q^8} + \frac{3q^6}{1-q^{12}} + \ldots\right),$$

und für $y = 1$ zum Minimum

$$z' = \frac{E}{K} - \frac{4\pi^2}{K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4} - \frac{2q^4}{1-q^8} + \frac{3q^6}{1-q^{12}} \ldots\right),$$

welche Formeln mit früheren übereinstimmen. Die Differenz beider möge man mit früheren Ableitungen vergleichen.

Man kann nun die obige Reihe für y in folgender Art zur Bildung neuer Beziehungen verwerten. In Folge der Bedeutung von

$$y = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

besteht demnach die Reihe

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{E}{Kz'} - \frac{4\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right).$$

Digitized by Google

Wir Differentiiren sie unter Beachtung des in VIII. gegebenen Wertes von $\frac{dx}{du}$, welcher in

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{dx}{du} = \frac{4\pi}{z' K^3}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots\right)$$

eingesetzt, den neuen Ausdruck für

$$41)\quad s = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\delta = \frac{\pi^2}{z' K^2}\,\frac{\frac{1q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots}$$

hervorgehen lässt.

Bemerkt man aber, dass der Nenner dieses Bruches durch $\frac{K}{4\pi}\sqrt{1+z'^2-2z'y}$ ersetzt werden kann, und dass ferner $s = \sqrt{y^2-1}$, so geht unter diesen Substitutionen das letzte Resultat durch Quadriren und Ordnen nach Potenzen von y in das folgende über

$$42)\quad y^3 - \frac{1+z'^2}{2z'}y^2 - y + \frac{1+z'^2}{2z'} + \frac{8\pi^6}{z'^3 K^6}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} \dots\right)^2 = 0,$$

so dass wiederum y durch eine jetzt vollständige kubische Gleichung, deren Coefficienten bestimmten Reducenten genügen müssen, bestimmt ist. Auch hier ist das stets positive Absolutglied durch eine periodische Reihe definirt.

Im Anschluss an die in 134) aufgestellte Beziehung, welche auch in

$$43)\qquad \frac{2K}{\pi}\,\frac{z' z^2(\sin\varphi\cos\varphi}{(\Delta+z')^2} = u\,\frac{\vartheta 2\varrho z\,.\,\vartheta_1 2\varrho z\,.\,\vartheta_2 2\varrho_2}{(\vartheta_3 2\varrho z)^3}$$

umgewandelt werden kann, und worin wir $\sin\varphi$ durch $\frac{s}{y-z'}$, ferner s durch $\frac{z^2\sin\varphi}{(\Delta+z')}$ ersetzen, resultirt der der obigen kubischen Gleichung entsprechende transformirte Wert

$$44)\quad y^3 - \frac{1+z'^2}{2z'}y^2 - y + \frac{1+z'^2}{2z'} + \frac{\pi^2 z^4}{8z'^3 K^2}u^2\left(\frac{\vartheta 2\varrho z\,.\,\vartheta_1 2\varrho z\,.\,\vartheta_2 2\varrho z}{\vartheta_3 2\varrho z}\right)^2 = 0,$$

worauf wir hier aufmerksam machen. Die daraus hervorgehenden Beziehungen und Identitäten wollen wir indessen nicht weiter hier discutiren.

Durch Combination der für $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $s = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ aufgestellten Reihen erhält man die Entwickelung von $e^{\pm x}$.

Aus der Addition von

$$45) \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{E}{z'K} - \frac{4\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^4}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right),$$

und

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

folgt demnach die folgende Reihe mit eigentümlichem Bildungsgesetz

$$46) \quad e^x = \frac{E}{z'K} + \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{4q^4}{1-q^8}\cos\frac{4\pi u}{2K} \ldots\right),$$

und vermittelst Subtraction die ihr analoge

$$47) \quad e^{-x} = \frac{E}{z'K} - \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{2K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\cos\frac{4\pi u}{2K} \ldots\right),$$

die sich durch symmetrische Ordnung auszeichnen.

Die in 11) entwickelte Function für $e^{\frac{x}{2}}$ lässt sich mit Anwendung bekannter Formeln leicht durch einen aus zwei einfach periodischen Quotienten wie folgt ausdrücken.

Für

$$x = \ln\left(\frac{1 + z'\Delta + z^2\sin\varphi}{z' + \Delta}\right)$$

folgt

$$48) \quad e^{kx} = \frac{1 + 2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^4\cos\frac{2\pi u}{2K} - 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{2K} + \ldots}{1 - 2q\sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^4\cos\frac{2\pi u}{2K} + 2q^9\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{2K} - \ldots}$$

Die Reihenentwickelungen für die Coordinaten der Kettenlinie sind, wie aus Vorstehendem ersichtlich ist, sehr mannichfach und zeigen, wie sehr die Eigenschaften der Curve in analytischer Hin-

Digitized by Google

sicht durch Anwendung auf die elliptischen Functionen sich letzteren anschmiegen. Um noch andere Beziehungen geometrisch-analytischer Natur aufzustellen, wollen wir zunächst an die bekannte Formel

$$\cos x - p\cos 3x + p^2\cos 5x \ldots = \frac{(1+p)\cos x}{1+2p\cos 2x + x^2}$$

erinnern, um mit Hülfe derselben einen andern Reihenausdruck abzuleiten.

Die häufig auftretende Reihe

$$\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \ldots$$

können wir durch Entwickelung der Brüche in geeigneter Reihenfolge leicht durch Partialquotienten von der Form

$$\frac{q(1+q^2)\cos\frac{\pi u}{2K}}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}$$

transformiren, daher ist vermöge der bekannten Bedeutung der Formel 18) der Ausdruck für l

$$49)\quad l = \frac{4\pi}{K}\cos\frac{\pi u}{2K}\left(\frac{q(1+q^2)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4} + \frac{q^3(1+q^6)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}} \ldots\right)$$

und

$$50)\quad \sqrt{1+z'^2-2z'y} = z\sqrt{\frac{\Delta - z'}{\Delta + z'}}$$
$$= \frac{4\pi}{K}\cos\frac{\pi u}{2K}\left(\frac{q(1+q^2)}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4} + \frac{q^3(1+q^6)}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}} \ldots\right)$$

Der in 19) für $\mathrm{tgam}\,u$ abgeleitete Wert kann auch mit Hilfe der bekannten Relation

$$\frac{d}{du}\left(\ln\sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}}\right) = \cot\mathrm{am}\,u, \quad \text{Durège § 58.}$$

aus der früher entwickelten Reihe

$$\sqrt{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}} = \frac{4\pi}{2K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

hergeleitet werden, indem man letztere logarithmisch differentiirt.

Man findet ohne Mühe

$$51)\quad \operatorname{cotam} u = \frac{\pi}{2K}\,\frac{\dfrac{q}{1-q^2}\cos\dfrac{\pi u}{2K}+\dfrac{3q^3}{1-q^6}\cos\dfrac{3\pi u}{2K}+\cdots}{\dfrac{q}{1-q^2}\sin\dfrac{\pi u}{2K}+\dfrac{q^3}{1-q^6}\sin\dfrac{3\pi u}{2K}+\cdots}$$

woraus vermittelst einer Umwandlung die erwähnte Formel hervorgeht.

Wir wollen ferner die Reihe für $\operatorname{tg}\delta$, also

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\pi^2}{z'K^2}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{3q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\cdots\right)$$

in Beziehung auf δ und u differentiiren, man findet

$$\frac{d\delta}{\cos\delta^2} = \frac{\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\cdots\right),$$

wird ebenfalls $y = \dfrac{1}{\cos\delta}$ differentiirt und endlich noch die Reihe 14) für y, so hat man zunächst

$$\frac{dy}{d\delta} = \frac{\sin\delta}{\cos\delta^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d\delta}{\cos\delta^2} = \frac{dy}{\sin\delta},$$

$$\frac{z'dy}{du} = \frac{4\pi^3}{K^3}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K}+\cdots\right).$$

Eliminirt man also $\dfrac{d\delta}{\cos\delta^2}$ aus den beiden ersten Formeln und ersetzt $\dfrac{dy}{du}$ mittelst der letzten, so erhält man das Resultat

$$52)\quad \sin\delta = 4\,\frac{\dfrac{q^2}{1-q^4}\sin\dfrac{\pi u}{K}-\dfrac{4q^4}{1-q^8}\sin\dfrac{2\pi u}{K}+\cdots}{\dfrac{q}{1-q^2}\cos\dfrac{\pi u}{2K}-\dfrac{9q^3}{1-q^6}\cos\dfrac{3\pi u}{2K}+\cdots}.$$

Man kann diese Entwickelungen in geometrischer Hinsicht deuten. Die Tangente der Kettenlinie im Punkte P schneide die Abscissenaxe in R. Bezeichnen wir nun die Strecken AR derselben zwischen der Tangente und der Ordinate y mit g, so ist

$$g\sin\delta = 1.$$

Daher ist vermöge des obigen Reihenausdrucks für $\sin\delta$

$$53)\quad g = \frac{1}{4}\,\frac{\dfrac{q}{1-q^2}\cos\dfrac{\pi u}{2K}-\dfrac{9q^3}{1-q^6}\cos\dfrac{3\pi u}{2K}+\cdots}{\dfrac{q^2}{1-q^4}\sin\dfrac{\pi u}{K}-\dfrac{4q^4}{1-q^8}\sin\dfrac{2\pi u}{K}+\cdots}.$$

Digitized by Google

XI.

Wir geben noch im Folgenden diejenigen Reihenentwickelungen, welche als Functionen einer durch die Kettenlinie dargestellten geometrischen Beziehung, sei es eine Gerade, Fläche oder Winkel, von einiger Wichtigkeit sind.

Hinsichtlich der Ableitung dieser und anderer bemerken wir, dass hierfür zuweilen mehrere Wege offen stehen.

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen durch die Katheten s und l gebildeten Dreiecks kann man unter Benutzung der Differentialformel für y in Verbindung mit der aus

$$y = \frac{1 + z'\Delta}{1 + \Delta}$$

hervorgehenden Ableitung

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{z^4 \sin\varphi \cos\varphi}{(z' + \Delta)^2 \Delta}$$

leicht berechnet werden. Da nämlich

$$\frac{z^4 \sin\varphi \cos\varphi}{(z' + \Delta)^2} = s^2 \cot\varphi = sl$$

ist, so folgt

$$54)\quad f = \frac{2\pi^3}{z' K^3}\left(\frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{9q^6}{1-q^{12}}\sin\frac{3\pi u}{K} \ldots\right)$$

Es sei $K'C = m$. Man hat den leicht berechenbaren Ausdruck

Ferner sei der Winkel zwischen $K'C$ und AC mit i und der Winkel zwischen $K'C$ und KP mit σ bezeichnet. Aus

$$\frac{\sin\delta}{\sin i} = \frac{m}{z}$$

folgt, wie leicht zu finden ist, $\operatorname{tg} i = z' \sin\varphi$, $\operatorname{tg}\sigma = \frac{\sin\varphi}{\Delta}$, $z' \sin\sigma = \sin i$. Denn es ist

$$\operatorname{tg}\sigma = \operatorname{tg}(\delta + c) = \frac{\operatorname{tg}\delta + z'\sin\varphi}{1 - z'\sin\varphi \operatorname{tg}\delta} \quad \text{u. s. w.}$$

Daher kann man entweder zur Darstellung von $\operatorname{tg}\sigma$ die elliptischen Transcendenten benutzen, wodurch

$$55)\quad \operatorname{tg}\sigma = \frac{1}{\sqrt{zz'}} \frac{2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots}{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots}$$

oder man zieht die in der Theorie bekannte Reihe für $\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}$ heran, welche demnach die folgende geometrische Bedeutung

$$56)\quad \operatorname{tg}\sigma = \frac{2\pi}{zz'K}\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right)$$

gewinnt.

Auf dieselbe Weise verwerten wir die für $\sin\mathrm{am}\,u$ bekannte Reihe um $\operatorname{tg} i = z'\sin\varphi$ durch dieselbe darzustellen. Demgemäss ist

$$57)\quad \operatorname{tg} i = \frac{2\pi z'}{Kz}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots\right).$$

Diese Interpretation dieser bekannten Reihen ist jedenfalls bemerkenswert.

Bemerkt man ferner, dass aus der Formel

$$y = \frac{1}{\cos\delta} = \frac{1+z'\Delta}{z'+\Delta}$$

die Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}\cdot\frac{1-\Delta}{1+\Delta}}$$

folgt, so geht auch die in V. abgeleitete Gleichung in die folgende

$$58)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \frac{4\pi}{(1+z')K}\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K}\ldots\right)$$

über und analog folgt aus II.

$$59)\quad \tfrac{1}{4}\arcsin\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{1}{5}\frac{q^5}{1+q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{2K} + \ldots,$$

die demnach wie die vorhergehenden vermittelst der Kettenlinie geometrisch interpretirt ist.

Auch die früher aufgestellte Reihe

$$\frac{z^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta+z'} = \frac{2\pi}{K}\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2(1-q^2)^2}{1-q^8}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right),$$

welche geometrisch durch eine Normale des Amplitudendreiecks, d. i. durch $l\sin\varphi$ bezeichnet werden kann, ist noch einer Transformation

fähig. Wir multipliciren sie mit $\frac{d\varphi}{\Delta} = du$ und integriren. Das allgemeinere Integral ist

$$\ln\cos\varphi - z'\int \frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi\sqrt{z'^2+z^2\cos\varphi^2}} = 2\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}+\ldots\right)+C,$$

oder

$$\ln\cos\varphi - \ln\frac{z\cos\varphi-\Delta+z'}{z\cos\varphi-\Delta-z'} = 2\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\cos\frac{\pi u}{K}\ldots\right)+C.$$

Für $\varphi = 0$ folgt

$$0 = -\ln\frac{z-1+z'}{z-1-z'} = 2\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\ldots\right)+C.$$

Daher ist

$$\tfrac{1}{4}\ln\frac{z\cos\varphi-\Delta+z'}{z\cos\varphi-\Delta-z'}\,\frac{z-1-z'}{z-1+z'}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u^2}{2K}+\ldots,$$

oder mit Einführung der Relation

$$\tfrac{1}{4}\ln\frac{1+z'}{1-z'}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} = \frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u^2}{2K}+\tfrac{1}{2}\frac{(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi^2}{2K}+\ldots,$$

Nun ist aber

$$\frac{1+z'}{1-z'}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} = \frac{1+z'}{\Delta+z'} = \frac{y-z'}{1-z'},$$

Demnach auch

60) $$\frac{y-z'}{1-z'} = e^{4\left(\frac{q(1+q)^2}{1-q^4}\sin\frac{\pi u^2}{2K}+\frac{1}{2}\frac{q^2(1-q^2)^2}{1-q^8}\sin\frac{2\pi u^2}{2K}\ldots\right)}.$$

Man sieht, mit welcher Leichtigkeit solche Combinationen gewonnen werden können. Von denjenigen, welche noch zu erwähnen sind, wählen wir zum Zweck einer Differentiation die in 46) abgeleiteten Relationen, die demnach differentiirt

$$e^x\frac{dx}{du} = \frac{\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right),$$

$$e^{-x}\frac{dx}{du} = \frac{\pi^3}{z'K^3}\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}\ldots\right),$$

und durcheinander dividirt die Formel

61) $$e^{2x} = \frac{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}-\ldots}{\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{2K}-\frac{4q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{2K}-\frac{9q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\ldots}$$

geben. Auch aus den beiden ersten ergeben sich nach Einsetzen des für $\frac{dx}{du}$ bekannten Wertes neue Relationen für $e^{\pm x}$.

Bemerkenswerter ist die Transformation der in 48) für e^{x} aufgestellten Formel, welche wir jetzt untersuchen wollen.

Man findet zunächst

$$62)\qquad \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=\frac{2q\sin\frac{\pi u}{2K}-2q^{9}\sin\frac{3\pi u}{2K}+2q^{25}\sin\frac{5\pi u}{2K}\ \ldots}{1-2q^{4}\cos\frac{\pi u}{K}+2q^{16}\operatorname{ocs}\frac{\pi u}{K}-2q^{36}\cos\frac{3\pi u}{K}\ \ldots}$$

Die beiden hier erscheinenden Reihen sind, wie man sieht, elliptische Transcendenten. Da der Ausdruck zur Rechten mit dem Quotienten für die Function $\sin\operatorname{am} u$ übereinstimmt, wenn q anstatt q^{4} eingeführt wird, so ist eine Reduction auf diese Relation leicht durchführbar. Lösen wir demnach die letzte Gleichung nach e^{x} auf, so ist in dem genannten Sinne unter Benutzung bekannter Formeln

$$63)\qquad \frac{1+\sqrt{z}\sin\varphi}{1-\sqrt{z}\sin\varphi}=e^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt[4]{q}}{1-\sqrt{q}}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt[4]{q^{3}}}{1-\sqrt{q^{3}}}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\ldots\right),$$

welche neue Beziehung wir nachher einer dynamischen Betrachtung zu Grunde legen werden.

Eine neue Transformation von 63) würde noch die folgende liefern

$$64)\qquad \frac{\Delta+z\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta-z\sin\varphi\cos\varphi}=e^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{K}-\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{q^{3}}}{1-q^{3}}\sin\frac{3\pi u}{K}+\ldots\right).$$

Aus der ersten kann noch mittelst einer weitern Umgestaltung die folgende abgeleitet werden.

$$65)\qquad \frac{1-\sqrt{z}\sin\varphi}{1+\sqrt{z}\sin\varphi}=$$

$$\frac{(1-2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q})(1-2\sqrt[4]{q^{3}}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q^{3}})\ \ldots}{(1+2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q})(1+2\sqrt[4]{q^{3}}\sin\frac{\pi u}{2K}+\sqrt{q^{3}})\ \ldots}$$

Für $\varphi=90$ folgt nach mehrfacher Umwandlung ein schon früher gefundenes Resultat.

Wir bemerken noch, dass wegen der leicht abzuleitenden Gleichung

$$e^{2x} = \frac{1 + \frac{z^2 \sin\varphi}{1 + z'\Delta}}{1 - \frac{z^2 \sin\varphi}{1 + z'\Delta}}$$

in Folge der Bedeutung von

$$g = \frac{1 + z'\Delta}{z^2 \sin\varphi}$$

die folgende Relation

$$e^{2x} = \frac{g+1}{g-1}$$

besteht.

VIII.

Die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionen.

Von

Paul Richard Domsch.

Erster Teil.

Einleitung.

Wenn wir in Folgendem statt der allgemeinen Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt vorwiegend die Cykliden in Betracht ziehen, wenn wir also für den Doppelkegelschnitt den imaginären Kugelkreis nehmen, so ist dies durchaus keine wesentliche Beschränkung. Von projectivem Standpunkt betrachtet hat jener ja keine ausgezeichnete Lage, wir können jederzeit unsere Cyklide, resp. das Cyklidensystem einer linearen Transformation unterwerfen, welche den Kugelkreis zu einem Kegelschnitt im Endlichen macht, und die zu gewinnenden Sätze werden dann in unveränderter Form sogar bestehen bleiben, wenn wir nach der Collineation den nunmehrigen Doppelkegelschnitt zur Grundlage der Massbestimmung wählen. Nehmen wir in den Transformationsformeln die Coefficienten complex an, so können wir sogar den Doppelkegelschnitt reell machen, wodurch allerdings alle Realitätsverhältnisse sich ändern, und auch unsere Resultate die bezüglichen Modificationen erleiden.

Wir beschäftigen uns demnach allein mit den Cykliden und suchen die Resultate zu verwerten, die von Moutard [1]), Darboux [2]), Casey [3]) über jene Flächen und Flächensysteme gewonnen wurden.

Zur Erreichung des Zweckes, die Darstellung durch hyperelliptische Functionen zu leisten, bieten sich mehrere Wege dar.

Das Zunächstliegende würde sein, die Untersuchung direct zu führen und auszugehen von der Darstellung der Cyklide, bezogen auf ein orthogonales Fünfkugelsystem in sogenannten pentasphärischen Coordinaten (unter pentasphärischen Coordinaten eines Punktes versteht man die mit gewissen Constanten multiplicirten Potenzen des Punktes in Bezug auf jene 5 Fundamentalkugeln). Indem man diese Coordinaten als Functionen der beiden Krümmungslinienparameter der Cyklide darstellt, zeigt sich sofort die Möglichkeit der Durchführung der Aufgabe. (Zuerst ausgesprochen findet sich dies bei Darboux, Comptes Rendus Bd. 69, p. 392: Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques). Die pentasphärischen Coordinaten lassen sich 5 hyperelliptischen ϑFunctionen vom Geschlecht 2 proportional setzen, welche einem sogenannten Rosenhain'schen Sechsersystem angehören, und nun wird die Kenntniss der ϑFunctionen und deren Relationen zu verwerten gesucht für die Gewinnung geometrischer Sätze für die Cykliden.

---

1) Moutard: „Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques", „Note sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre", Nouv. Ann. de Math. 2. S. Bd. 3., 1864, p. 306—9, p. 536—39.

— Sur les lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatrième ordre, Comptes Rendus, Bd. 59., p. 243.

2) Darboux: „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques", Paris, Gauthier-Villars, 1873. Man findet darin ausser einem der Pariser Akademie 1869 eingereichten Memoire eine Zusammenstellung aller Noten und kleineren Aufsätze, die Herr Darboux über diesen Gegenstand geschrieben, am Schluss des Werks auch eine ausführliche Litteraturangabe, die Cykliden betreffend.

3) Casey: „On Cyclides and Sphero-Quarties, Phil. Transactions, Bd. 161., p. 585. In jüngster Zeit hat der Gegenstand eine erneute Behandlung erfahren durch Herrn Gino Loria (Ricerche intorno alla Geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di quarto ordine aventi per linea doppia il cerchio imaginario all' infinito, Memorie delle Reale Academia delle Scienze di Torino, Ser. 2., Bd. 36.), der von der Betrachtung von Kugelcomplexen und Congruenzen ausgeht, und durch Herrn Segre (Etude des différentes surfaces du 4e ordre à conique double etc., Math. Ann. Bd. 24., p. 313.), der in einer umfangreichen Abhandlung die Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt betrachtet als Centralprojectionen des

Um insbesondere ausgezeichnete Curvensysteme auf der Cyklide zu erhalten, setzt man, in den einfachsten Fällen wenigstens, ϑ Functionen, deren Argumente sich von denen der gegebenen um Constante unterscheiden, gleich Null und erhält hierdurch eine Gleichung zwischen den beiden Parametern der Cyklide, also die Gleichung einer Curve auf der Fläche; die Wahl der Constanten bestimmt die Art der Curven.

Eine zweite Methode ist indirecter Natur und nimmt ihren Ausgangspunkt nicht von der Cyklide, sondern von Flächen, resp. Flächensystemen, die bereits durch hyperelliptische Transcendente dargestellt sind und in Beziehung zur Cyklide, resp. dem confocalen Cyklidensystem gesetzt werden können.

Herr Darboux gab im Jahre 1864 in den Annales de l'École Normale Supérieure eine einzweideutige Transformation an, welche eine Oberfläche 2ter Ordnung in eine Cyklide, eine Flächenschaar 2ten Grades in ein confocales Cyklidensystem verwandelt.

Nun ist die Fläche 2ten Grades, resp. die Flächenschaar 2ten Grades durch hyperelliptische Functionen dargestellt, in neuester Zeit z. B. in eingehender Weise von Herrn Staude[4]), der dazu gelangte, eine grosse Anzahl von Θ Relationen als geometrische Sätze über die Flächen 2ten Grades auszusprechen, und die Darstellung namentlich benutzte, um die bekannten Schliessungssätze zu erhalten, die sich auf Polygone beziehen, die von den gemeinsamen Tangenten der Flächen der Schaar 2ten Grades gebildet werden.

Von diesen Resultaten ausgehend, gelangt man mit Hilfe der Darboux'schen Transformation ohne erhebliche Mühe zu einer Darstellung des Cyklidensystems durch hyperelliptische Functionen, zu einer analogen Deutung der Θ Relationen in der Geometrie der Cykliden und zu entsprechenden Schliessungssätzen.

Schnittes zweier quadratischen Mannigfaltigkeiten von 3 Dimensionen im linearen Raum von 4 Dimensionen auf den gewöhnlichen Raum. Diese Methode führt ihn zu den bekannten und einzelnen neuen Sätzen über die Cykliden, sowie zu einer erschöpfenden Classification, die auch von Herrn Loria gegeben wird für den Fall eines nicht zerfallenden Doppelkegelschnitts. Wir verweisen noch besonders auf die geschichtliche Einleitung, die Herr Segre seiner Abhandlung vorausschickt.

4) Staude: „Geometr. Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen 1. Ordng. im System der confocalen Flächen 2. Grades", Math. Annalen, Bd. 22., p. 1.

— „Ueber geodätische Polygone auf den Flächen 2ten Grades", Math. Ann., Bd. 21., p. 219.

Digitized by Google

Noch eine andere Flächenart ist durch hyperelliptische Functionen dargestellt, die Kummer'sche Fläche.

Nachdem Herr Klein im 5ten Band der Math. Annalen p. 302, fals Erster auf die Möglichkeit der Darstellung hingewiesen hatte olgten die Ausführungen durch die Herren Cayley [5]) und Borchardt [6]) im 83ten Band des Crelle'schen Journals, von H. Weber [7]) im 84ten Band desselben Journals und von Herrn Rohn [8]) im 15ten Band der Annalen.

Andererseits hat Herr Lie im 5ten Band der Annalen „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe", p. 145. ff. gezeigt, wie durch eine Berührungstransformation, welche die Punkte des einen Raumes in die Minimalgeraden [9]) des andern, die Geraden in die Kugeln, Flächenelemente, die consecutive Punkte einer Geraden gemein haben, in die Flächenelemente der entsprechenden Bildkugel überführt, die Kummer'sche Fläche in eine Cyklide transformirt wird; die Kummer'sche Fläche wird dabei angesehen als Brennfläche einer Congruenz 2ter Ordnung und Classe, nicht als Singularitätenfläche einer Complexschaar 2ten Grades.

Hat man auf diesem Wege die Beziehungen zwischen Kummerscher Fläche und Cyklide vollständig klar gelegt, so ist damit auch die Darstellung der Cyklide durch hyperelliptische Functionen geleistet. Die ϑ Relationen bleiben ja bei der Berührungstransformation invariant, sie ändern nur ihre Bedeutung, wie es das Uebertragungsprincip angiebt.

Dabei haben wir noch den Vorteil, dass wir zu gleicher Zeit 3 Arten der Darstellung erhalten, entsprechend den 3 Weisen, durch welche die Kummer'sche Fläche durch ϑ Functionen dargestellt wurde:

---

5) Cayley: „On the double Θfunctions in connexion with a 16 noda quartic surface", Crelle's Journal Bd. 83., p. 210.

6) Borchardt: „Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch die Göpel'sche biquadratische Relation etc.". Crelle's Journal, Bd. 83., p. 234.

7) Weber:. „Ueber die Kummer'sche Fläche 4ter Ordnung mit 16 Knoteupuncten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit 2 Veränderlichen" Crelle's Journal, Bd. 84., p. 332.

8) Rohn: „Transformation der hyperelliptischen Functionen $p=$ und 2. ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche", Math. Annalen, Bd. 15., p. 315

9) Anschliessend an Herrn Lie werden wir Minimalgerade die Geraden nennen, welche den Kugelkreis treffen, die „lignes de longueur nulle".

1. die liniengeometrische Darstellung Rohn's;
2. die Borchardt'sche Darstellung;
3. die Cayley-Weber'sche Darstellung [10]).

In Folge dessen erhalten wir auch 3 Serien von Curvensystemen auf Kummer'scher Fläche und Cyklide.

Wenn wir in Folgendem der 2ten, indirecten Methode den Vorzug geben und also einmal von der Flächenschaar 2ten Grades das andere Mal von der Kummer'schen Fläche ausgehend, die Darstellung der Cykliden durch hyperelliptische Transcendente leisten, so geschieht dies zunächst aus dem Grunde grösserer Einfachheit. Wir können ja das reiche, schon vorhandene Material verwerten, und es kommt in der Hauptsache nur auf eine Umdeutung der bereits gewonnenen Formeln und Sätze an. Weiterhin eröffnet sich uns hierdurch aber auch die Perspective, mit Hilfe der Cyklide als Zwischenglied eine Beziehung zwischen Fläche 2ten Grades und Kummer'scher Fläche herzustellen und so z. B. die Schliessungssätze auch für die Geometrie der Kummer'schen Fläche zu verwerten.

Demgemäss wird sich der Gang der Untersuchung in folgender Weise gestalten:

Im **ersten Teile** behandeln wir die Beziehungen zwischen der Flächenschaar 2ten Grades und dem confocalen Cyklidensystem und zwar im 1ten Capitel zunächst die (1, 2) deutige Transformation, welche die Ueberführung leistet. Wir gewinnen dadurch im 2ten Capitel eine Uebersicht über die gestaltlichen Verhältnisse der Cykliden, über den Verlauf der Krümmungslinien und der geodätischen Curven auf denselben.

Das 3te Capitel deutet das Abel'sche Theorem für überall endliche Integrale in der Flächenschaar 2ten Grades und dem Cyklidensystem. Wir finden, dass die Gleichungen desselben Differentialgleichungen der 2 Flächen des Systems je 2fach berührenden Kreise sind, und erhalten hierauf Sätze für die 4 durch ein Punktepaar gehenden Doppelberührungskreise, sowie die Deutung des einfachen Additionsproblems im Cyklidensystem. Im letzten Paragraphen dieses Capitels endlich

---

10) Die dreierlei ϑ hängen dabei so zusammen, dass die der zweiten Darstellung aus denen der 1ten, und die der 3ten aus denen der 3ten durch quadratische Transformation gewonnen werden können, die der 2ten aus denen der 1ten, also durch Zweiteilung der Argumente hervorgehen.

zeigen wir, wie man zu Schliessungssätzen gelangen kann, die innerhalb der Congruenz der gemeinsamen Doppelberührungskreise zweier confocaler Flächen der Cyklidenschaar gelten und führen dies an einem Beispiel durch.

Im zweiten Teile behandeln wir nun die Transformation des Raumes der Kummer'schen Fläche in den Cyklidenraum, welche durch die erwähnte Berührungstransformation vermittelt wird.

Nachdem wir im ersten Capitel zunächst die Fundamentalgebilde in der Geometrie der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung betrachtet haben, setzen wir sodann die einzelne Kummer'sche Fläche in Beziehung zur einzelnen Cyklide, eine Schaar Kummer'scher Flächen, die sich längs einer ausgezeichneten Haupttangentencurve 8ter Ordnung berühren, in Beziehung zum confocalen Cyklidensystem. Der Darstellung der Kummer'schen Fläche durch die Parameter der Haupttangentencurven entspricht die Darstellung der Cyklide durch Krümmungslinienparameter.

Um nun die Abbildung von Curven auf der Kummer'schen Fläche in solche auf der Cyklide in möglichst allgemeiner Weise zu behandeln, betrachten wir hierauf zunächst die Abbildung von Linienflächen, deren Erzeugende einem ausgezeichneten linearen Complex angehören, und alsdann das Entsprechen von Curven auf beiden Flächen mit besonderer Berücksichtigung der Singularitäten.

Das 2te Capitel bringt nun die Anwendung der erhaltenen Resultate; wir betrachten Kummer'sche Fläche und Cyklide unter Berücksichtigung der ϑ Functionen. Den dreierlei ϑ Functionen, den lineargeometrischen, den Borchardt'schen, den Weberschen entsprechen 3 Reihen von Curvensystemen auf der Cyklide, wie auf der Kummer'schen Fläche; diese Curvensysteme werden der Untersuchung unterzogen.

Im Schlusscapitel endlich gehen wir noch etwas ein auf die Beziehungen zwischen der Kummer'schen Flächenschaar und der Flächenschaar 2ten Grades, insbesondere auf die Uebertragung der im 3ten Capitel des ersten Teils behandelten Schliessungssätze.

I. Teil.

Flächenschaar IIten Grades und Cyklidensystem.

I. Capitel.

Transformation der Flächenschaar 2ten Grades in ein confocales Cyklidensystem.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gab Herr Darboux im Jahre 1864 in den Annales de l'École Normale, Bd. 1. eine (1, 2)-deutige Transformation an, welche eine Oberfläche 2ten Grades in eine Cyklide, eine Flächenschaar 2ten Grades in ein confocales Cyklidensystem verwandelt.

Ist nämlich irgend eine Fundamentalkugel

$$S_0 = 0$$

gegeben, so ordnen wir einem beliebigen Punkte μ die 2 Punktkugeln m und m' zu, welche dem Kugelbüschel angehören, das durch die Fundamentalkugel und die Polarebene des gegebenen Punktes μ in Bezug auf die Kugel bestimmt wird. Neben diese Zuordnung von Punkten und Punktepaaren stellt sich eine solche von Ebenen und Punktepaaren, indem man jeder Ebene das Punktkugelpaar entsprechen lässt, das sich in dem durch Ebene und Fundamentalkugel bestimmten Büschel findet. Reellen Ebenen entsprechen dann nur reelle Punktepaare, wenn erstere die Fundamentalkugel nicht schneiden; m und m' sind also allein reell, wenn μ im Innern der Kugel liegt. Es bildet sich auf diese Weise das Innere der Kugel vermöge der Transformation auf den gesammten Punktraum ab.

Nimmt man den Fundamentalkugelmittelpunkt zum Coordinatenanfang und nennt $x'y'z'$ die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes μ, so ist die Transformation analytisch definirt durch die Formeln:

$$1) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{2R_0^2 x}{x^2+y^2+z^2+R_0^2} \\ y' = \dfrac{2R_0^2 y}{x^2+y^2+z^2+R_0^2} \\ z' = \dfrac{2R_0^2 z}{x^2+y^2+z^2+R_0^2} \end{cases}$$

Hierbei sind x, y, z die Coordinaten des Punktpaares mm', R_1 der Radius der Fundamentalkugel [11]).

Wir sehen ohne weiteres aus den Formeln:

Beschreibt μ eine Ebene, so beschreibt das Punktepaar (mm') eine Kugel, die orthogonal zu der gegebenen ist; geht die Ebene durch den Kugelmittelpunkt, so wird aus ihr wiederum eine Ebene; berührt sie die Fundamentalkugel, so wird sie zu einer Punktkugel, dem Berührungspunkt.

Die Geraden gehen mit Hilfe der Transformation in Kreise über, die senkrecht auf der Fundamentalkugel stehen.

Einer Curve $n$ten Grades entspricht im Allgemeinen eine Curve vom Grade $2n$, die den Kugelkreis in $2n$ Punkten schneidet. Wenn indessen der Mittelpunkt der Fundamentalkugel ein αfacher Punkt der Curve ist, so vermindert sich der Grad um α und um ebensoviel die Zahl der Schnittpunkte mit dem Kugelkreis. Berührt die Curve die Fundamentalkugel in einem Punkte a, so ist dieser Punkt a ein Doppelpunkt der transformirten Curve.

Im Speciellen entspricht also einem Kegelschnitt eine sphärische Curve 4ter Ordnung, die den Kugelkreis in 4 Punkten schneidet; berührt der Kegelschnitt die Fundamentalkugel in 2 Punkten, so zerfällt die Curve 4ter Ordnung in 2 sich in 2 Punkten schneidende Kreise.

Einer Fläche $n$ter Ordnung, welche im Mittelpunkt der Fundamentalkugel einen $p$fachen Punkt besitzt, entspricht eine Fläche von der Ordnung $(2n-p)$. Berührt die ursprüngliche Fläche die Fundamentalkugel in einem Punkte a, so hat die transformirte Fläche in a einen Knotenpunkt.

Den Kugelkreis enthält die Fläche halb soviel mal zählend, als ihre Ordnung n beträgt [12]).

Einer Oberfläche 2ten Grades entspricht im Allgemeinen eine Fläche 4ter Ordnung, die den Kugelkreis als Doppelcurve enthält.

---

11) Genau dieselben Transformationsformeln begegnen uns bei Beltrami Ann. di Mat. 2. Ser., Bd. 2., 1868, Teoria fondam. degli spazii di curv. const., später bei Killing, Bd. 86. u. 89. des Crelle'schen Journ. Sie dienen daselbst zur Transformation des gewöhnlichen Raumes in einen solchen nicht-euklidischen, in welchem sich die Geraden in 2 Punkten schneiden.

12) Wenigstens im Allgemeinen; ist der Mittelpunkt $p$facher Punkt, so zählt der Kugelkreis $n-p$fach.

Geht die Oberfläche 2ten Grades durch den Mittelpunkt der Fundamentalkugel, so ist die transformirte Fläche nur von der 3ten Ordnung; es scheidet sich die unendlich ferne Ebene ab, der Kugelkreis ist einfache Linie auf dem übrig bleibenden Teil.

Flächen vierter Ordnung aber, die den Kugelkreis als Doppelcurve besitzen, nennen wir nach dem Vorgange von Darboux und Moutard Cykliden. Wir haben somit den Satz erhalten:

„Oberflächen 2ter Ordnung verwandeln sich mit Hilfe der ein„zweideutigen Transformation, wie sie durch die Formeln 1) ver„mittelt wird, in Cykliden."

Wir greifen jetzt eine beliebige Fläche 2ten Grades heraus, und beziehen dieselbe in Gemeinschaft mit der Fundamentalkugel auf das ihnen gemeinsame Polartetraeder, dessen Ebenen bezeichnet seien durch

$$2) \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Alsdann können wir die Gleichungen von Kugel und Oberfläche 2ten Grades in der Gestalt schreiben:

$$3) \qquad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \\ a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0 \end{cases}$$

Beide Flächen bestimmen eine ganze Flächenschaar, die derselben Developpabeln einbeschrieben ist und dargestellt wird durch die Gleichung

$$4) \qquad \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} + \frac{x_4^2}{a_4 - \lambda} = 0$$

wo

$$a_i = \frac{1}{a_i} \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Die Ebenen des gemeinsamen Polartetraeders verwandeln sich vermöge der Transformation 1) in 4 Kugeln, die orthogonal zur Fundamentalkugel und gegen einander sind; sie bilden mit der Fundamentalkugel ein pentasphärisches Fundamentalsystem; die 4 Ecken des Polartetraeders sind die 4 Centren der neu hinzukommenden Kugeln.

Die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf das Polartetraeder verwandeln sich durch die Transformation, wie sich sofort ergiebt [13]),

13) Man vergleiche Darboux, Sur une classe rem. etc. p. 133.

in die Verhältnisse der 4 Potenzen des Punktes in Bezug auf die 4 den Coordinatenebenen entsprechenden Kugeln zu der Potenz in Bezug auf die gegebene Fundamentalkugel, jede Potenz dividirt durch den Radius der zugehörigen Kugel des Fundamentalsystems. Bezeichnet man demnach mit S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die 4 Potenzen eines Punktes in Bezug auf die vier den Tetraederebenen entsprechenden Kugeln, mit S_0 die Potenz in Bezug auf die Fundamentalkugel, mit R_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Radien der ersteren 4 Kugeln, mit R_0 den Radius der Fundamentalkugel und setzt

$$5) \qquad \frac{S_i}{R_i} = s_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

so erhält man

$$6) \qquad x_i = \frac{s_i}{s_0}.$$

Mit Hilfe dieser Transformationsformel nimmt die Gleichung der Cyklidenschaar, welche der Flächenschaar 4) entspricht, die Gestalt an

$$6) \qquad \frac{s_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{s_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{s_3^2}{a_3 - \lambda} + \frac{s_4^2}{a_4 - \lambda} = 0.$$

Diese Gleichung stellt aber bekanntlich ein 3fach orthogonales Cyklidensystem dar (Darboux, a. a. O. p. 134.). Durch jedes reelle Punktepaar im Raume ($s_1 s_2 s_3 s_4$) gehen 3 reelle Flächen der Schaar die sich rechtwinklig, also in ihren Krümmungslinien schneiden. Wir fassen dies Resultat in den Satz:

„Die Flächenschaar zweiten Grades, deren Flächen derselben „Developpabelen einbeschrieben sind, verwandelt sich durch die ge„gebene Transformation in ein confocales Cyklidensystem".

Wir gelangen zu demselben confocalen Cyklidensystem, wenn wir von 4 anderen Flächen 2ten Grades ausgehen, deren reciproke[14]) Flächen mit der reciproken Fläche der durch 3) dargestellten confocal sind und mit der letzteren gemeinschaftlich von einer Gleichung 5ten Grades abhängen[15]); die ursprünglichen vier Flächen bilden also mit der durch 3) dargestellten ein Flächenbüschel 2ten Grades. Indem wir dergestalt einer jeden derselben eine bestimmte der 4 übrigen Kugeln des Fundamentalsystems zuordnen, erhalten wir 4 neue Flächenschaaren, und diese transformiren sich in dasselbe Cyklidensystem.

---

14) Reciprok in Bezug auf je 1 der Fundamentalkugeln.

15) Darboux, a. a. O. p. 114.

Statt die Flächenschaaren zu transformiren, können wir natürlich auch die reciproken Flächenbüschel in Betracht ziehen, indem wir den Ebenen des Raumes des Flächenbüschels die Punktepaare entsprechen lassen.

Eine Fläche aus einem der Büschel ist alsdann der Ort der Centren der ∞^2 Kugelschaar, deren Kugeln die entsprechende Cyklide je doppelt berühren und sie dergestalt erzeugen.

Neben diese eine Erzeugung stellen sich 4 andere durch weitere 4 Kugelschaaren, die Centren bilden 4 Flächen aus den 4 übrigen Büscheln, die mit der aus dem ersten Büschel confocal sind [16]).

Die Durchschnittscurve einer Kugel und einer beliebigen Fläche 2ter Ordnung hat entweder keine reellen Punkte, oder besteht aus zwei paaren Zügen oder aus einem paaren Zuge.

Ist eine der Fundamentalkugeln ohne reelle Punkte, aber mit reellem Centrum, d, h. sind die Coefficienten reell, so ist die Durchschnittscurve ohne reelle Punkte, das Polartetraeder hat dann bekanntlich 4 reelle Ecken. Also haben die 4 übrigen Kugeln des Fundamentalsystems reelle Centren. Dann müssen 2 der 5 Kugeln conjugirt sein, d. h. im Centrum übereinstimmen und Radien der Form R resp. $i.R$ besitzen. Es ist also der Mittelpunkt der Ausgangskugel ohne reelle Punkte zugleich der Mittelpunkt einer zweiten Kugel des Orthogonalsystems mit reellen Punkten. Da in diesem Falle 3 der Ebenen des Polartetraeders durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, so fällt die vierte Ebene des Tetraeders mit der unendlich fernen Ebene zusammen, und weiterhin wird das Fünfkugelsystem aus 3 orthogonalen Ebenen und 2 Kugeln gebildet, die ihre Mittelpunkte im Schnittpunkte jener 3 Ebenen haben, deren Radien aber von der Form R, beziehentlich $i.R$ sind.

Da in diesem Falle alle 5 Polartetraeder reelle Ecken besitzen, so bestehen die 5 Durchschnittscurven der 5 Kugeln mit den 5 Deferenten entweder aus je 2 paaren Zügen oder sind Curven ohne reelle Punkte. Diese 5 Curven sind die Focalcurven des Cyklidensystems, 2 von ihnen sind reell und bestehen also aus je 2 paaren Zügen, 3 dagegen haben keine reellen Punkte.

Das orthogonale Fünfkugelsystem kann aber auch so beschaffen sein, dass 3 Kugeln reelle Punkte besitzen, 2 Kugeln dagegen nur imaginäre Punkte und dabei conjugirt imaginäre Centren. (Die

---

16) Diese Flächen, die den Ort für die Centren der doppelt berührenden Kugeln bilden, nennt Herr Darboux „Deferenten".

Digitized by Google

Gleichungen der letzteren haben alsdann keine reellen Coefficienten, sondern letztere haben conjugirt imaginäre Werte.).

Gehen wir in diesem Falle von einer der reellen Kugeln aus, so erhalten wir ein Polartetraeder mit 2 reellen und 2 conjugirt imaginären Ecken. Die Durchschnittscurve mit der entsprechenden deferenten Fläche besteht demnach bei allen 3 reellen Kugeln jedesmal aus einem paaren Zug mit reellen Punkten, es sind also 3 Focalen des Cyklidensystems reell und bestehen aus einem paaren Zug. In diesem Falle hat die Gleichung der Flächenschaar 2ten Grades, bezogen auf das kanonische System 2), keine reellen Coefficienten mehr, in der Gleichung 4) sind jetzt $2a_i$ conjugirt imaginär ebenso wie die entsprechenden $2x_i$. Es gehen jetzt nicht mehr durch jeden Punkt des Raumes 3 reelle Flächen der Schaar, sondern nur durch die im Innern der Kugel gelegenen Punkte. Nun bildet sich aber das Innere der Kugel auf den gesammten Cyklidenraum ab; es gehen also trotzdem im Cyklidenraum durch jeden reellen Punkt im Raume 3 reelle Flächen des confocalen Cyklidensystems hindurch. Die Cykliden des confocalen Systems haben in diesem Falle aber eine wesentlich andere Gestalt als in dem, wo nur eine der Kugeln ohne reelle Punkte war. Die Cykliden sind in diesem Falle durchweg einteilig, der Schnitt mit einer Symmetrieebene liefert ein Curvensystem, wie es sich bei Herrn Holzmüller [17]) gezeichnet findet.

II. Capitel.

Gestaltliche Verhältnisse der Cykliden.

§ 1. *Hauptformen.*

Betrachten wir im Raum der Flächenschaar 2ten Grades die Fundamentalkugel, oder irgend eine andere Fläche der Schaar als Fundamentalfläche der Massbestimmung [18]), so stellt die Flächenschaar in dieser Massbestimmung ein dreifach orthognoales Flächensystem dar. Durch jeden reellen Punkt gehen 3 reelle Flächen der

---

17) „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften", Taf. 64. u. 66. Man vergl. auch Siebeck, Cr. Journ., Bd. 57., p. 359., Bd. 59., p. 173.

18) Cayley war der erste („Sixth Memoir upon Quantics", Phil. Transactions Bd. 149., 1859) der zu der Auffasssung gelangte, das „Mass" nicht dem Gebilde anhaften zu lassen, sondern es darzustellen als Beziehung zu einem zweiten Gebilde. Man vergleiche auch Klein: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", Math. Annalen Bd. 4., p. 573., Bd. 6., p. 112.

Schaar, und diese schneiden sich jeweils in den Krümmungslinien im erweiterten Sinne des Wortes.

Beschränken wir uns jetzt ausserdem auf den Fall, wo alle Polartetraeder 4 reelle Ecken besitzen, wo also nur eine Kugel ohne reelle Punkte ist, aber reelle Coefficienten hat, und greifen die Flächenschaar heraus, die zu der letzteren Kugel gehört, so besitzt diese Flächenschaar die grösste Aehnlichkeit mit einem gewöhnlichen confocalen System, bei welchem der Kugelkreis zur Flächenschaar gehört; namentlich sind die Realitätsverhältnisse vollkommen übereinstimmend.

Nehmen wir die Ausgangsfläche 2ten Grades zudem so an, dass ihr Mittelpunkt mit dem der in Rede stehenden Kugel übereinstimmt, so besteht das Polartetraeder aus den 3 sich rechtwinklig schneidenden Hauptebenen im Verein mit der unendlich fernen Ebene.

Setzen wir in 4)

8) $$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

so erhalten wir bekanntlich für

I. $a_1 > \lambda > a_2$ Zweischalige Hyperboloide
$\lambda = a_1$ Focalhyperbel in der Ebene $x_2 = 0$.

II. $a_2 > \lambda > a_3$ Einschalige Hyperboloide
$\lambda = a_3$ Focalellipse in der Ebene $x_3 = 0$.

III. $a_3 > \lambda > a_4$ Ellipsoide.

Der Verlauf der Krümmungslinien im projectiven Sinne auf einer Fläche der Schaar ist in diesem Falle vollständig analog wie im Fall eines gewöhnlichen confocalen Systems; auch jetzt giebt es auf jedem Ellipsoid und jedem 2schaligen Hyperboloid die bekannten Singularitäten in den den Nabelpunkten des gewöhnlichen confocalen Systems entsprechenden Punkten, den Durchschnittspunkten mit den Focalcurven.

Diese Analogie hört aber auf, sobald wir eine Flächenschaar betrachten mit einem Polartetraeder, von dem 2 Ecken und 2 Ebenen conjugirt imaginär sind.

Wir wollen zu gleicher Zeit erwähnen, dass, wofern wir allgemeinste Flächenschaaren 2ten Grades betrachten würden, also statt der zu Grunde gelegten Kugel eine beliebige Fläche 2ten Grades nehmen, die besprochene Transformation uns auf ein System von

Digitized by Google

Flächen 4ter Ordnung mit einer gemeinsamen Doppelcurve 2ten Grades von allgemeinem Charakter führen würde. Die Sätze über Cyklide und Cyklidensystem sind also auch von hier aus einer sofortigen Erweiterung auf Flächen 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt und Systemen von solchen Flächen fähig. (cf. Einleitung p. 193.).

Durch die gegebene Transformation gehen die 3 Coordinatenebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, die den Mittelpunkt gemeinschaftlich enthalten, in sich über; wir wollen sie, als Kugeln mit unendlich grossem Radius betrachtet, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ nennen. Die unendlich ferne Ebene verwandelt sich in eine Kugel mit endlichem reellen Radius $s_4 = 0$, die ihren Mittelpunkt im Schnittpunkt jener 3 Ebenen besitzt.

Jede Fläche der Flächenschaar 2ten Grades mit reellen Punkten geht durch die Transformation in eine Cyklide derselben Eigenschaft über. Wir geben zunächst eine übersichtliche Zusammenstellung der verschiedenen Formen:

I. $a_1 > \lambda > a_2$ Zweischalige Cykliden (Schalen auseinander)
Grenzwerte $\lambda = a_1$ $\lambda = a_2$
Grenzflächen $s_1 = 0$ $s_2 = 0$
In $s_2 = 0$ liegt eine reelle Focalcurve.

II. $a_2 > \lambda > a_3$ Ringförmige Cykliden
Grenzwerte $\lambda = a_2$ $\lambda = a_3$
Grenzflächen $s_2 = 0$ $s_3 = 0$
In beiden Grenzflächen reelle Focalcurven.

III. $a_3 > \lambda > a_4$ Zweischalige Cykliden (Schalen ineinander)
Grenzwerte $\lambda = a_3$ $\lambda = a_4$
Grenzflächen $s_3 = 0$ $s_4 = 0$
In $s_3 = 0$ eine reelle Focalcurve.

IV. $a_4 > \lambda > a_1$ Cykliden ohne reelle Punkte.

Die Grenzflächen werden von den Focalcurven begrenzt, von denen also 2, auf $s_2 = 0$ und $s_3 = 0$ gelegen, reell sind.

I. Zweiteilige Cykliden mit auseinander ligenden Schalen.

$$a_1 > \lambda > a_2.$$

Diese Cykliden beginnen mit der doppelt überdeckten Ebene $s_1 = 0$ und hören auf mit dem von der in $s_2 = 0$ verlaufenden

lemniskatischen Focalcurve begrenzten inneren Teile von $s_2 = 0$. Dazwischen legen sich die übrigen Flächen, immer eine von der folgenden umschlossen. (Siehe Fig. 1.).

II. Ringförmige Cykliden.

$$a_2 > \lambda > a_3.$$

Diese Cykliden beginnen mit dem doppelt überdeckten, von der genannten Focalcurve begrenzten äussern Teile von $s_2 = 0$ und endigen für $\lambda = a_3$ mit dem doppelt überdeckten, von der Focalcurve daselbst begrenzten innern Teile von $s_3 = 0$. (Siehe Fig. 1.). Die Gestalten der zwischen liegenden Cykliden kann man sich, von der zuletzt genannten Grenzfläche ausgehend vorstellen, indem man letztere sich immer mehr aufblähen lässt, doch so, dass 2 Einschnürungen in $s_2 = 0$ sich einstellen. Hier wächst der verticale Symmetrieschnitt langsam bis zur lemniskatischen Focalcurve als oberen Grenze.

III. Zweiteilige Cykliden mit ineinander liegenden Schalen.

$$a_3 > \lambda > a_4.$$

Diese Cykliden beginnen mit dem nicht schraffirten doppelt überdeckten Teile von $s_3 = 0$ (siehe Fig. 2.) und gehen alsdann über in Flächen, deren eine Schale die andere umschliesst. Die Schalen nähern sich, je mehr λ abnimmt, immer mehr und mehr und fallen für $\lambda = a_4$ zusammen, indem sie alsdann die Kugel $s_4 = 0$ in ihrer vollen Ausdehnung doppelt überdecken; natürlich muss dann die Focalcurve auf dieser Grenzfläche ohne reelle Punkte sein.

§ 2. *Krümmungslinien.*

Die Krümmungslinien (im projectiven Sinne) der Flächenschaar 2ten Grades verwandeln sich durch unsere Transformation in die Krümmungslinien der Cykliden des confocalen Systems im gewöhnlichen Sinne des Wortes, da ja das Cyklidensystem ein dreifach orthogonales Flächensytem ist. Auf jeder Cyklide der Schaar werden die Krümmungslinien von Cykliden ausgeschnitten, die den beiden noch übrigen Hauptarten mit reellen Punkten angehören. Durch jeden Punkt der herausgegriffenen Cyklide gehen infolgedessen 2 Krümmungslinien, die auf einander senkrecht stehen. Sie sind im Allgemeinen von der 8ten Ordnung; nur die 5 Schnitte mit den Kugeln des Fundamentalsystems ergeben Curven 4ter Ordnung (vom Geschlecht 1); auf den ringförmigen Cykliden sind 4 dieser Curven reell, auf den übrigen Cykliden nur 3. 2 Krümmungslinien 8ter

Ordnung schneiden sich in 16 Punkten. — Diese sind sämmtlich reell, wenn die Krümmungslinien von verschiedener Art sind, dagegen sämmtlich imaginär bei Krümmungslinien derselben Art.

Die gestaltlichen Verhältnisse dieser Curven veranschaulichen am besten die Figuren (siehe Fig. 2., 3., 4.; die ringförmige Cyklide, Fig. 3., ist schematisch als Ring gezeichnet.)

§ 3. *Geodätische Linien.*

Bei der eingeführten projectiven Massbestimmung im Raum der Flächenschar 2ten Grades bleiben die Geraden natürlich geodätische Linien; das Linienelement derselben wollen wir mit $d\sigma$ bezeichnen.

Durch die in Rede stehende Transformation nun, welche die Geraden in Orthogonalkreise zur Fundamentalkugel überführt, transformirt sich das Linienelement $d\sigma$ in

$$d\Sigma = \frac{ds}{S}$$

wo ds das Linienelement in gewöhnlicher Massbestimmung und S die Potenz des in Betracht gezogenen Punktes in Bezug auf die Fundamentalkugel bedeutet; dieses $d\Sigma$ ist das Linienelement eines Orthogonalkreises zur Fundamentalkugel [19]).

Die projective Massbestimmung des ersten Raumes, die sich bei Collineationen reducirt, wird damit übergeführt in eine Massbestimmung, die sich einer Transformation durch reciproke Radien gegenüber covariant verhält — bei letzterer gehen ja Kugeln wiederum in Kugeln, Kreise in Kreise, Kugelenveloppen in Kugelenveloppen über. In dieser Massbestimmung werden alsdann die geodätischen Linien durch jene Orthogonalkreise vertreten. Diese Massbestimmung wollen wir eine anallagmatische nennen [20]).

---

19) cf. Darboux, a. a O. p. 231., p. 217.

20) Die Geometrie in dieser Massbestimmung ist unabhängig von Darboux betrachtet worden von Beltrami: Teoria fondam. degli spazii di curvatura const. Ann. d. Mat. 2. S. 2. B. und im Anschluss daran von Killing: „Ueber 2 Raumformen mit const. pos. Krümmg.“ Bd. 86. des Cr. J. Wir wollen noch erwähnen, dass in neuester Zeit namentlich Herr Poincaré in seinen Publicationen in den Acta Math. von der gedachten Massbestimmung ausgedehnten Gebrauch macht, wenn auch zumeist im Raum von 2 Dimensionen und mit der Modification, dass bei ihm der Fundamentalkreis die Axe der reellen Zahlen ist.

„Entsprechend dem Fundamentalsatz der projectiven Massbestim-„mung ist alsdann die Entfernung 2er Punkte definirt als der Loga-„rithmus des Doppelverhältnisses der gegebenen 2 Punkte mit den „Schnittpunkten des hindurchgelegten Orthogonalkreises mit der „Fundamentalkugel."

Fixiren wir in der vorgeführten Weise die Massbestimmungen in unsern beiden Räumen, so können wir den Satz aussprechen:

„Geodätische Linien verwandeln sich durch die Darboux'sche „Transformation wiederum in geodätische Linien."

Sind uns 2 confocale Flächen 2ten Grades gegeben, so wissen wir, dass die gemeinsamen Tangenten an die beiden Flächen geodätische Linien auf den Flächen umhüllen. Den gemeinsamen Tangenten an die confocalen Flächen 2ten Grades (confocal im projectiven Sinne) entsprechen je 2fach berührende Kreise an die entsprechenden 2 confocalen Cykliden; diese umhüllen also in der definirten anallagmatischen Massbestimmung ebenfalls geodätische Linien auf den Cykliden.

III. Capitel.

Das Abel'sche Theorem für überall endliche Integrale und seine Bedeutung für Flächenschaar 2ten Grades und Cyklidensystem.

§ 1. *Die Congruenz der gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen.*

Greift man aus der Schaar der Flächen 2ten Grades ein Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$ und ein einschaliges Hyperboloid $\mu = \mu_0$ heraus, (wir beschränken uns hierbei auf den in Cap. II. § 1. zuerst angeführten Hauptfall, für welchen die Realitätsverhältnisse dieselben sind wie beim gewöhnlichen confocalen System) und beschränkt man die Variabilität der 3 elliptischen Parameter ν, μ, λ eines Raumpunktes dergestalt, dass

1) $$a_1 > \nu > a_2 \quad \mu_0 > \mu > a_3 \quad \lambda_0 > \lambda > a_4$$

ist, d. h. zieht man diejenigen reellen Punkte allein in Betracht, von welchen aus sich 4 reelle Tangenten an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 legen lassen, so zeigt Herr Staude in der bereits genannten Habilitationsschrift p. 22, dass die Congruenz 4ter Ordnung und Classe der gemeinsamen reellen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 dargestellt wird durch das simultane System von Differentialgleichungen:

2) $$\begin{cases} \dfrac{d\lambda}{\Lambda} - \dfrac{d\mu}{M} + \dfrac{d\nu}{N} = 0 \\ \dfrac{\lambda d\lambda}{\Lambda} - \dfrac{\mu d\mu}{M} + \dfrac{\nu d\nu}{N} = 0 \end{cases}$$

wo

Digitized by Google

$$3)\quad \begin{cases} \Lambda = \sqrt{(a_1-\lambda)(a_2-\lambda)(a_3-\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\lambda-a_4)(\mu_0-\lambda)} \\ M = \sqrt{(a_1-\mu)(a_2-\mu)(\mu-a_3)(\mu-a_4)(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)} \\ N = \sqrt{(a_1-\nu)(\nu-a_2)(\nu-a_3)(\nu-a_4)(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)} \end{cases}$$

und $\frac{d\lambda}{\Lambda}, \frac{d\mu}{M}, \frac{d\nu}{N}$ sämmtlich dasselbe Vorzeichen besitzen.

„Die Gleichungen 2) sind aber nichts anderes als das Abel'sche „Theorem für die überall endlichen Integrale vom Geschlecht $p = 2$."

Die Fortschreitungsrichtung von einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ zu einem Nachbarpunkte $\lambda + d\lambda, \mu + d\mu, \nu + d\nu$ giebt also die Richtung einer gemeinsamen Tangente T an die Flächen λ_0 und μ_0, wenn die Differentiale $d\lambda, d\mu, d\nu$ den Gleichungen 2) genügen mit einer der 4 verschiedenen Combinationen in den Vorzeichen der Verhältnisse der Quadratwurzeln Λ, M, N.

In diesem Sinne gehört jedem durch seine Endpunkte λ, μ, ν und $\lambda + d\lambda, \mu + d\mu, \nu + d\nu$ charakterisirten Linienelemente einer solchen Tangente T eine bestimmte Combination in den Vorzeichen der Verhältnisse der Quadratwurzeln Λ, M, N zu. Man kann aber darüber hinaus dem Elemente der Tangente eine bestimmte Combination der Vorzeichen der Quadratwurzeln Λ, M, N selbst zuordnen, wenn man über das Vorzeichen einer der letzteren eine bestimmte Festsetzung macht.

Lässt man den Anfangspunkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Elementes längs der betreffenden Tangente T stetig fortlaufen, so werden sich die den successiven Elementen zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, N stetig ändern und ihre Vorzeichen beibehalten, so lange keines der Differentiale $d\lambda, d\mu, d\nu$ sein Vorzeichen wechselt. Es liegen aber auf jeder Tangente 6 Punkte, in denen ein derartiger Zeichenwechsel stattfindet, nämlich die beiden Berührungspunkte der Tangente mit den Flächen λ_0 und μ_0 und die 4 Schnittpunkte mit den Ebenen des Coordinatentetraeders, auf welches die Gleichung der Flächenschaar bezogen ist. Diese 6 Punkte sind durch die Werte

$$\lambda = a_4,\ \lambda = \lambda_0;\quad \mu = a_3,\ \mu = \mu_0;\quad \nu = a_2,\ \nu = a_1$$

je einer der elliptischen Coordinaten charakterisirt, und es bilden die Wertepaare

$$a_4\,\lambda_0;\quad a_3\,\mu_0;\quad a_2\,a_1$$

nach den Ungleichungen 1) zugleich die Grenzen, innerhalb deren die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν eines Punktes einer reellen Tangente der beiden Flächen λ_0 und μ_0 sich bewegen.

„Wenn also der Anfangspunkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Elementes ds „der Tangente T die ganze im Unendlichen geschlossen gedachte Tan„gente durchläuft, so wechselt jede der zugehörigen Wurzelfunctionen „Λ, M, N zweimal das Vorzeichen."

Nun nimmt auch jede der Variabeln λ, μ, ν längs der Tangente jeden der ihr durch die Ungleichungen 1) zugewiesenen Wert je zweimal an; es unterscheiden sich aber zwei Stellen, in denen die Variabele den nämlichen Wert hat, durch das Vorzeichen der zugehörigen Quadratwurzel resp. Λ, M oder N. Jeder Punkt liegt nun auf 4 solchen Tangenten, die durch ihn hindurch gehen, es gehören ihm also 4 durch ihre Vorzeichen allein verschiedene Systeme Λ, M, N zu; einer der Wurzelfunctionen (Herr Staude wählt N dazu) können wir ein bestimmtes für alle 4 Tangenten gleiches Vorzeichen zuerteilen; dann haben die 4 zu einem Punkt gehörigen Tripel Λ, M, N die Vorzeichen:

$$++\varepsilon; \quad -+\varepsilon; \quad +-\varepsilon; \quad --\varepsilon.$$

Bei Herrn Staude ist $\varepsilon = +$ oder $= -$, je nachdem $x_1 . x_2$ positiv oder negativ ausfällt.

§ 2. *Die Congruenz der Doppelberührungskreise zweier confocaler Cykliden.*

Um die Resultate des vorigen Paragraphen auf den Cyklidenraum zu übertragen, wollen wir zunächst bemerken, dass, wie im Raum der Flächenschaar jeder Punkt durch die Parameter λ, μ, ν der 3 durch ihn hindurchlaufenden reellen Flächen 2ter Ordnung der Schaar bestimmt wird, im Cyklidenraum jedes Punktpaar, das conjugirt ist in Bezug auf $x_0 = 0$ (d. h. nur im Vorzeichen der Coordinate x_0 verschieden ist[21]) bestimmt ist durch die 3 Parameter λ, μ, ν der durch dasselbe hindurchlaufenden 3 Cykliden mit reellen Punkten, und zwar bestimmt auch hier ein Werttripel $\lambda\mu\nu$ 8 solche Punktpaare.

Offenbar stellen die Gleichungen 2) jetzt die Differentialgleichungen der jede von 2 Flächen des Systems doppelt berührenden Kreise dar, und zwar sind diese Flächen eine Cyklide vom Typus 3 (2schalig, Schalen in einander) und eine vom Typus 2 (ringförmig).

Beschränken wir auch jetzt die Variabilität der Parameter durch die Ungleichungen 1), so gehen wieder durch jedes Punktpaar des durch 1) beschränkten Raumes 4 reelle Kreise, die jede der 2 gege-

---

21) Ein solches Punktpaar liegt natürlich harmonisch zu den Schnittpunkten seiner Verbindungslinie mit der Fundamentalkugel $x_0 = 0$.

benen Flächen λ_0 und μ_0 in zwei in Bezug auf $s_0 = 0$ conjugirten Punkten berühren.

Genügen also die Differentiale

$$d\lambda, \quad d\mu, \quad d\nu$$

den Gleichungen 2), so geben uns die Fortschreitungsrichtungen von einem Punktpaare $(PP') = (\lambda, \mu, \nu)$ zu einem Nachbarpunktpaare $(\lambda + d\lambda, \mu + d\mu, \nu + d\nu)$ die Richtungen der gemeinsamen Doppelberührungskreise an die Flächen λ_0 und μ_0 in dem in Betracht gezogenen Punktpaare; die 4 Richtungen, die von je einem Punkte des Paares auslaufen, sind untereinander unterschieden durch die Vorzeichen der Verhältnisse der Wurzelfunctionen Λ, M, N. Jeder der 4 Richtungen, die von dem betrachteten Punktpaare (PP') auslaufen, gehört eine bestimmte Combination der Vorzeichen zu. Giebt man wiederum N ein festes Vorzeichen ε ($\varepsilon = +$ oder $= -$, jenachdem $s_1 . s_2$ positiv oder negativ ist), so sind die 4 Richtungen der durch das Punktpaar (PP') hindurchlaufenden Kreise der betrachteten Congruenz individualisirt durch die Vorzeichencombinationen

$$++\varepsilon; \quad -+\varepsilon; \quad +-\varepsilon; \quad --\varepsilon.$$

Das erste Vorzeichen in jedem Tripel bezieht sich auf Λ, das zweite auf M.

Betrachten wir jetzt einen einzelnen der 4 Kreise, die durch das Punktepaar $(PP') = (\lambda, \mu, \nu)$ gehen.

Wir lassen wiederum das Punktpaar (PP') längs des ganzen Doppelberührungskreises stetig fortlaufen; es werden sich dann die den successiven Elementen zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, N stetig ändern und ihre Vorzeichen nur wechseln mit resp. $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ zusammen. Ein Zeichenwechsel dieser Grössen findet aber auf besagtem Kreise allein in 6 Punktepaaren statt, (jedes Punktepaar ist conjugirt in Bezug auf die Fundamentalkugel $s_0 = 0$).

Diese 6 Punktepaare sind charakterisirt durch die Werte je einer der cyklidischen Coordinaten

$$\lambda = a_4, \ \lambda = \lambda_0; \quad \mu = a_3, \ \mu = \mu_0; \quad \nu = a_2, \ \nu = a_1,$$

wo wiederum die Wertepaare

$$a_4, \ \lambda_0; \quad a_3, \ \mu_0; \quad a_2, \ a_1$$

die Grenzen bilden, innerhalb deren die cyklidischen Coordinaten resp. λ, μ, ν eines Punktepaares eines reellen Doppelberührungskreises der beiden Flächen λ_0 und μ_0 sich bewegen.

Wir haben demnach den Satz:

„Wenn ein Punktpaar $(PP') = (\lambda, \mu, \nu)$, das conjugirt ist in „Bezug auf $s_0 = 0$, einen Doppelberührungskreis dergestalt durchläuft, „dass jeder Punkt des Paares einen Halbkreis[22]) beschreibt, indem „P bis P', P' in derselben Richtung bis P geht, so wechselt jede der „zugehörigen Wurzelfunctionen Δ, M, N auf jedem Halbkreis zwei„mal das Vorzeichen."

Wir brauchen darum immer nur den einen Halbkreis in Betracht zu ziehen; auf dem andern haben wir nur eine genaue Wiederholung dessen, was auf dem ersteren geschieht; jeder Punkt des ersten Halbkreises hat seinen Gegenpunkt auf dem 2ten Halbkreis, den 4ten harmonischen zu dem gegebenen und den beiden Schnittpunkten des Kreises mit der Fundamentalkugel. Da nun diese Schnittpunkte in dem vorgeführten Falle (cf. Cap. II. § 1. p. 205) conjugirt imaginär ausfallen, so ist auch die Art und Weise der Aufeinanderfolge der einzelnen Punkte auf beiden Halbkreisen genau dieselbe.

Die 4 Doppelberührungskreise, die durch das Punktepaar (PP') oder $(\lambda\mu\nu)$ hindurchlaufen, lassen sich zu 3mal 2 Paaren gruppiren.

Nun gehen aber durch das Punktepaar λ, μ, ν auch 3 Kreise, die Normalkreise K_λ, K_μ, K_ν, welche Doppelberührungskreise an 2 der Flächen λ, μ, ν sind, während sie auf der 3ten noch übrigen senkrecht stehen, K_λ z. B. berührt die Flächen μ und ν je 2fach und steht ausser auf $s_0 = 0$ auch auf der Cyklide λ senkrecht im Punktepaare λ, μ, ν.

Im Anschluss an die Resultate, die Herr Staude p. 7. seiner Habilitationsschrift erhält, finden wir sodann, dass zu jedem der 3 Normalkreise eine Gruppirung der 4 durch das Punktpaar gehenden Doppelberührungskreise zu je 2 Paaren gehört. Jedes Paar bildet mit dem Normalkreis eine Normalkugel, sodass zu jedem Normalkreis 2 Normalkugeln gehören, und wir im Ganzen 6 Normalkugeln bekommen, die sich zu 3 Paaren ordnen. In Bezug hierauf gilt nun der Satz:

„Die 4 Doppelberührungskreise an die Flächen λ_0 und μ_0 durch „das Punktpaar (PP') oder $(\lambda\mu\nu)$ ordnen sich in Bezug auf jeden der „3 Normalkreise des Punktpaars in 2 Paare und zwar dergestalt, „dass bei jeder der 3 Anordnungen der bevorzugte Normalkreis den „Winkel eines jeden Paares auf der zugehörigen Normalkugel halbirt."

---

22) Die Bezeichnung „Halbkreis" bezieht sich auf die eingeführte anallagmatische Massbestimmung.

Zwei in Bezug auf einen der Normalkreise K_λ, K_μ, K_ν conjugirte Doppelberührungskreise unterscheiden sich bezüglich im Vorzeichen von Δ, oder von M, oder von Δ und M zugleich, da wir das Vorzeichen von N festgesetzt haben.

Bezeichnen wir die zum Punktepaar (PP') gehörigen 4 Doppelberührungskreise durch die zugehörigen charakteristischen Vorzeichencombinationen von Δ, M, N, (cf. p. 212.) und nennen die 3 Normalkugelpaare $S_\lambda + S_\lambda -$, $S_\mu + S_\mu -$, $S_\nu + S_\nu -$, so erhalten wir die Tabelle:

conjugirt in Bezug auf K_λ	$+ + \varepsilon$ $- + \varepsilon$	bilden $S_\lambda +$	$+ - \varepsilon$ $- - \varepsilon$	bilden $S_\lambda -$
conjugirt in Bezug auf K_μ	$+ + \varepsilon$ $+ - \varepsilon$	bilden $S_\mu +$	$- + \varepsilon$ $- - \varepsilon$	bilden $S_\mu -$
conjugirt in Bezug auf K_ν	$+ + \varepsilon$ $- - \varepsilon$	bilden $S_\nu +$	$+ - \varepsilon$ $- + \varepsilon$	bilden $S_\nu -$

§ 3. *Das Additionstheorem und seine geometrische Bedeutung.*

Die Differentialgleichungen der Congruenz der Doppelberührungskreise (cf. p. 209.) sind in der gemeinsamen Form enthalten:

$$4) \qquad \frac{\nu^{k-1}d\nu}{N} - \frac{\mu^{k-1}d\mu}{M} + \frac{\lambda^{k-1}d\lambda}{\Delta} = 0 \qquad k = 1, 2$$

Diese Differentialgleichungen wollen wir längs eines Doppelberührungskreises vom Punktpaar (PP') oder $(\lambda\mu\nu)$ bis zu dem Punktepaar (P_0P_0'), in welchem die Fläche λ_0 berührt wird, integriren. Das Resultat der Integration

$$5) \qquad 2\int_{\nu N}^{\nu' N'} \frac{\nu^{k-1}d\nu}{N} - 2\int_{\mu M}^{\mu' M'} \frac{\mu^{k-1}d\mu}{M} + 2\int_{\lambda \Delta}^{\lambda_0, 0} \frac{\lambda^{k-1}d\lambda}{\Delta} = 0 \qquad k = 1, 2$$

giebt 2 Relationen zwischen den cyklidischen Coordinaten ν, μ, λ und $\nu'\mu'$ der Punktepaare (PP') und (P_0P_0'). Die Integration ist für alle 3 Integrale in der Weise auszuführen, dass für jedes Punktpaar des betreffenden Kreises die demselben als einem Punktepaar dieses Tangentialkreises zugehörigen Wurzelfunctionen $NM\Delta$ einschliesslich ihrer Vorzeichen in Rechnung gezogen werden.

Zweien der Anfangselementenpaare der 4 gemeinsamen Doppelberührungskreise kommt ein positives, zweien ein negatives Vorzeichen von Δ zu. Längs $\widehat{PP_0}$, resp. $\widehat{P'P_0'}$ wechselt das Vorzeichen von Δ nicht; ob die Vorzeichen von N' und N und die von M' und M mit einander übereinstimmen oder nicht, das hängt davon ab, ob der

Bogen $\widehat{PP_0}$ — und natürlich auch $\widehat{P'P_0'}$ — die Ebenen $\nu = a_2$, $\nu = a_1$ und $\mu = a_3$ durchsetzt, resp. die Fläche $\mu = \mu_0$ berührt.

Löst man die gefundenen Relationen 5) zwischen $\lambda\mu\nu$ und $\mu'\nu'$ in der folgenden Weise auf:

$$6)\quad 2\int_{a_2}^{\nu' N'} \frac{\nu^{k-1}\,d\nu}{N} - 2\int_{a_3}^{\mu' M'} \frac{\mu^{k-1}\,d\mu}{M} - 2\int_{a_2}^{\nu N} \frac{\nu^{k-1}\,d\nu}{N} + 2\int_{a_3}^{\mu M} \frac{\mu^{k-1}\,d\mu}{M} - 2\int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} \frac{\lambda^{k-1}\,d\lambda}{\Lambda} = 0 \quad k = 1, 2$$

so erhält man das Resultat:

„Zwischen den cyklidischen Coordinaten $\nu'\mu'$ des Berührungs-„punktpaars (P_0P_0') einer der vier vom Punktpaar (PP') an die „beiden Flächen λ_0 und μ_0 laufenden gemeinsamen Doppelberührungs-„kreise mit der Fläche λ_0 einerseits und den cyklidischen Coordinaten „λ, μ, ν des Punktepaares (PP') andererseits bestehen die Relationen:

$$7)\quad \begin{cases} 2\int_{a_2}^{\nu, N} \frac{d\nu}{N} - 2\int_{a_3}^{\mu, M} \frac{d\mu}{M} + 2\int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} \frac{d\lambda}{\Lambda} = 2\int_{a_2}^{\nu', N'} \frac{d\nu}{N} - 2\int_{a_3}^{\mu', M'} \frac{d\mu}{M} \\ 2\int_{a_2}^{\nu, N} \frac{\nu d\nu}{N} - 2\int_{a_3}^{\mu, M} \frac{\mu d\nu}{M} + 2\int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\Lambda} = 2\int_{a_2}^{\nu', N'} \frac{\nu d\nu}{N} - 2\int_{a_3}^{\mu', M'} \frac{\mu d\nu}{M} \end{cases}$$

„wo N, M, Λ die dem Punktepaare (PP') und $N'M'$ die dem „Punktepaare (P_0P_0') als Punkten des betrachteten Kreises zugehörigen „zusammengesetzten Wurzelfunctionen bedeuten."

Dieser Satz enthält die geometrische Deutung des einfachen Additionsproblems, welches verlangt, bei gegebenen oberen Grenzen ν, μ, λ und gegebenen Vorzeichen von N, M, Λ die oberen Grenzen ν', μ' und die Vorzeichen von N', M' so zu bestimmen, dass von Periodenmultipla abgesehen die beiden Relationen 7) bestehen.

Die geometrische Lösung des Problems ist demnach die folgende:

Man fixirt auf der Fläche λ eines der Punktepaare $\nu\mu$, für welches die zugehörige Wurzelfunction N das gegebene Vorzeichen besitzt, und wählt unter den 4 durch dieses Punktpaar (PP') gehenden

gemeinsamen Tangentialkreisen der Flächen λ_0 und μ_0 denjenigen aus, dem im Punktepaar (PP') die gegebenen Vorzeichen von M und Δ zukommen. Die cyklidischen Coordinaten des Berührungspunktpaars $(\nu'\mu')$ mit der Fläche λ_0 sind die gesuchten oberen Grenzen und die dem Punktpaare als einem Punktpaare des in Rede stehenden Kreises zukommenden zusammengesetzten Wurzelfunctionen N' und M' sind die gesuchten Wurzelwerte N' und M'.

§ 4. *Schliessungssätze innerhalb der Congruenz der gemeinsamen Doppelberührungskreise zweier confocaler Flächen.*

Kreispolygone, welche den Flächen λ_0 und μ_0 umschrieben und einer Fläche λ gleichzeitig einbeschrieben sind.

Neben den Flächen λ_0 und μ_0 sei eine dritte Fläche $\lambda < \lambda_0$ gegeben, welche also von λ_0 umschlossen wird. Es sollen Kreispolygone betrachtet werden, welche den beiden Flächen λ_0 und μ_0 umschrieben und der Fläche λ einbeschrieben sind.

Den ersten Eckpunkt $P^{(0)}$ und mit ihm seinen Gegenpunkt $P^{(0)'}$ kann man auf λ beliebig wählen. Von den 4 durch sie hindurchgehenden Doppelberührungskreisen wählt man einen als Anfangsseite $S^{(1)}$ des Polygons; zugleich geht von $P^{(0)'}$ aus, auf demselben Kreise liegend, die Seite $S^{(1)'}$ aus und bildet mit den folgenden Kreisstücken ein 2tes Polygon. $S^{(1)}$ schneidet, nachdem die Fläche λ_0 berührt worden ist, die Fläche zum 2ten Male; der Schnittpunkt ist der zweite Eckpunkt $P^{(1)}$ des Polygons. Ebenso erhalten wir als Endpunkt von $S^{(1)}$ einen 2ten Eckpunkt $P^{(1)'}$ des conjugirten Polygons. Das 2te Seitenpaar $(S^{(2)}S^{(2)'})$ wählen wir unter den 3 gemeinsamen Kreisen, die neben $(S^{(1)}S^{(1)'})$ noch durch $(P^{(1)}P^{(1)'})$ hindurchgehen, so aus, dass $S^{(2)}$ conjugirt zu $S^{(1)}$, $S^{(2)'}$ conjugirt zu $S^{(1)'}$ in Bezug auf λ ist (cf. p. 213.).

Bei dieser Festsetzung, die auch für die folgenden Polygonseiten Geltung behalten soll, ist die Construction des Polygons eindeutig bestimmt, nachdem Anfangspunkt und Anfangsseite gegeben sind. Die beiden entstehenden Polygone — wir erhalten ja ein conjugirtes Polygon, dessen Seiten und Ecken durch Accente markirt sind — sind durch die Kugel $s_4 = 0$ von einander getrennt. Wir verfolgen ja immer die Richtung auf den Kreisen von λ bis λ_0, durchsetzen aber nie die Fläche $\lambda = a_4$. Es kann also keine Vereinigung der beiden Polygone zu einem stattfinden.

Es handelt sich nun gegenwärtig um die Frage, ob die bei der Polygonconstruction gegebenen Elemente, nämlich die Parameter λ_0, μ_0, λ der vorgelegten Flächen, sowie Anfangspunkt und Anfangs-

seite der Polygonconstruction so gewählt werden können, dass die Construction mit l Seiten sich schliesst, d. h. die Seite $S^{(l)}$ wieder in die Anfangsecke $P^{(0)}$ so einläuft, dass $S^{(l)}$ und $S^{(1)}$ conjugirt in Bezug auf λ sind.

Aus den Relationen 7) folgt durch wiederholte Anwendung offenbar die Bedingung:

8)
$$2l\int_{\lambda,\,\Lambda}^{\lambda_0}\frac{d\lambda}{\Lambda}-4m\int_{a_3}^{\mu_0}\frac{d\mu}{M}+4n\int_{a_2}^{a_1}\frac{dv}{N}=0$$

$$2l\int_{\lambda,\,\Lambda}^{\lambda_0}\frac{\lambda d\lambda}{\Lambda}-4m\int_{a_3}^{\mu_0}\frac{\mu d\mu}{M}+4n\int_{a_2}^{a_1}\frac{v dv}{N}=0$$

Denn die Variabeln μ und ν bewegen sich längs des Polygonumfangs stetig oscillirend zwischen den beiden Grenzen a_3 und μ_0, resp. a_2 und a_1 hin und her, und die Vorzeichen von M und N wechseln immer nur in diesen Grenzen. Demnach bezeichnet $2n$ die Anzahl der Durchgangspunkte durch jede der Ebenen $v = a_2$ und $v = a_1$, und $2m$ die Anzahl der Durchgangspunkte durch die Ebene $\mu = a_3$ und der Berührungspunkte des Polygonumfangs mit der Fläche μ_0.

Die Bedingungen 8) ergeben uns den Satz:

„Wenn ein den Flächen λ_0 und μ_0 umschriebenes und der Fläche „λ einbeschriebenes Polygon sich einmal mit l Seiten schliesst, so „schliesst es sich immer mit derselben Seitenzahl, wie auch der Anfangs„punkt und die Anfangsseite auf der Cyklide λ gewählt werden mag."

„Neben diesem einen Polygon erhalten wir alsdann stets noch „ein zweites, das die zweite Schale der Fläche λ_0 berührt und von „dem ersten Polygon durch $\lambda = a_4$ getrennt ist. Schliesst sich das „erste Polygon, so schliesst sich notwendig auch das zweite, zu dem „ersten conjugirte."

Natürlich werden keineswegs alle Polygone, die wir im Raum der Flächenschaar 2ten Grades betrachten, wenn wir sie auf den Cyklidenraum übertragen, 2 getrennte Polygone liefern; im allgemeinen Falle wird vielmehr ein einziges Polygon mit doppelter Seitenzahl entstehen. Gestatten wir nämlich unseren Polygonseiten im Raum der Flächenschaar 2ten Grades auch die 4te Ebene des Coordinatentetraeders $x_4 = 0$ zu durchsetzen (bei Herrn Staude fällt dieselbe mit der unendlich fernen Ebene zusammen), so durchsetzt unser Kreispolygon im Cyklidenraum die Kugel $s_4 = 0$, in der Bedingungs-

gleichung 8) tritt noch die Periode $\int_{a_1}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\Lambda}$ auf, und wir werden im Allgemeinen ein einziges Polygon mit doppelter Seitenzahl erhalten.

Leicht könnten wir nun die Zahl der Schliessungssätze beliebig vermehren, indem wir ähnlich wie Herr Staude in seiner Habilitationsschrift die gestellten Bedingungen variiren oder die von Doppeltangentialkreisen der Congruenz umhüllten geodätischen Linien der Flächen λ_0 und μ_0 in Betracht ziehen und geodätische Polygone uns bilden. Wir lassen uns aber an dem einen Beispiele genügen, da eine weitere Ausführung nichts principiell Neues zu Tage fördern würde.

Wir gehen auch nicht auf die Darstellung der Punkte und Kugeln, sowie der Kreise des Cyklidenraumes durch hyperelliptische, speciell ΘFunctionen und die Deutung der hauptsächlichen ΘRelationen selbst ein, sondern verweisen auf die vielfach genannte Schrift des Herrn Staude: Geometrische Deutung der Additionstheoreme etc. (22. B. der Annalen). Die dort gefundenen Resultate übertragen sich eben mit so geringen Modificationen auf den Cyklidenraum, dass es sich kaum verlohnen würde, die Untersuchung nochmals vorzuführen. Es mag also dieser Hinweis genügen, und wir gehen zum 2ten Teil über, die Cyklide in Beziehung zu setzen zur Kummer'schen Fläche

Inhaltsübersicht.

Einleitung . . . . . p. 193

I. Teil.
Flächenschaar 2ten Grades und Cyklidensystem.

I. Capitel.
Transformation der Flächenschaar 2ten Grades in ein confocales Cyklidensystem 199

II. Capitel.
Gestaltliche Verhältnisse der Cykliden.

§ 1. Hauptformen 204

§ 2. Krümmungslinien 207

§ 3. Geodätische Curven 208

III. Capitel.
Das Abel'sche Theorem für überall endliche Integrale und seine Bedeutung für Flächenschaar 2ten Grades und Cyklidensystem.

§ 1. Congruenz der gemeinsamen Tangenten 2er confocaler Flächen der Schaar 209

§ 2. Congruenz der Doppelberührungskreise 2er confocaler Cykliden 211

§ 3. Das Additionstheorem und seine geometrische Bedeutung 214

§ 4. Schliessungssätze innerhalb der Congruenz der gemeinsamen Doppelberührungskreise 2er confocaler Flächen 216

IX.

Miscellen.

1.

Zur Theorie des Winkelspiegels.

Durch das Studium der grösseren Abhandlung über den Winkelspiegel, welche mein Vater L. Mack unlängst in dieser Zeitschrift veröffentlicht hat, bin ich dazu gelangt, eine neue Formel zu finden, die unter allen Umständen dazu dient, schnell die Gesamtzahl S der Bilder zu bestimmen, welche ein in die Oeffnung des Winkelspiegels gebrachter leuchtender Punkt P hervorruft. Sie lautet:

$$S = \left[\frac{180^0 + S_1}{2\alpha}\right] + \left[\frac{180^0 + S_2}{2\alpha}\right]$$

2α ist der Oeffnungswinkel des Winkelspiegels, und S_1 und S_2 bedeuten diejenigen zwei Winkel, welche die aus der Axe des Winkelspiegels durch P gelegte Ebene mit den zwei Einzelspiegeln bildet. Jede der rechts vorkommenden Klammern soll bedeuten, dass für den von ihr eingeschlossenen Quotienten, mag er nun eine ganze Zahl oder ein Bruch sein, statt seines wahren Werts vielmehr die zunächst unter diesem liegende ganze Zahl zu nehmen sei. Von zwei etwa zusammenfallenden Bildern ist in dem Ausdruck für S jedes selbständig gezählt.

Sofern die Leser des Archivs an jene grössere Abhandlung sich erinnern oder nur die vier ersten §§ derselben nachlesen wollen, so ist mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungsweise die Herleitung der neuen Formel kurz anzugeben wie folgt.

Man betrachte zunächst diejenige Bilderreihe, die von dem Bilde P_1' ausgeht, und nur diejenigen weitern P_2'', P_3', P_4'', P_5'.... enthält, deren jedes von dem ihm nächst vorangehenden erzeugt wird. Für diese Bilder ist nun gemäss dem Hauptsatz des § 3. folgende Reihe von Winkelangaben zu machen:

$$\begin{aligned}
&\text{Wkl. } AOP_1' = \quad \varphi_1\\
&\text{Wkl. } BOP_2'' = 2\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } AOP_3' = 4\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } BOP_4'' = 6\alpha + \varphi_1\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Führt man jetzt vielmehr diejenigen Winkel ein, welche die Linien OP_1', OP_2'', OP_3', OP_4''.... mit der Mediane OM bilden, so erhält man statt obiger Reihe die neue:

I)
$$\left\{\begin{aligned}
&\text{Wkl. } MOP_1' = \quad \alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MOP_2'' = 3\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MOP_3' = 5\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MOP_4'' = 7\alpha + \varphi_1\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}\right.$$

Man bemerkt, dass jeder dieser Winkel um 2α grösser ist, als der ihm nächst vorangehende. Werden zugleich die den toten Raum betreffenden Angaben des § 4. berücksichtigt, so ist auch auf diesem Wege leicht zu beweisen, dass die Zahl der unter I) vorkommenden Bilder eine begrenzte ist.

Nun nehme man zu jedem der Bildpunkte P_1', P_3', P_5' P_7'...., welche alle hinter dem ersten Spiegel frei liegen, den bezüglich der Geraden MO mit ihm symmetrischen Punkt. Diese Hilfspunkte der Reihe nach mit Π_1', Π_3', Π_5', Π_7'.... bezeichnet, so hat man vermöge I) auch folgende Reihe:

II)
$$\left\{\begin{aligned}
&\text{Wkl. } MO\Pi_1' = \quad \alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MOP_2'' = 3\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MO\Pi_3' = 5\alpha + \varphi_1\\
&\text{Wkl. } MOP_4'' = 7\alpha + \varphi_1\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}\right.$$

Diese Reihe bietet den Vorteil, dass die in ihr aufgeführten Winkel alle nach einerlei Richtung von OM aus gerechnet sind.

Wird jetzt mit s_1 die Zahl der Bilder P_1', P_2'', P_3', P_4''.... bezeichnet, so ist dieselbe identisch mit der Zahl der Punkte P, Π, welche in der Reihe II) vorkommen. Man sieht ferner leicht (vergl. § 4. der grössern Abhandlung), dass kein Winkel dieser Reihe die Grösse des überflachen $MO\mathfrak{B}$ erreichen kann. Hienach ist bezüglich der Zahl s_1 zu schliessen: sie muss die grösste ganze Zahl sein, die der Ungleichung genügt

$$180^0 + \alpha > (2s_1 - 1)\alpha + \varphi_1$$

welche mit Beiziehung von φ_2 für $2\alpha - \varphi_1$ übergeht in

$$s_1 < \frac{180^0 + \varphi_2}{2\alpha}.$$

Sollte der Fall eintreten, dass ein letzter Punkt P_x'' der Reihe II) gerade noch in den Punkt $\mathfrak{B}$ fiele, so dürfte er nach § 4. als Bild nicht mehr gezählt werden und x wäre gegenüber von s_1 um Eins zu gross. Man hätte dann aber für diesen Punkt P_x''

$$180^0 + \alpha = (2x - 1)\alpha + \varphi_1 \text{ und } x = \frac{180^0 + \varphi_2}{2\alpha}.$$

In diesem Fall ergäbe sich der Quotient $(180^0 + \varphi_2) : 2\alpha$ als ganze Zahl, wie man auch durch geometrische Betrachtung leicht findet.

Demgemäss können wir schreiben

$$s_1 = \left[\frac{180^0 + \varphi_2}{2\alpha}\right]$$

in dem Sinne gemeint, dass für den eingeklammerten Quotienten, mag er ein Bruch oder eine ganze Zahl sein, die zunächst unter ihm befindliche ganze Zahl genommen werde.

Es ist nun leicht zu übersehen, dass für die bisher aus dem Spiel gelassenen Bilder P_1'', P_2', P_3'', P_4'...., welche alle von P_1'' abstammen, die den obigen Betrachtungen ganz analogen zutreffen, so dass demnach ihre Anzahl s_2 anzugeben ist durch die Gleichung

$$s_2 = \left[\frac{180^0 + \varphi_1}{2\alpha}\right]$$

wobei die Klammer rechts in demselben Sinne zu verstehen ist, wie oben.

Da die Gesamtzahl S der Bilder aus der Summe der von P_1' und der von P_1'' abstammenden besteht, so sind wir hiemit zu derjenigen Formel gelangt, welche am Anfang dieser Mitteilung angegeben ist.

Fallen zwei Bilder zusammen, was nur eintritt, wenn $360 : 2\alpha$ eine ganze gerade Zahl ist (vergl. § 13. der grössern Abh.), so sind dieselben, als die Schlussbilder der zwei von uns betrachteten Reihen, in dem Ausdruck für S nicht als Eines, sondern als zwei Bilder in Rechnung gezogen.

Stuttgart. Dr. Karl Mack.

2.

Beweis, dass auf einer algebraischen Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden ausser dieser nicht mehr als 16 Geraden liegen können.

Clebsch hat gezeigt[1]), dass jede algebraische Fläche 4. O. mit einer Doppelgeraden ausser dieser noch 16 Geraden enthält, welche sämtlich die Doppelgerade schneiden und sich zu 8 Paaren ordnen. Dass diese Geraden die einzigen sind, welche die Fläche enthalten kann, ohne zu zerfallen, wurde von ihm a. a. O. ebenfalls dargetan, jedoch nur in abzählender Weise auf Grund einer ebenen Abbildung der Fläche, sodass ein directer Beweis noch wünschenswert erscheint. Ich teile im Folgenden einen solchen mit; es werde ihm kurz der Nachweis der 8 Geradenpaare nach Clebsch vorausgeschickt, damit ich mich bequem darauf beziehen kann.

Die Gleichung einer Fläche der genannten Art hat die Form

$$A^2u + ABv + B^2w = 0, \tag{1}$$

wo $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ die Gleichungen von 3 Flächen 2. O., $A = 0$, $B = 0$ die Gleichungen von zwei Ebenen sind, welche sich in der Doppelgeraden schneiden. Die Fläche wird also erzeugt als Ort der Schnittcurven aller Flächen der Schaar

$$u + \lambda v + \lambda^2 w = 0 \tag{2}$$

mit den entsprechenden Ebenen des Büschels

$$B - \lambda A = 0. \tag{3}$$

Unter den Ebenen dieses Büschels befinden sich auch solche, welche die ihnen entsprechenden Flächen der Schaar 2) berühren d. h. in einem Geradenpaare schneiden. Die Zahl dieser Ebenen ist also die Zahl der Geradenpaare auf der Fläche; stellt man aber die betreffende Bedingungsgleichung für den Parameter λ in der bekannten Determinantenform auf, so findet man dieselbe vom Grade 8, wie behauptet.

Gesetzt nun, es gäbe ausser diesen 8 Geradenpaaren noch eine weitere Gerade s auf der Fläche. Dann ist zunächst aus der soeben zur Ermittelung der 8 Geradenpaare angestellten Ueberlegung klar, dass dieselbe die Doppelgerade nicht schneiden kann. Daraus ergiebt sich weiterhin, dass s notwendig wenigstens je eine Gerade aus den

---

1) Clebsch, Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der 4. und 5. Ordnung. Math. Annalen Bd. 1.

Digitized by Google

8 Geradenpaaren schneiden muss. Denn sind a und α zwei Geraden eines Paares, l die Doppelgerade, und man legt durch l diejenige Ebene, welche a und α enthält, so hat diese Ebene mit der Fläche ausser l, a und α keine weiteren Elemente mehr gemein; sie schneidet aber s in einem Punkte, welcher nicht auf l liegt, folglich auf a oder α, oder im Schnittpunkt beider liegen muss.

Nun seien a, b, c, d, e 5 Geraden aus den 8 Paaren, welche von von s geschnitten werden. Dann kann man durch a, b, c einerseits und durch c, d, e andererseits je eine Regelfläche 2. O. legen. Dieselben haben dann c, l und s gemein, schneiden sich also nur noch in einer Geraden f, welche l und s schneidet, c aber nicht, oder sie sind identisch. Letzteres würde nach sich ziehen, dass die 5 Geraden a, b, c, d, e von den unendlich vielen Geraden geschnitten werden, welche die andere Regelschaar der durch a, b, c, d, e gehenden Regelfläche bilden. Von diesen schneidet aber jede die Fläche 4. O. in 5 Punkten, gehört derselben also gänzlich an, die Fläche 4. O. würde also in dieser Regelfläche 2. O. und noch eine andere zerfallen.

Es bleibt daher nur der erstere Fall, dass sich die beiden Regelflächen in einer Geraden f schneiden, welche c nicht, wohl aber l und s trifft. Nun schneiden diese Regelflächen die Fläche 4. O. schon in 6 Geraden, nämlich in a, b, c, s und der doppelt gezählten l, resp. in c, d, e, s und l doppelt gezählt, haben also mit ihr nur noch je einen Kegelschnitt gemein; es müssten sich also diese beiden Kegelschnitte in denselben 4 Punkten schneiden, in welchen die Gerade f die Fläche 4. O. trifft, was nicht möglich ist — oder auch f gehört der Fläche an, ist also eine Gerade aus einem der noch übrigen Geradenpaare, und die beiden Kegelschnitte zerfallen in f und je eine weitere Gerade p oder q, welche beide l und s nicht schneiden, von denen aber etwa p die Geraden a, b, c, f, und q die Geraden d, e, c, f trifft. Es schneidet aber, wie oben bewiesen, jede dieser beiden Geraden p und q ebenso wie s im Ganzen wenigstens 8 Geraden aus den 8 Geradenpaaren, also z. B. p ausser a, b, c, f auch noch δ, ε, g, h. Die durch l, s und p gelegte Regelfläche 2. O. hat folglich mit der Fläche 4. O. im Ganzen s, p, a, b, c, δ, ε, g, h und die doppelt zählende Gerade l gemein d. h. sie ist ein Teil der Fläche 4. O., und diese zerfällt also auch in diesem nur noch übrigen Fall in 2 Regelflächen 2. O.

Oberehnheim im Els. Januar 1885. Alfred Leman.

X.

Die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionen.

Von

Paul Richard Domsch.

II. Teil.

Kummer'sche Flächen und Cykliden.

I. Capitel.

Die Kummer'sche Fläche und die Lie'sche Berührungstransformation.

§ 1. *Die Fundamentalgebilde in der Geometrie der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung.*

Indem wir die schon citirte Arbeit des Herrn Lie im 5 ten Band der Annalen: „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe" und die darin gegebene Berührungstransformation im wesentlichen als bekannt voraussetzen, bemerken wir zunächst, dass durch letztere 2 Räume in dreierlei Auffassung in Beziehung gesetzt werden.

Entweder man lässt Flächenelementen des einen Raumes Flächenelemente im andern entsprechen, wie es der Begriff der Berührungstransformation mit sich bringt, und zwar den Flächenelementen im ersten Raum r, die 2 consecutive Punkte einer Geraden enthalten, die Elemente der entsprechenden Bildkugel; es ist dies die vollkommenste, aber auch schwierigste Art und Weise, die beiden Räume r und R mit ihren Gebilden in einander zu transformiren, schwierig darum, weil bei derselben die beiden Räume als Aggregate von Flächenelementen aufgefasst werden müssen.

Unsere Lie'sche Berührungstransformation führt aber auch zweitens die dreifach unendlich vielen Punkte des einen Raumes r über in den Complex der Minimalgeraden in R, und drittens die Punkte des Raumes E in die Geraden von r, die einem ausgezeichneten linearen Complexe angehören [1]).

Diese beiden letzten Arten der Uebertragung werden wir der leichteren Behandlung wegen im Folgenden vorzugsweise zur Anwendung bringen, und zwar wechselsweise, indem wir einerseits von den Punkten des Raumes der Kummer'schen Fläche ausgehen, aber auch die Geraden des linearen Complexes in Betracht ziehen und diese in die Punkte des Cyklidenraumes transformiren.

Als Fundamentalgebilde [2]) treten in dem Raume r, welcher in den Cyklidenraum R abgebildet werden soll, zunächst die

6 Fundamentalcomplexe auf

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 0$$

Einen dieser 6 Fundamentalcomplexe, $x_6 = 0$ etwa, werden wir vor den übrigen auszeichnen, indem wir ihn zu demjenigen linearen Complex wählen, dessen Gerade sich in die Punkte, oder präciser ausgedrückt, in die Punktkugeln des andern Raumes abbilden.

Wir markiren demnach als erstes Ergebniss:

„Den Geraden des ausgezeichneten Fundamentalcomplexes entsprechen die Punktkugeln des Cyklidenraumes".

Es restiren noch die 5 übrigen Fundamentalcomplexe, welche unter sich und mit dem sechsten in Involution liegen; einem solchen mit dem ausgezeichneten Fundamentalcomplex in Involution liegenden Complex entspricht aber ein Kugelcomplex, ein Kugelgebüsch im Reye'schen Sinne [3]), ∞^3 Kugeln, welche sämmtlich orthognal zu einer durch sie vollständig bestimmten Kugel stehen, deren Centrum ihr

---

1) Die Abbildung eines linearen Complexes auf den Punktraum hatte vor Herrn Lie schon Herr Nöther gegeben („Zur Theorie der algebraischen Functionen", Göttinger Nachrichten, 1869). Dass jedoch beide Räume einen Complex enthalten, dessen Linien sich als die Punkte des 2ten Raumes abbilden, hat Herr Lie zuerst hervorgehoben.

2) Die Fundamentalgebilde der Kummer'schen Fläche — die 6 Fundamentalcomplexe und deren Combinationen zu je zweien, dreien und vieren — wurden behandelt von Herrn Klein: „Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades", Math, Annalen Bd. 2., p. 198.

3) cf. Reye, „Synthetische Geometrie der Kugeln u. lin. Kugelsysteme".

Potenzcentrum ist — ein Punkt, welcher in Bezug auf alle Kugeln des Gebüsches dieselbe Potenz besitzt —; das Quadrat des Radius jener Orthogonalkugel ist entgegengesetzt gleich dem Wert der Potenz des Potenzcentrums.

Zwei Gerade eines dieser 5 Complexe, die in Bezug auf $x_6 = 0$ conjugirte Gerade darstellen, transformiren sich in dieselbe Kugel; den Punkten der einen Geraden entspricht die eine imaginäre Erzeugendenschaar der Kugel, den Punkten der conjugirten Geraden die andere imaginäre Erzeugendenschaar. Wir erhalten also den Satz:

„Den Geraden der übrigen 5 Fundamentalcomplexe

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0$$

„entsprechen, zu je zweien als conjugirte Gerade in Bezug auf $x_6 = 0$ „zusammengenommen, die Kugeln von 5 zu einander orthogonalen „Kugelgebüschen. Die Kugeln jedes Gebüsches stehen senkrecht auf „einer durch sie bestimmten Orthogonalkugel. Diese Orthogonal„kugeln stehen infolgedessen selbst auf einander senkrecht und bilden „ein Fundamentalsystem".

Weiterhin treten als Fundamentalgebilde in dem abzubildenden Raume die 15 Congruenzen auf:

1a) $x_1 = 0 \quad x_6 = 0; \quad x_2 = 0 \quad x_6 = 0; \quad x_3 = 0 \quad x_6 = 0;$
$x_4 = 0 \quad x_6 = 0; \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 0$

1b)
$$\begin{cases} x_1 = 0 \; x_2 = 0; \; x_1 = 0 \; x_3 = 0; \; x_1 = 0 \; x_4 = 0; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_1 = 0 \; x_5 = 0 \\ x_2 = 0 \; x_3 = 0; \; x_2 = 0 \; x_4 = 0; \; x_2 = 0 \; x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \; x_4 = 0; \; x_3 = 0 \; x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \; x_5 = 0 \end{cases}$$

Auch diese teilen sich in die Untergruppen 1a) und 1b) von 5 resp. 10 Congruenzen, je nachdem $x_6 = 0$ mit auftritt oder nicht.

Den 5 ersten Congruenzen 1a) entsprechen, da $x_6 = 0$ sich in die Punktkugeln abbildet, 5 Schaaren von ∞^2 Punktkugeln des Cyklidenraumes, die je einem der $x_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots 5)$ entsprechenden Kugelcomplexe angehören. Die Punktkugeln eines Kugelcomplexes liegen aber sämmtlich auf der Orthogonalkugel und bilden dieselbe. Den 5 Congruenzen entsprechen also mit den 5 Punkt-

Digitized by Google

kugelbündeln 5 zu einander senkrechte Kugeln, welche von den Punktkugeln gebildet werden, also das Fundamentalsystem:

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0.$$

Wir haben demnach den Satz:

„Die 5 Congruenzen, die von dem ausgezeichneten Fundamental-„complexe verbunden mit je einem der übrigen 5 Fundamentalcom-„plexe gebildet werden, entsprechen die 5 Fundamentalkugeln des „Cyklidenraumes, resp. die Punktkugelcongruenzen, welche die 5 „Fundamentalkugeln bilden".

Den restirenden 10 Congruenzen, die wir unter 1b) aufführten, entsprechen 10 Kugelbündel, die orthogonal sind zu den 10 Kugelbüscheln:

$s_1 = 0\ s_2 = 0$, $s_1 = 0\ s_3 = 0$, $s_1 = 0\ s_4 = 0$, $s_1 = 0\ s_5 = 0$;
$s_2 = 0\ s_3 = 0$, $s_2 = 0\ s_4 = 0$, $s_2 = 0\ s_5 = 0$;
$s_3 = 0\ s_4 = 0$, $s_3 = 0\ s_5 = 0$;
$s_4 = 0\ s_5 = 0$.

Eine jede Kugel eines Bündels muss ja senkrecht stehen auf den Orthogonalkugeln der beiden das Bündel bestimmenden Kugelgebüschen, senkrecht stehen also auch auf den durch die beiden Orthogonalkugeln bestimmten Kugelbüschel. Wir erhalten so den weiteren Satz:

„Den 10 Congruenzen 1b) entsprechen 10 Kugelbündel, deren „Kugeln jeweils senkrecht stehen auf je zweien der 5 Orthogonal-„kugeln, also auch orthogonal sind zu den durch dieselben bestimmten „10 Kugelbüscheln".

Jetzt fassen wir je 3 der 6 Fundamentalcomplexe zusammen und erhalten 20 Tripel von Fundamentalcomplexen. Je ein Tripel liefert eine Erzeugung einer der 10 Fundamentalflächen 2ten Grades. Es gehören also je 2 Tripel zusammen, welche dieselbe Fundamentalfläche liefern:

(123) (456) (124) (356) (125) (346) (134) (256) (135) (246)
(234) (156) (235) (146) (245) (136) (345) (126) (145) (236).

Den 10 jedesmal zu zweit geschriebenen Tripeln, welche $x_6 = 0$ enthalten, entsprechen notwendigerweise Kugelbüschel, die nur aus Punktkugeln bestehen; sie müssen ausserdem den durch 2 der Fundamentalkugeln definirten 2 Kugelgebüschen angehören. Es sind also die Punktkugeln, welche die 10 Schnittkreise je zweier der 5 Fundamentalkugeln bilden.

Den Tripel

$$x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 0$$

entsprechen z. B. die Punktkugeln, welche den Kreis

$$s_4 = 0 \quad s_5 = 0$$

bilden.

Die andere Erzeugung nun, welche dieselbe Fundamentalfläche 2ter Ordnung liefert und definirt ist durch

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0,$$

diese einfach unendliche Schaar gerader Linien transformirt sich ebenso in eine ∞^1 Schaar von Kugeln, ein Kugelbüschel, gebildet von allen Kugeln, welche zugleich senkrecht stehen auf den Kugeln des Fundamentalsystems

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_3 = 0$$

$s_4 = 0$ und $s_5 = 0$ sind nun 2 Kugeln, die auf den 3 genannten senkrecht stehen; es wird also das durch

$$s_4 = 0 \quad s_5 = 0$$

definirte Kugelbüschel das gesuchte sein. Die 2te Erzeugung unserer herausgegriffenen Fundamentalfläche liefert also in anderer Auffassung allerdings denselben von 2 Fundamentalkugeln gebildeten Kreis wie die erste Erzeugung.

Wir sprechen das erhaltene Resultat folgendermassen aus:

„Den zweifachen Erzeugungsweisen der Fundamentalflächen 2ter „Ordnung entspricht durch die Berührungstransformation eine zwei-„fache Erzeugungsweise der 10 Fundamentalkreise, gebildet durch je „zwei der fünf Fundamentalkugeln. Das einemal werden die Kreise „durch die auf ihnen liegenden Punktkugeln, das anderemal durch „die Kugelbüschel erzeugt, deren Träger sie sind".

Jetzt bilden wir die 15 möglichen Quadrupel aus den 6 Fundamentalcomplexen, und zwar ordnen wir sie in 2 Gruppen zu 10 und 5, je nachdem sie $x_6 = 0$ enthalten oder nicht:

1a) (1236) (1246) (1256) (1346) (1356)
(1456) (2346) (2356) (2456) (3456)

1b) (1234) (1235) (1245) (1345) (2345).

Je 4 der Fundamentalcomplexe haben 2 Gerade gemein; diese bilden die Directricen der Congruenzen, welche jeweils gebildet werden

aus den noch übrigen 2 Fundamentalcomplexen, (1236) liefert also z. B. die Directricen der Congruenz

$$x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad \text{etc.}$$

Die durch die ersten 10 Quadrupel 1a) definirten 20 Geraden gehören nun sämmtlich dem ausgezeichneten Fundamentalcomplex $x_6 = 0$ an; jede der 20 liefert also für sich eine Kugel, und zwar eine Punktkugel, welche jedesmal dreien der durch die Fundamentalkugeln definirten Gebüschen angehört. Als Punktkugel liegt sie demnach auf der jedesmaligen Orthogonalkugel des Gebüsches. Je 2 zusammengehörige Punktkugeln werden also gebildet von den beiden Punkten, welche je dreien der Fundamentalkugeln gemeinsam sind.

Wir bekommen demnach diesen ersten 10 Directricenpaaren entsprechend die 10 Punktkugelpaare:

2a)
$$\begin{array}{llllll} s_1{=}0\ s_2{=}0\ s_3{=}0 & s_1{=}0\ s_2{=}0\ s_4{=}0 & s_1{=}0\ s_2{=}0\ s_5{=}0 \\ s_1{=}0\ s_3{=}0\ s_4{=}0 & s_1{=}0\ s_3{=}0\ s_5{=}0 & s_1{=}0\ s_4{=}0\ s_5{=}0 \\ s_2{=}0\ s_3{=}0\ s_4{=}0 & s_2{=}0\ s_3{=}0\ s_5{=}0 & s_2{=}0\ s_4{=}0\ s_5{=}0 \\ & s_3{=}0\ s_4{=}0\ s_5{=}0. \end{array}$$

Jetzt restiren noch die 5 Directricenpaare 1b).

Jedes dieser Paare bildet 2 in Bezug auf $x_6 = 0$ conjugirte Gerade, ein Directricenpaar bildet sich also auf eine Kugel ab, und wie die 5 Directricenpaare je 4 der Fundamentalcomplexe angehören müssen, so muss die entsprechende Kugel jeweils vieren der entsprechenden Kugelgebüsche angehören.

Vier zu einander orthogonale Kugelgebüsche haben aber nur eine einzige Kugel gemein, es ist dies die eine Kugel, welche zu ihren 4 Orthogonalkugeln selbst orthogonal ist, also jedesmal die 5 te Orthogonalkugel des Fundamentalsystems.

Den Directricenpaaren 1b) entsprechen so der Reihe nach je 2 Erzeugungsweisen der Fundamentalkugeln:

2b) $$s_5 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_3 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_1 = 0.$$

Wir kleiden das Resultat in Worte:

„Die 15 vorhandenen Directricenpaare der 15 aus den Fundamentalcomplexen gebildeten Congruenzen teilen sich bei der Transformation in 2 Gruppen zu 10 und 5. Die der ersten Gruppe angehörigen, welche Gerade des ausgezeichneten Fundamentalcomplexes

„$x_6 = 0$ sind, bilden sich in die 10 ausgezeichneten Punktkugelpaare „ab, welche je dreien der 5 Fundamentalkugeln gemeinsam sind. Die „5 Directricenpaare der 2ten Gruppe, die jeweils in Bezug auf $x_6 = 0$ „conjugirte Gerade darstellen, bilden sich dagegen in die 5 Funda„mentalkugeln selbst ab".

Die 15 Directricenpaare orden sich nun zu den 15 Fundamentaltetraedern zusammen. Die Kanten werden gebildet von 3 Paaren von Directricen, deren Congruenzen stets zusammen sämmtliche 6 Fundamentalcomplexe enthalten. Bezeichnen wir die Directricen durch ihre Congruenzen, so haben wir folgende 15 Fundamentaltetraeder: (Ihnen entsprechen nach dem Vorhergehenden die daneben gesesetzten Zusammenordnungen von Fundamentalkugeln.)

$x_1=0\ x_2=0$	$x_3=0\ x_4=0$	$x_5=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_3=0$	$x_2=0\ x_4=0$	$x_5=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_4=0$	$x_2=0\ x_3=0$	$x_5=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_2=0$	$x_3=0\ x_5=0$	$x_4=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_3=0$	$x_2=0\ x_5=0$	$x_4=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_5=0$	$x_2=0\ x_3=0$	$x_4=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_2=0$	$x_4=0\ x_5=0$	$x_3=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_4=0$	$x_2=0\ x_5=0$	$x_3=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_5=0$	$x_2=0\ x_4=0$	$x_3=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_3=0$	$x_4=0\ x_5=0$	$x_2=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_4=0$	$x_3=0\ x_5=0$	$x_2=0\ x_6=0$
$x_1=0\ x_5=0$	$x_3=0\ x_4=0$	$x_2=0\ x_6=0$
$x_2=0\ x_3=0$	$x_4=0\ x_5=0$	$x_1=0\ x_6=0$
$x_2=0\ x_4=0$	$x_3=0\ x_5=0$	$x_1=0\ x_6=0$
$x_2=0\ x_5=0$	$x_3=0\ x_4=0$	$x_1=0\ x_6=0$

$s_3=0\ s_4=0\ s_5=0$	$s_1=0\ s_2=0\ s_5=0$	$s_5=0$
$s_3=0\ s_4=0\ s_5=0$	$s_1=0\ s_3=0\ s_5=0$	$s_5=0$
$s_2=0\ s_3=0\ s_5=0$	$s_1=0\ s_4=0\ s_5=0$	$s_5=0$
$s_3=0\ s_4=0\ s_5=0$	$s_1=0\ s_2=0\ s_4=0$	$s_4=0$
$s_2=0\ s_4=0\ s_5=0$	$s_1=0\ s_3=0\ s_4=0$	$s_4=0$
$s_2=0\ s_3=0\ s_4=0$	$s_1=0\ s_5=0\ s_4=0$	$s_4=0$

$s_4=0\ s_5=0\ s_3=0$	$s_1=0\ s_2=0\ s_3=0$	$s_3=0$
$s_2=0\ s_5=0\ s_3=0$	$s_1=0\ s_4=0\ s_3=0$	$s_3=0$
$s_2=0\ s_4=0\ s_3=0$	$s_1=0\ s_5=0\ s_3=0$	$s_3=0$
$s_4=0\ s_5=0\ s_2=0$	$s_1=0\ s_3=0\ s_2=0$	$s_2=0$
$s_3=0\ s_5=0\ s_2=0$	$s_1=0\ s_4=0\ s_2=0$	$s_2=0$
$s_3=0\ s_4=0\ s_2=0$	$s_1=0\ s_5=0\ s_2=0$	$s_2=0$
$s_4=0\ s_5=0\ s_1=0$	$s_2=0\ s_3=0\ s_1=0$	$s_1=0$
$s_3=0\ s_5=0\ s_1=0$	$s_2=0\ s_4=0\ s_1=0$	$s_1=0$
$s_3=0\ s_4=0\ s_1=0$	$s_2=0\ s_5=0\ s_1=0$	$s_1=0$

Den Kanten der Fundamentaltetraeder entsprechen so jedesmal 4 Punktkugeln, welche aus einer Fundamentalkugel durch 2 der Fundamentalkreise ausgeschnitten werden, zusammen mit der betreffenden Fundamentalkugel selbst.

Auf jeder der 5 Fundamentalkugen gibt es 3 Punktkugelpaare entsprechend dem Umstande, dass sich die 4 übrigen Kugeln dreimal in 2 Paare teilen lassen.

Betrachten wir des Näheren die auf

$$s_5 = 0$$

iegenden Punktkugelpaare

$$s_1 = 0\ s_2 = 0\ s_5 = 0;\ s_1 = 0\ s_3 = 0\ s_5 = 0;\ s_1 = 0\ s_4 = 0\ s_5 = 0$$
$$s_2 = 0\ s_4 = 0\ s_5 = 0;\ s_2 = 0\ s_4 = 0\ s_5 = 0;\ s_3 = 0\ s_4 = 0\ s_5 = 0$$

und von diesen wiederum beispielsweise das erste

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_5 = 0$$
$$s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0$$

Jede Punktkugel des Paares $s_1 = 0\ s_2 = 0\ s_5 = 0$ hat mit $s_5 = 0$ zwei Erzeugende gemein, die jeweils in den Tangentialebenen in diesen Punkten an $s_5 = 0$ verlaufen, den Minimalgeraden *I II* resp. *I' II'*. $\left.\begin{matrix} I \text{ u. } I' \\ II \text{ u. } II' \end{matrix}\right\}$ seien Erzeugende derselben Art.

Erzeugende verschiedener Art schneiden sich stets; also müssen sich, wie *I* und *II*, *I'* und *II'* auch *I* und *II'*, *II* und *I'* schneiden in 2 Punkten 3 und 4.

Die beiden Punktkugeln $s_1 = 0\ s_2 = 0\ s_5 = 0$ schneiden sich aber in dem Kreise $s_3 = 0\ s_4 = 0$, sie sind ja die Punktkugeln des durch den Kreis bestimmten Kugelbüschels. Also müssen die beiden

Punkte 3 und 4 auf $s_3 = 0$ $s_4 = 0$ liegen; sie liegen aber auch auf $s_5 = 0$. Es sind demnach die beiden Punkte 3 und 4 die Centren des 2ten zu betrachtenden Punktkugelpaares

$$s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0.$$

Das System

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \quad s_5 = 0; \quad s_3 = 0 \quad s_4 = 0 \quad s_5 = 0; \quad s_5 = 0$$

hat also die 4 ein räumliches Vierseit bildenden Minimalgeraden gemein. Dieses räumliche Vierseit ist es infolgedessen, das dem Fundamentaltetraeder entspricht.

Wir gewinnen den Satz:

„Den 15 Fundamentaltetraedern entsprechen durch unsere Ab„bildung 15 räumliche Vierseite, deren Kanten von Minimalgeraden „gebildet werden, und deren Ecken auf den Fundamentalkugeln „liegen und ausgeschnitten werden von den 10 Fundamentalkreisen. „Auf jeder der 5 Fundamentalkugeln liegen die Ecken von 3 Vier„seiten entsprechend dem Umstand, dass sich die 4 übrigen Funda„mentalkugeln auf 3 Weisen in je 2 Paare teilen lassen, wir also „3 Paare von Fundamentalkreisen erhalten. Jedem dieser Paare „entspricht ein Vierseit".

§ 2. *Die Schaar der Kummer'schen Flächen in ihrer Beziehung zum Cyklidensystem.*

Wollten wir in möglichst allgemeiner Weise verfahren, so hätten wir auszugehen von den ∞^2 Liniencomplexen 2ten Grades:

$$1) \qquad \sum_1^5 \frac{x_i^2}{k_i - \mu - \lambda} + \frac{x_6^2}{k_6 - \mu} = 0.$$

Diesen würden dann im Kugelraum ∞^2 Kugelcomplexe 2ten Grades entsprechen, und solche Kugelcomplexe 2ten Grades hätten wir als Verallgemeinerungen der Cykliden zu betrachten, die an sich nur gebildet werden von den Punktkugeln eines solchen Kugelcomplexes 2ten Grades.

Wir beschränken uns aber, indem wir in 1) $\mu = k_6$ setzen, auf die Linien der ∞^1 Congruenzen:

$$2) \qquad \sum_1^5 \frac{x_i^2}{k_i - k_6 - \lambda} = 0 \quad x_6 = 0$$

Digitized by Google

Dieselben sind die Doppeltangenten ∞^1 Kummer'schen Flächen, welche sich längs der 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven 8ter Ordnung berühren [4]).

Da $x_6 = 0$ unser ausgezeichneter Fundamentalcomplex ist, so entsprechen den ∞^1 Liniencongruenzen jeweils die Punktkugeln von ∞^1 Kugelcomplexen 2ten Grades, also die Cyklidenschaar

$$3) \qquad \sum_1^5 \frac{s_i^2}{c_i - \lambda} = 0 \text{ [5])}$$

wenn $k_i - k_6 = c_i$ gesetzt wird. Die Cyklidenschaar aber bildet ein confocales System, wie schon aus der Form der Gleichung 3) erhellt [6]).

Wir haben demnach den Satz:

„Einer ∞^1 Schaar Kummer'scher Flächen, welche Brennflächen „der ∞^1 Congruenzen

$$\sum_1^5 \frac{x_i^2}{c_i - \lambda} = 0 \quad x_6 = 0$$

„und sich nach einer ausgezeichneten Haupttangentencurve 8ter Ord-„nung berühren, bilden sich ab als ∞^1 Cykliden

$$\sum_1^5 \frac{s_i^2}{c_i - \lambda} = 0,$$

„die ein confocales System bilden".

Hieran schliessen wir sofort den folgenden Satz (Lie, a. a. O. p. 193—194.)

„Jene ausgezeichnete Haupttangentencurve transformirt sich in „die „Developpale Focale", welche allen Cykliden des confocalen „Systems sammt dem Kugelkreis umschrieben ist".

2 Congruenzen der Schaar 2), entsprechend 2 bestimmten Werten von λ, haben eine Linienfläche gemein, welche die beiden Brenn-

---

4) Ein solches System betrachtet H. Lie, a. a. O. p. 255. Die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche wurden zuerst untersucht von den Herren Klein und Lie in den Berl. Monatsberichten, 15. December 1870, in einer Abhandlung, die sich wieder abgedruckt findet in Bd. 23. der Math. Annalen, p. 579.

5) Siehe p. 20, Darboux, a. a. O., p. 134.

6) Daneben gilt noch $\sum_1^5 s_i^3 = 0$ entsprechend $\sum_1^5 x_i^3 = 0$.

flächen der Congruenzen längs je einer Haupttangentencurve berührt. Diese Linienfläche ist vom 8ten Grade [7]). Dem entsprechend schneiden sich 2 Cykliden des Systems längs einer Curve rechtwinklig (rechtwinklig darum, weil jeder Erzeugende der Linienfläche 2 Paar Berührungspunkte trägt, die zu einander harmonisch liegen), und diese ist Krümmungslinie auf beiden Flächen, im übrigen ebenfalls von der 8ten Ordnung [8]).

Je 3 Congruenzen der Schaar haben 16 $x_6 = 0$ angehörige Gerade gemein, die Doppeltangenten sind für die 3 zugehörigen Brennflächen. Auf jeder der 16 gemeinsamen Doppeltangenten bilden die 6 Berührungspunkte 3 Paare, 2 beliebige dieser 3 Paare sind zu einander harmonisch. Dem entsprechend schneiden sich im Cyklidenraum je 3 confocale Cykliden in 16 Punkten rechtwinklig.

Durch jede Linie des ausgezeichneten linearen Complexes lassen sich 3 Congruenzen der Schaar legen, deren Brennflächen die soeben berührte Eigenschaft besitzen. 5 Congruenzen der Schaar degeneriren in diesen Fällen in die Directricen dieser linearen Congruenzen.

Dem stellen sich für den Cyklidenraum die Sätze zur Seite, dass durch jeden Punkt des Raumes 3 Cykliden der Schaar gehen, und 6 Cykliden, für $\lambda = a_i$, zu Kugeln degeneriren; es sind dies die 5 Fundamentalkugeln.

Zunächst werden wir aber nicht das ganze Flächensystem in's Auge fassen, sondern die einzelne Kummer'sche Fläche in ihrer Beziehung zur einzelnen Cyklide. Wir werden also in 2) resp. 3) dem variabeln Parameter einen festen Wert zu erteilen, etwa $\lambda = \infty$ setzen; dann haben wir die Cyklide

$$4) \qquad \sum_1^5 a_i s_i^2 = 0.$$

Jeder Doppeltangente der Kummer'schen Fläche entspricht eine Punktkugel im Cyklidenraum; also entspricht je 2 Punkten der Kummer'schen Fläche, den 2 Berührungspunkten der Doppeltangente nämlich, nur ein Punkt der Cyklide. Ausgenommen allein sind die Punkte der obengedachten ausgezeichneten Haupttangentencurve 8ter Ordnung der Kummer'schen Fläche. Diese ist eine Curve 4punktiger

---

7) Unter dem Grad einer Linienfläche verstehen wir, wie üblich, die Anzahl der Erzeugenden, welche eine beliebig vorgegebene Gerade treffen.

8) Auf das Entsprechen von Linienflächen und Curven gehen wir in § 4., p. 69. ausführlicher ein.

Berührung für die Kummer'sche Fläche, die Doppeltangenten in den Punkten derselben sind vierfache Tangenten, jedem Punkt also der Haupttangentencurve für sich allein entspricht ein Punkt der Cyklide; die Beziehung ist in diesem Falle eine (1, 1) deutige. Die entsprechenden Punkte der Cyklide bilden die singuläre Krümmungslinie, in welcher die Fläche von der benachbarten des Systems geschnitten wird; denn die ausgezeichnete Haupttangentencurve verwandelt sich ja in die developpabele Focale, und diese berührt die Cyklide in jener singulären Krümmungslinie.

Wir geben den erhaltenen Resultaten die Fassung:

„Die Beziehung zwischen Kummer'scher Fläche und Cyklide ist „eine derartige, dass im Allgemeinen je zwei Punkten der ersteren „nur ein Punkt der letzteren entspricht, nämlich den 2 Berührungs„punkten einer der ∞^2 Doppeltangenten, die $x_6 = 0$ angehören, eine „der ∞^2 Punktkugeln, welche die Cyklide bilden".

„Nur die Punkte der ausgezeichneten Haupttangentencurve 8ter „Ordnung entsprechen den Punkten der ausgezeichneten singulären „Krümmungslinie ein-eindeutig".

Da den Haupttangenten der Kummer'schen Fläche die Hauptkugeln der Cyklide entsprechen, so finden wir überhaupt den Satz[9]):

„Die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche bilden sich „in die Krümmungslinien der Cyklide ab".

§ 3. *Parameterverteilung auf der Kummer'schen Fläche und deren Uebertragung.*

Jeden Punkt der Kummer'schen Fläche können wir, krummlinige Coordinaten einführend, durch die beiden Haupttangentencurven bestimmen, die durch ihn hindurchlaufen:

$$\lambda_1 = \text{const}; \quad \lambda_2 = \text{const}$$

seien die Gleichungen dieser beiden Haupttangentencurven. Dann ist durch diese Parameterwerte der betreffende Punkt bestimmt, aber nicht eindeutig; die beiden Haupttangentencurven 16ter Ordnung treffen sich ja in 32 Punkten, und diese 32 Punkte hangen sämmtlich von denselben Parameterwerten λ_1 und λ_2 ab. Um die einzelnen Punkte der Gruppe zu individualisiren, nehmen wir als Bestimmungsstücke nicht λ_1 und λ_2, sondern die beiden überall endlichen Normalintegrale vom Geschlecht 2, hingeleitet zu λ_1, resp. λ_2 als obere Grenzen

9) cf. p. 63., Lie, a. a. O., p. 177.

und als Irrationalität $\sqrt{\overset{6}{\underset{1}{\Pi}}(a^i - \lambda)}$, wo die a_i die Parameter der 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven 8ter Ordnung bedeuten.[10])

Betrachten wir eine solche Gruppe von 32 Punkten, so sehen wir, dass aus einem von ihnen 15 weitere hervorgehen durch 15 Collineationen — die 15 involutorischen windschiefen Perspectiven, die sich auf die 15 Directricenpaare, also die 15 Congruenzen $x_i = 0$ $x_k = 0$ stützen.

Die 16 noch übrigen hangen von den 16 schon betrachteten dualistisch ab. Betrachten wir nämlich einen der 16 Punkte, so gehört zu ihm eine Tangentialebene an die Kummer'sche Fläche; in dieser Tangentialebene wird eine Gerade des Tangentenbüschels dem ausgezeichneten Complex $x_6 = 0$ angehören. Diese ist Doppeltangente an die Kummer'sche Fläche und liefert infolgedessen einen 2ten Punkt der Kummer'schen Fläche. So erhalten wir zu den 16 Punkten noch 16 weitere hinzu.

Das Coordinatensystem der Haupttangentencurven transformirt sich nun in das Coordinatensystem der Krümmungslinien. Wie dort ein Punkt durch die hindurchlaufenden Haupttangentencurven definirt war, ist er hier definirt durch die 2 Krümmungscurven

$$\lambda_1 = e_1, \quad \lambda_2 = e_2.$$

Die Haupttangentencurven schneiden sich nun in 32 Punkten, welche auf die oben bezeichnete Weise zusammenhangen; je 2 derselben liefern aber als Berührungspunkte einer Doppeltangente, welche dem Complex $x_6 = 0$ angehört, denselben Punkt der Cyklide.

„Der Gruppe von 32 zusammengehörigen Punkten der Kummer„schen Fläche entspricht also auf der Cyklide eine Gruppe von nur „16 Punkten, welche auseinander durch Spiegelung an den Fundamental„kugeln, wie dort durch Spiegelung an den Congruenzen $x_i = 0$ $x_6 = 0$, „($i = 1, 2 \ldots 5$) hervorgehen."

Einem Punkt der Kummer'schen Fläche entspricht eine Minimalgerade, welche die Cyklide in dem Punkt berührt, welcher der Doppeltangente an die Kummer'sche Fläche, $x_6 = 0$ angehörend, entspricht, die im Ausgangspunkt construirt wurde. Der Tangentialebene im Ausgangspunkt an die Kummer'sche Fläche entspricht die 2te in jenem Punkt der Cyklide berührende Minimalgerade; diese letztere Minimalgerade ist aber auch das Bild des 2ten Punkts der Kummer-

10) Ausführliches hierüber siehe p. 81.

schen Fläche, der zum Ausgangspunkt dualistisch gehört, ebenso wie die erste Minimalgerade der Tangentialebene in jenem 2ten Punkt der Kummer'schen Fläche entspricht.

Machen wir demnach eine dualistische Umformung im Raum der Kummer'schen Fläche, hinsichtlich des linearen Complexes $x_6 = 0$, durch welche jeder Punkt in die ihm durch den linearen Complex zugeordnete Ebene und jede Ebene in den entsprechenden Punkt verwandelt wird, so vertauschen sich die beiden Untergruppen von je 16 Punkten auf der Kummer'schen Fläche. Eine solche Vertauschung ändert aber das Cyklidensystem in keiner Weise. Die in Rede stehende dualistische Umformung des einen Raumes bringt im anderen keinerlei Aenderung hervor.

§ 4. *Abbildung von Linienflächen, deren Erzeugende dem ausgezeichneten linearen Complex angehören.*

Im Folgenden wird es sich vorzugsweise darum handeln, die Abbildung von Curven der Kummer'schen Fläche auf die Cyklide zu zu leisten. Wir könnten zu dem Zwecke die Punkte der Curve selbst abbilden — ihnen entsprechen ja im Cyklidenraum Minimalgerade, die die Cyklide in je einem Punkte berühren —; einfacher gestalten sich aber die Verhältnisse, wenn wir in jedem Punkt der Curve auf der Kummer'schen Fläche die zugehörige Doppeltangente construiren, die dem ausgezeichneten Complex angehört. Die so entstehende Linienfläche, deren Erzeugende also dem ausgezeichneten linearen Complex angehören, bildet sich sofort auf eine Curve der Cyklide ab; jeder Doppeltangente entspricht ja ein Punkt der Cyklide.

Wir betrachten demnach zunächst allgemein Linienflächen, deren Erzeugende $x_6 = 0$ angehören, und deren Abbildungen, und stützen uns hierbei auf ein von Herrn Klein gütigst zur Verfügung gestelltes Manuscript: Zur Theorie der linearen Complexe, dessen Resultate die eigenen vervollständigen halfen.

Ehe wir auf die in Rede stehende Abbildung selbst eingehen, wird es zweckmässig sein, gewisser Ausnahmgebilde Erwähnung zu tun, die bei unserer Abbildung sowohl im linearen Complex als im Punktraum auftreten.

Im Allgemeinen ist die Abbildung eine (11) deutige; jeder Geraden des Complexes entspricht ein Punkt des Cyklidenraumes; es giebt aber eine Gerade des Complexes — die Fundamentalgerade[11]) —, der ∞^2 Punkte entsprechen, die eine ganze

11) cf. Lie, a. a. O. p. 168.

Ebene im Cyklidenraum erfüllen, und umgekehrt Punkte im Cyklidenraum — sie liegen auf einem Kegelschnitt —, denen ein ganzes Büschel von Geraden des Complexes entspricht.

Dieser Kegelschnitt ist im gegebenen Falle der Kugelkreis. Jedem Punkt des Kugelkreises entspricht also ein Büschel von Complexgeraden, welchem die Fundamentalgerade angehört; durch dasselbe wird ein Punkt der Fundamentalgeraden und eine durch sie hindurchgehende Ebene dem betreffenden Punkt des Kugelkreises zugeordnet.

Um die Verhältnisse der Abbildung klar zu übersehen, folgt eine Tabelle, welche entsprechende Gebilde einander gegenüberstellt, soweit sie Bezug haben zu den Ausnahmegebilden.

Raum des Complexes.	Cyklidenraum.
Die Fundamentalgerade L:	die ∞ferne Ebene.
Eine Complexlinie:	ein Punkt.
Eine Complexlinie, die L schneidet:	ein Punkt des Kugelkreises.
Das dadurch bestimmte Büschel:	derselbe Punkt des Kugelkreises.
Die Congruenz, gebildet vom gegebenen Complex und den durch die Fundamentalgerade bestimmten speciellen, d. h. eine lineare Congruenz mit L als Doppellinie:	der Kugelkreis.
Eine lin. Congruenz mit Doppellinie, die L enthält, d. h. die ∞^2 Linien des Complexes, welche eine Complexlinie schneiden, die ihrerseits L trifft:	∞^2 Punkte, eine Ebene bildend, die mit dem Kugelkreis einen Punkt gemein hat, d. h. eine Tangentialebene an den Kugelkreis.
Eine allgemeine lin. Congruenz, die L enthält und dem Complex angehört:	eine Ebene.
Die Directricen dieser Congruenz:	die beiden Kreispunkte der Ebene.
Eine allgemeine lineare Congruenz, die L nicht enthält und dem Complex angehört:	eine Kugel; die Punkte des Kugelkreises entsprechen den Geraden der Congruenz, die L schneiden.
Eine Linienfläche 2ten Grades, welche L enthält:	eine Gerade, die den Kugelkreis nicht trifft.

Raum des Complexes.	Cyklidenraum.
Die Erzeugende L:	der Schnitt mit der unendlich fernen Ebene.
Eine Linienfläche 2ten Grades, die L berührt: (L schneidet nur eine Erzeugende.)	ein Kreis, der die unendlich ferne Ebene berührt, d. h. nur einen Kreispunkt hat. Die Ebene des Kreises entspricht der linearen Congruenz, welche die geschnittene Erzeugende zur Doppellinie besitzt.
Eine beliebige Linienfläche 2ten Grades: (L schneidet 2 Erzeugende, bestimmt also 2 Büschel von Complexgeraden.)	Ein Kreis. (Den beiden Büscheln entsprechen die beiden Kreispunkte.

Betrachten wir jetzt eine allgemeine Linienfläche, deren Erzeugende dem linearen Complex angehören. Der Grad derselben, d. h. die Zahl der Erzeugenden, die von einer beliebigen Geraden geschnitten werden, sei n. Der Grad wird im Allgemeinen mit der Ordnung und Classe[12]) der Linienfläche übereinstimmen; nur wenn die Erzeugenden eine Developpabele bilden, ist der Grad gleich der Ordnung der Developpabeln und der Classe der zugehörigen Raumcurve.

Als charakteristisch ist ferner zu betrachten:

Das Geschlecht p (d. h. das Geschlecht der ebenen Schnittcurve);

Die Zahl der Doppelerzeugenden ϱ
und der stationären Erzeugenden σ,

Die Zahl der singulären Linien s,

Die Art der Brenncongruenz[13]). Die Brenncurve und Brenndeveloppabele der letzteren giebt

die Doppelcurve Σ
und die Doppeldeveloppabele S } der geg. Linienfläche.

Es möge die Linienfläche die bei der Abbildung des Complexes benützte Fundamentalgerade L nicht enthalten, auch möge keine ihrer

---

12) Ordnung und Classe sind nach einem bekannten Satze von Cayley in diesem Falle gleich.

13) Unter der Brenncongruenz versteht man die ∞^2 Geraden, welche von der Gesammtheit der Büschel herrühren, die von sich schneidenden Linien der Fläche gebildet werden.

ausgezeichneten Linien der linearen Congruenz angehören, deren Doppellinie L ist.

Dann verwandelt sich die Linienfläche $n$ten Grades vermöge unserer Abbildung in eine Curve $n$ten Grades, die den Kugelkreis in n getrennten Punkten schneidet — die Fundamentalgerade trifft ja n Erzeugende der Linienfläche.

Die Anzahl der Doppelpunkte wird gleich ϱ, die Anzahl der Rückkehrpunkte σ.

Nun ist aber das Geschlecht der Linienfläche, wenn die Ordnung und Classe der Doppelcurve $= h$ ist

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h - \varrho - \sigma$$

(Wir haben ja das Geschlecht der ebenen Schnittcurve zu bestimmen.)

Der Brenncurve $h$ter Ordnung entspricht nun eine Minimallinienfläche $2h$ter Ordnung, die den Kugelkreis $h$fach enthält. Jede Erzeugende derselben schneidet die Raumcurve 2mal, entsprechend dem Umstand, dass die Brenncurve erzeugt wurde durch sich schneidende Linien der Brenncongruenz. Von jedem Punkt des Kugelkreises laufen also h Erzeugende der Minimallinienfläche aus; die Raumcurve $n$ter Ordnung, die der Linienfläche des Complexraumes entspricht, hat demnach h scheinbare Doppelpunkte. Es ist also ihr Geschlecht

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h - \varrho - \sigma$$

„Es überträgt sich also auch das Geschlecht der Linienfläche „auf die Raumcurve im Cyklidenraum."

Als Rang der Raumcurve erhalten wir

$$r = n(n-1) - 2h - 2\varrho - 3\sigma$$

Es ist dies auch die Ordnung der durch dieselbe bestimmten Developpabelen. Letztere schneidet den Kugelkreis ausser in den n doppelt zählenden Punkten in

$$2(r-n) \text{ Punkten};$$

soviel liegen also Minimalgerade auf der Developpabelen, soviel mal ist mit anderen Worten die Verbindungslinie 2er benachbarter Punkte der Raumcurve Minimalgerade. Ein derartiges Vorkommniss entspricht aber einer singulären Linie der Linienfläche

des Complexraumes, d. h. dem Falle, wo eine Erzeugende von ihrer benachbarten geschnitten wird. Wir erhalten demnach

$$2(r-n) = s.$$

„Der Anzahl der singulären Linien entspricht also die Zahl der „Punkte, in denen die Developpabele der Raumcurve vom Kugelkreis „getroffen wird ausser den n doppelt zählenden Punkten, in denen „die Raumcurve den Kugelkreis durchsetzt."

Eine beliebige Erzeugende der Linienfläche wird von $(n-2)$ ihresgleichen getroffen, eine Doppelerzeugende, resp. stationäre Erzeugende von $(n-4)$ andern Erzeugenden. Es liegen also auf jeder der letzteren $(n-4)$ Doppelpunkte, resp. Rückkehrpunkte der Doppelcurve. Die Anzahl der Doppelpunkte resp. Rückkehrpunkte der Doppelcurve ist demnach

$$\varrho(n-4) \text{ resp. } \sigma(n-4).$$

Ebenso hat die Doppeldeveloppabele $\varrho(n-4)$ Doppelebenen und $\sigma(n-4)$ Inflexionsebenen, welche zu $(n-4)$ durch die $(\varrho+\sigma)$ mehrfachen Erzeugenden hindurchgehen und der gleichen Anzahl von Doppel- und Rückkehrpunkten einzeln entsprechen.

Demgemäss erhalten wir im Punktraum auf der Minimallinienfläche, deren Erzeugende Secanten der Raumcurve sind, $\varrho(n-4)$ Doppelerzeugende und $\sigma(n-4)$ stationäre Erzeugende, die jeweils zu $(n-4)$ durch einen Punkt der Raumcurve gehen.

§ 5. *Abbildung von Curven.*

Jetzt gilt es nun noch, die Linienfläche, deren Erzeugende dem ausgezeichneten linearen Complex angehören, in Verbindung zu bringen mit der Ausgangscurve auf der Kummer'schen Fläche, längs welcher beide Flächen einander berühren.

Gehen wir also aus von einer beliebigen Curve auf der Kummerschen Fläche, deren Ordnung gleich n sei.

Construiren wir dann in jedem Punkte derselben die Doppeltangente, welche dem ausgezeichneten linearen Complex angehört, so wird deren 2ter Berührungspunkt im Allgemeinen kein Punkt der Curve sein, wir werden also neben der gegebenen Curve noch eine 2te auf der Kummer'schen Fläche in Betracht zu ziehen haben, die dieselbe Linienfläche liefert, die also auch dasselbe Bild auf der Cyklide hat.

Die Linienfläche, welche von den Doppeltangenten gebildet wird, wäre als Schnitt eines linearen, eines quadratischen und eines Com-

plexes $n$ten Grades — letzterer ist durch die Curve $n$ter Ordnung bestimmt — von der Ordnung $4n$. Diese Zahl reducirt sich aber auf die Hälfte, da die in Rede stehende Curve auf der Brennfläche der Congruenz (22) verläuft. Demnach ergiebt sich als Ordnung der 2ten „conjugirten" Curve $3n$. Die Singularitäten der ersten Curve finden auf der 2ten ihr dualistisches Gegenstück. Dieser Dualismus ist aber keiner im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Construiren wir nämlich in allen Punkten der ersten Curve die Ebenen, die ihnen vermöge des ausgezeichneten linearen Complexes entsprechen, so berühren dieselben die Kummer'sche Fläche in Punkten, deren Gesammtheit die 2te zur ersten dualistisch gehörende Curve bildet.

Der Ordnung n der Ausgangscurve entspricht die Anzahl von Tangentialebenen, die man von einem beliebigen Punkt so an die Kummer'sche Fläche legen kann, dass sie in einem Punkt der 2ten Curve berühren; dagegen entspricht der Anzahl von Tangentialebenen, die man von einem beliebigen Punkt so an die Kummer'sche Fläche legen kann, dass sie in einem Punkt der Ausgangscurve berühren[14]), die Ordnung der 2ten „conjugirten" Curve.

In speciellen Fällen kann die 2te conjugirte Curve mit der ursprünglichen zusammenfallen. Dies geschieht z. B. bei den Haupttangentencurven; in diesem Falle ist die Curve zu sich selbst dualistisch und zwar bei den Haupttangentencurven im landläufigen Sinne des Wortes, da die Tangentialebenen an die Kummer'sche Fläche in Punkten einer Hauptangentencurve Osculationsebenen an letztere sind; das stimmt mit dem Umstand, dass Ordnung und Classe der Haupttangentencurve gleich sind. Die Linienfläche der Doppeltangenten kann in letzterem Falle als Schnitt eines linearen und 2er quadratischer Complexe angesehen werden, ist also von der 8ten Ordnung für die Haupttangentencurven 16ter Ordnung; für die Haupttangentencurven 8ter Ordnung wird sie von der 4ten Ordnung (als Schnitt 2er linearer und eines quadratischen Complexes).

Ist demnach die Ordnung der auf der Kummer'schen Fläche gegebenen Curve n, so ist im Allgemeinen der Grad der Linienfläche $2n$.

Wir haben also den Satz:

„Einer Curve $n$ter Ordnung auf der Kummer'schen Fläche entspricht im Allgemeinen eine Curve $2n$ter Ordnung auf der Cyklide."

---

14) Diese Anzahl erhält man, indem man die Schnittpunkte der Curve mit der ersten Polare der Fläche in Bezug auf den angenommenen Punkt sucht; in unserm Falle erhält man so $3n$, eine Zahl, die wir schon oben für die Ordnung der 2ten Curve fanden.

Tritt dagegen der Fall ein, wo sämmtliche 2ten Berührungspunkte der Doppeltangenten wiederum Punkte der Curve sind, die conjugirte Curve also mit der ursprünglichen zusammenfällt, so ist die Ordnung, resp. der Grad der Linienfläche nur $\frac{n}{2}$; ebenso ist dann die Ordnung der Curve auf der Cyklide $\frac{n}{2}$ So ist es, wie gesagt, bei den Haupttangentencurven; ihnen entsprechen die Krümmungslinien 8ter resp. 4ter Ordnung der Cyklide.

Die Doppelpunkte der gegebenen Curve auf der Kummer'schen Fläche ergeben Doppelerzeugende der Linienfläche, die von den Doppeltangenten gebildet wird. Es ergiebt sich demnach der Satz:

„Den Doppelpunkten der Curve auf der Kummer'schen Fläche „entsprechen wiederum Doppelpunkte der Curve auf der Cyklide."

Hat dagegen die Curve auf der Kummer'schen Fläche eine Spitze, so liegen 3 aufeinanderfolgende Erzeugende der Linienfläche in derselben Ebene; es liegen also 3 aufeinanderfolgende Punkte der Curve im Cyklidenraum auf derselben Minimalgeraden; wir erhalten einen Tangenteninflexionspunkt. Hat umgekehrt die Curve auf der Kummerschen Fläche einen Tangenteninflexionspunkt, dann ist die Tangente in diesem Punkt Haupttangente an die Kummer'sche Fläche. Ihr entspricht eine Hauptkugel, welche die Cyklide in dem entsprechenden Punkte osculirt; eine solche schneidet aber in einer Curve mit Spitze in diesem Punkte; infolgedessen bekommt die Curve im Cyklidenraum eine Spitze. Wir sehen also:

„Den Spitzen und Tangenteninflexionspunkten der Curve auf der „Kummer'schen Fläche entsprechen resp. Tangenteninflexionspunkte „und Spitzen der entsprechenden Curve im Cyklidenraum. Diese „letzteren Tangenteninflexionspunkte sind notwendig imaginär."

Da das Geschlecht der Curve auf der Cyklide überdies noch von der Ordnung der Doppelcurve h der Linienfläche abhängt, und h von den Singularitäten der Curve auf der Kummerschen Fläche, welche deren Geschlecht bestimmen, unabhängig ist, so sehen wir, dass man von dem Geschlecht der Curve auf der Kummer'schen Fläche noch nicht auf das der Curve auf der Cyklide schliessen kann, sondern erst die Linienfläche gebildet von den Doppeltangenten construiren muss. Dann aber erhält man, wie wir sahen, vollständigen Aufschluss über alle in Frage kommenden Singularitäten.

Wir wollen noch ergänzend erwähnen: Geht die Curve auf der Kummer'schen Fläche durch einen Knotenpunkt hindurch, so kommt zu der Linienfläche $n$ten Grades der Doppeltangenten noch eine

Linienfläche ersten Grades, ein Geradenbüschel[15]), hinzu; infolgedessen erhalten wir als Bild auf der Cyklide die Curve $2n$ter Ordnung in Verbindung mit einer auf der Cyklide liegenden Minimalgeraden.

II. Capitel.

Kummer'sche Fläche und Cyklide unter Berücksichtigung der ϑ.

Auf dreierlei Weisen wurde, wie schon in der Einleitung erwähnt, die Kummer'sche Fläche durch hyperelliptische ϑ-Functionen (vom Geschlecht 2) dargestellt. Wir haben sachlich geordnet:

1) Die liniengeometrische Darstellung Rohns.
2) Die Borchardt'sche Darstellung, beruhend auf einer Göpel'schen biquadratischen Relation.
3) Die Weber'sche Darstellung.

In dieser Aufeinanderfolge ist uns zugleich das Einteilungsprincip gegeben, dem wir folgen werden.

§ 1. *Die liniengeometrische Darstellung der Kummer'schen Fläche und die hierauf basirende Uebertragungsweise.*

Wir wissen, dass wir die Punkte der Kummer'schen Fläche bestimmen können durch die hindurchlaufenden Haupttangentencurven, indem wir das System der letzteren zum krummlinigen Coordinatensystem wählen; wir wissen aber auch[16]), dass durch die Parameterwerte 2er Haupttangentencurven

$$\lambda_1 = e_1, \quad \lambda_2 = e_2$$

ein Punkt der Kummer'schen Fläche nicht eindeutig bestimmt ist, sondern dass wir die Wahl unter 32 Punkten haben. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, charakterisiren wir den Punkt der Kummer'schen Fläche nicht durch die 2 Parameter λ_1 und λ_2 der beiden durch ihn hindurch gehenden Haupttangentencurven selbst, sondern durch die Normalintegrale erster Gattung vom Geschlecht 2:

1)

$$u_1 \mid u_2 = u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2'' = \int_\alpha^{\lambda_1, \Lambda} du_1 + \int_\beta^{\lambda_2, \Lambda} du_1 \mid \int_\alpha^{\lambda_1, \Lambda} du_2 + \int_\beta^{\lambda_2, \Lambda} du_2$$

---

15) In einer der Doppeltangentialebenen, die durch den Knotenpunkt gehen

16) cf. p. 66.

in denen λ_1 und λ_2 als obere Grenzen auftreten, während die Wahl der unteren Grenzen α und β noch in unserer Hand steht, und Δ den Wert hat:

$$2) \qquad \Delta = \sqrt{(\lambda - c_1)(\lambda - c_2)(\lambda - c_3)(\lambda - c_4)(\lambda - c_5)(\lambda - c_6)}$$

wo $c_1 c_2 \ldots c_6$ die Parameter der 6 Haupttangentencurven 8ter Ordnung bedeuten.[17])

Bezeichnen wir nun mit Π ein Multiplum von Perioden, so lassen wir von den Ausdrücken

$$3) \qquad \pm u' \pm u'' + \Pi$$

diejenigen denselben Punkt der Kummer'schen Fläche bedeuten, welche sich durch eine gerade Anzahl von Vorzeichen und durch gerade Multipla von Perioden unterscheiden, während sämmtliche Ausdrücke zusammengenommen die 32 zusammengehörigen Punkte liefern.

Unsere Gruppe von 32 Punkten sondert sich, wie wir wissen, in 2 Untergruppen von je 16 Punkten. Diese 16 Punkte einer Untergruppe unterscheiden wir durch die 16 verschiedenen Perioden von einander, die bei Integralen erster Gattung vom Geschlecht 2 möglich sind. Ist der Ausgangspunkt dargestellt durch

$$u_1 \mid u_2 = u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2''$$

so erhält man die 15 zugehörigen Punkte der Untergruppe also durch Zufügen von den 15 von $0 \mid 0$ verschiedenen Perioden:

$$\begin{array}{c|c}
a_{11} \mid a_{12} & \pi i \mid 0 \\
a_{11} + \pi i \mid a_{12} & a_{11} + \pi i \mid a_{12} + \pi i \\
\pi i \mid \pi i & a_{11} + a_{12} + \pi i \mid a_{12} + a_{22} + \pi i \\
a_{12} + \pi i \mid a_{22} + \pi i & a_{11} + a_{12} + \pi i \mid a_{12} + a_{22} \\
a_{12} + \pi i \mid a_{22} & a_{11} \mid a_{12} + \pi i
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
a_{11} + a_{12} \mid a_{12} + a_{22} + \pi i \\
a_{11} + a_{12} \mid a_{12} + a_{22} \\
a_{12} \mid a_{22} \\
a_{11} \mid a_{22} + \pi i \\
0 \mid \pi i
\end{array}$$

wenn die Perioden gegeben sind durch das Schema:

---

17) Es sei für das Folgende bemerkt, dass wir uns hinsichtlich der Theorie der hyperelliptischen Integrale und Functionen an Herrn Prym „Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen", Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. 4, und Herrn Krazer: „Theorie der 2fach unendlichen Θ Reihen", Leipzig 1882, anschliessen werden.

	a_1	a_2	b_1	b_2
du_1	a_{11}	a_{12}	πi	0
$\int du_2$	a_{21}	a_{22}	0	πi

und die Riemann'sche 2 blättrige Fläche für $p = 2$ die charakteristische Zerschneidung zeigt (s. Fig. 5.)

Die Punkte der andern Untergruppe unterscheiden sich von den entsprechenden Punkten der ersten durch das Vorzeichen von u'', oder u' was dasselbe besagen will bei unserer Festsetzung auf p. 246.

Durch unsern linearen Complex $x_6 = 0$ werden nun solche Punkte einander zugeordnet. Gehen wir von dem Punkt

$$u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2''$$

aus und nehmen diejenige Ebene, welche ihm durch den Complex $x_6 = 0$ entspricht, so ist deren Berührungspunkt mit der Kummerschen Fläche der dualistisch zum ersten gehörige Punkt, dem die Argumente zukommen

$$u_1' - u_1'' \mid u_2' - u_2''.$$

Beide Punkte liefern nun gemeinsam denselben Punkt der Cyklide, dem also 2 Argumentenwerte mod. doppelter Perioden zukommen. Aus ihm erhalten wir 15 weitere durch Zufügen der 15 von 0 | 0 verschiedenen Periodenmultipla.

Wir erhalten demnach den Satz:

„Je 2 Punkte der Kummer'schen Fläche, deren Argumente sich „simultan in die Form setzen lassen

$$u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2'' \quad \text{und} \quad u_1' - u_1'' \mid u_2' - u_2'',$$

„liefern denselben Punkt der Cyklide."

„Ebenso lässt eine simultane Umkehr beider Vorzeichen den „Punkt der Cyklide ungeändert."

„Vermehren wir diese Argumente um die 15 möglichen von 0 „verschiedenen Perioden (mod. 2 genommen), so erhält man auf der „Cyklide aus einem vorgegebenen Punkte die 15, welche durch Spie„gelung an den Fundamentalkugeln aus ihm hervorgehen, gerade so, „wie man auf der Kummer'schen Fläche aus dem entsprechenden „Punktepaare 15 weitere erhält, die durch Spiegelung an den Con„gruenzen $x_i = 0$ $x_k = 0$ aus ihm hervorgehen.

Digitized by Google

Curvensysteme.

Jetzt nehmen wir unsere Argumente

$$u_1' + u_1'' \mid u_2' + u_2''$$

zu den Argumenten von ϑ Functionen vom Geschlecht 2, und fragen zunächst, was bedeutete das Nullsetzen

a. Der 6 ungeraden Θ Functionen?

Die 6 ungeraden ϑ Functionen, gleich Null gesetzt, liefern natürlich auf der Kummer'schen Fläche die 6 Haupttangentencurven 8ter Ordnung, da wir die Parameter derselben zu Verzweigungspunkten genommen haben.

Dementsprechend erhalten wir auf der Cyklide 6 ausgezeichnete Krümmungslinien. Wir wissen schon, dass die Haupttangentencurve $\lambda = c_6$ übergeführt wird in die singuläre Krümmungslinie 8ter Ordnung, in welcher die Cyklide von der benachbarten geschnitten wird[18]). Beide Curven sind derartig auf einander bezogen, dass den Tangenten der einen die Punkte der andern, den Punkten der einen die Tangenten der andern entsprechen; sie sind reciproke Curven im Sinne des Herrn Lie[19]) Die Spitzen der einen verwandeln sich, wie wir wissen, in die stationären Tangenten der anderen Curve und umgekehrt. Da nun die 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven 8ter Ordnung auf der Kummer'schen Fläche 40 stationäre Tangenten und keine Spitzen haben, so hat die singuläre Krümmungslinie, längs welcher die developpabele Focale der Cyklide berührt, keine stationären Tangenten, aber 40 Spitzen. (Die 40 Osculationskugeln in diesen Punkten sind Hyperosculationskugeln und schneiden die Cyklide längs 2er Geraden und eines Kreises, der durch den Schnitt der beiden Geraden geht, die 40 Punkte sind die 40 Nabelpunkte der Cyklide[20]).

Die übrigen 5 ausgezeichneten Haupttangentencurven erhalten wir für $\lambda = c_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ihnen entsprechen auf der Cyklide die 5 ausgezeichneten Krümmungslinien 4ter Ordnung, die 5 Focalcurven, die ausgeschnitten werden von den 5 Fundamentalkugeln.

In diesem Falle gehört die Linienfläche, deren Erzeugende die längs der betreffenden ausgezeichneten Haupttangentencurve construir-

---

18) Siehe p. 65.

19) Lie, a. a. O., p. 164.

20) Darboux, a. a. O., p. 309.

ten Doppeltangenten an die Kummer'sche Fläche, dem Complex $x_6 = 0$ zugehörend, sind, einer linearen Congruenz an; infolgedessen liegt die entsprechende Curve im Cyklidenraume in der Tat auf einer Kugel, und zwar einer der 5 Fundamentalkugeln.

Die Linienfläche ist vom 4ten Grade und hat das Geschlecht 1, enthält jede der Directrieen der Congruenz doppelt und hat 8 singuläre Linien, 4 davon haben ihren zugehörigen singulären Punkt in einer der Direktrieen, während ihre Ebenen durch die andere gehen; bei den 4 übrigen findet das Umgekehrte statt.

Infolgedessen hat die Curve auf der Cyklide von der 4ten Ordnung ebenfalls das Geschlecht 1, und es tritt achtmal der Fall ein, dass eine Tangente der Curve Minimalgerade ist; diese Tangenten sind Erzeugende der betreffenden Fundamentalkugel, 4 Erzeugende der einen, 4 Erzeugende der andern Art.

b. Die 10 geraden Θ Functionen.

Wir wissen, dass auf der Kummer'schen Fläche den 10 gleich Null gesetzten geraden Θ Functionen mit den in Rede stehenden Argumenten die Schnittlinien mit den 10 Fundamentalflächen 2ter Ordnung entsprechen, also Curven achter Ordnung[21]).

Dementsprechend erhalten wir auf der Cyklide Curven 16ter Ordnung, welche den Berührungsschnitt bilden mit Minimalflächen 16ter Ordnung, welche den Kugelkreis 8fach enthalten und einen der Fundamentalkreise als Leitlinie (4fach zählend) besitzen. Man gelangt zu einer dieser Minimallinienflächen, wenn man die Punkte der Curve der Kummer'schen Fläche abbildet. Natürlich erhält man dieselbe Curve auf der Cyklide, wenn man die Linienfläche 16ten Grades construirt, welche von den Doppeltangenten gebildet wird, und diese dann der Abbildung unterwirft.

Wir fassen das Resultat in den Satz zusammen:

„Den 10 geraden Θ Functionen, gleich Null gesetzt, entsprechen „10 Curven 16ter Ordnung auf der Cyklide. Dieselben können aufgefasst werden als der Berührungsschnitt mit 10 Minimallinienflächen 16ter Ordnung, die den Kugelkreis achtfach enthalten und je einen „der Fundamentalkreise als Leitlinie (4fach zählend) besitzen."

---

21) Man vergleiche Rohn: Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperell. Funct. $p = 2$, Diss., ferner die genannte Arbeit desselben Verfassers im 15. B. der Math. Ann.

Digitized by Google

c. Die Curvenschaar $\vartheta(u-e)=0$

($e_1 \mid e_2 \equiv$ einfachen Integralen.)

$\vartheta(u-e)=0$ stellt auf der Kummer'schen Fläche die Schaar der Haupttangentencurven 16ter Ordnung mit 16 Spitzen und 96 stationären Tangenten dar.

Die Haupttangencurven verwandeln sich nach den früheren §§ in die Krümmungslinien 8ter Ordnung auf der Cyklide, die also 16 stationäre Tangenten, die zugleich Minimallinien sind, und 96 Spitzen haben müssen. Dass damit die Zahl der stationären Tangenten überhaupt nicht erschöpft ist, geht daraus hervor, dass sich auch eine stationäre Tangente einstellt, — welche in diesem Falle reell sein kann, — wenn 3 aufeinanderfolgende Erzeugende der Doppeltangentenfläche einer Erzeugung einer Fläche 2ten Grades angehören, welche die Fundamentalgerade des Complexraumes ebenfalls als Erzeugende derselben Art enthält.

„Die Gleichungen $\vartheta(u-e)=0$, wo $e_1 \mid e_2$ einfachen Integralen „congruent sind, stellen bei veränderlicher obrer Grenze dieser ein„fachen Integrale die Schaar der Krümmungslinien auf der Cyklide dar."

d. Die Curvenschaar $\vartheta(u-e)=0$ bei beliebigem $e_1 \mid e_2$

Wenn für einen Punkt der Kummerschen Fläche $\vartheta(u-e)=0$ ist, so muss für denselben Punkt auch

$$\vartheta(-u-e)=\vartheta(u+e)=0$$

sein; denn ebenso wie der betreffende Punkt durch $u_1'+u_1'' \mid u_2'+u_2''$ charakterisirt ist, können wir ihn auch bestimmen durch die Argumente mit entgegengesetzten Vorzeichen

$$-u_1'-u_1'' \mid -u_2'-u_2''.$$

Ist also $\vartheta(u-e)=0$, so muss auch

$$\vartheta(u-e).\vartheta(u+e)=0 \text{ sein.}$$

Nun ist aber nach dem Additionstheorem der ϑ Functionen[22])

$$(0)^2\,\vartheta(u-e).\vartheta(u+e)$$
$$=\vartheta_0^2(u)\,\vartheta_0^2(e)+\vartheta_1^2(u)\,\vartheta_1^2(e)+\vartheta_2^2(u)\,\vartheta_2^2(e)+\vartheta_3^2(u)\,\vartheta_3^2(e)$$

wo ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 3 ungerade ϑ Functionen sind, deren Charakteristiken die Summe 0 ergeben.

---

22) cf. z. B. Krazer, Theorie der 2fach unendlichen ϑ Reihen p. 59.

Der letztere Ausdruck, gleich Null gesetzt, stellt aber auf der Kummer'schen Fläche eine Curvenschaar 16ter Ordnung dar, wie sich bei der Ueberlegung ergiebt, was die ϑ Quadrate zu bedeuten haben. (Man vergl. übrigens die Seminarvorträge des Herrn Klein im W./S. 83 „Ueber die Kummer'sche Fläche".)

„Wir erhalten also auch auf der Cyklide eine ∞^2 Schaar von „Curven 16ter Ordnung, die den Kugelkreis in 16 getrennten Punk„ten treffen."

§ 2. *Die Borchardt'sche Darstellung der Kummer'schen Fläche und die hierauf sich gründende Uebertragungsweise.*

I. Allgemeine Bemerkungen.

Die Borchardt'sche Darstellungsweise ergiebt sich aus der im vorigen Paragraphen erörterten durch Anwendung einer quadratischen Transformation, so dass die transformirten ϑ Functionen — wir wollen sie mit einem Accent bezeichnen, — nur noch die halben Argumente haben und nur 4 für die Transformation charakteristischen Perioden ungeändert geblieben sind. Es gehört infolgedessen zu einer jeden Classe von quadratischen Transformationen — deren wir 15 haben — als charakteristisch eine Gruppe von 4 ϑ Functionen, die ein Vierersystem erster Art, eine Göpel'sche Vier[23]) bilden. Solche 4 ϑ Functionen sind durch eine Göpel'sche biquadratische Relation[24]) mit einander verbunden, deren wir also auch 15 wesentlich verschiedene haben.

Eine solche Göpel'sche Relation stellt nun die Gleichung der Kummer'schen Fläche, bezogen auf eines der 15 Fundamentaltetraeder dar (siehe Teil II., Cap. 1., § 1. p. 227.) Die ϑ Functionen, welche die Relation bilden, geben, ohne Rücksicht auf die Kummer'sche Fläche einzeln gleich Null gesetzt, die Gleichungen der 4 Ebenen, welche das Fundamentaltetraeder bilden. Mit ihren Vorzeichenänderungen und Vertauschungen bedeuten sie die homogenen Punktecoordinaten von 16 zusammengehörigen Punkten der Kummer'schen Fläche bezogen auf eins der 15 Fundamentaltetraeder[25]). Die Gruppe solcher 16 Punkte zerlegt sich wiederum in 4 Untergruppen; die 4 Punkte einer Untergruppe unterscheiden sich in den Coordinaten durch 2 Vorzeichenwechsel, dagegen gelangt man von einer Unter-

---

23) siehe Krazer, a. a O. p. 20, p. 61.

24) Göpel: Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis, Cr. Journ., Bd. 35, p. 292, Formel 30.

25) Rohn, Bd. 15 der Annalen p. 344.

Digitized by Google

gruppe zur andern, indem man die Coordinaten in 2 Paare teilt und die Elemente jedes Paares mit einander vertauscht [26]).

Als Beispiel einer solchen Göpel'schen Relation führen wir die von H. Borchardt [27]) zu Grunde gelegte Gleichung an:

$$\vartheta_5'^4+\vartheta_0'^2+\vartheta_{23}'^4+\vartheta_{14}'^4+2(5)(0)(23)(14)\times$$
$$\frac{\Pi\varepsilon\varepsilon'((5)^2+\varepsilon(0)^2+\varepsilon'(23)^2+\varepsilon\varepsilon'(14)^2)}{\{(5)^2(0)^2-(23)^2(14)^2\}\{(5)^2(23)^2-(0)^2(14)^2\}\{(5)^2(14)^2-(0)^2(23)^2\}}$$
$$\times\vartheta_5'\vartheta_0'\vartheta_{23}'\vartheta_{14}'$$
$$-\frac{(5)^4+(0)^4-(23)^4)-(14)^2}{(5)^2(0)^2-(23)^2(14)^2}\{\vartheta_5'^2\vartheta_0'^2-\vartheta_{23}'^2\vartheta_{14}'^2\}$$
$$-\frac{(5)^4+(23)^4-(0)^4-(14)^2}{(5)^2(23)^2-(0)^2(14)^2}\{\vartheta_5'^2\vartheta_{23}'^2-\vartheta_0'^2\vartheta_{14}'^2\}$$
$$-\frac{(5)^4+(14)^4-(0)^4-(23)^4}{(5)^2(14)^2-(0)^2(23)^2}\{\vartheta_5'^2\vartheta_{14}'^2-\vartheta_0'^2\vartheta_{23}'^2\}=0\ ^{28}).$$

(Hierin sind die Vorzeichen noch nicht vollständig bestimmt; bei Herrn Krazer findet man dagegen, a. a. O. p. 55., Formel III, eine Gleichung, die sämmtliche Göpel'sche Relationen mit Angabe aller Vorzeichen umfasst.)

Die Constanten (5), (0), (23), (14) liefern die homogenen Coordinaten der 16 Knotenpunkte der Kummer'schen Fläche.

Im Ganzen haben wir, wie schon gesagt, 15 derartige Darstellungen, entsprechend den 15 Göpel'schen Relationen und den 15 Classen von quadratischen Transformationen. Der Umstand, dass jede Classe noch eine Gruppe von 24 Transformationen enthält, findet darin seine Begründung, dass nach Auswahl des Tetraeders die Ecken desselben noch 24 Permutationen gestatten.

Wie nun eine solche biquadratische Göpel'sche Relation die Kummer'sche Fläche darstellt, so wird dieselbe nach Ausführung der Berührungstransformation auch die Cyklide darstellen und zwar bezogen auf eins der 15 räumlichen Vierseite, welche den 15 Fundamentaltetraedern entsprechen (cf. p. 233.)

Jedes der 4 ϑ', welche die Göpel'sche Relation bilden, für sich gleich Null gesetzt, stellt die betreffende Minimalgerade dar, welche

---

26) Rohn, a. a. O. p. 337.

27) Borchardt, Crelle's Journal Bd. 83, p. 238. Die Bezeichnung der ϑ' nach Weierstrass.

28) Hierbei sind die Argumente der ϑ' weggelassen und für die Nullwerte abkürzend die blossen Charakteristiken gesetzt.

ein Bestandteil des räumlichen Vierseits ist [29]). Die 4 ϑ'Functionen stellen mit den Vorzeichenwechseln und Vertauschungen, wie sie sich auf p. 252. für die Gruppe der 16 Punkte der Kummer'schen Fläche ergaben, die Coordinaten einer Gruppe von 16 die Cyklide in je einem Punkte berührenden Minimalgeraden dar, die sich ebenso wie die Gruppen der 16 Punkte der Kummer'schen Fläche in 4 Untergruppen sondert. Die 4 in der Gleichung auftretenden Constanten bestimmen mit ihren Vorzeichencombinationen die 16 Minimalgeraden, die auf der Cyklide liegen; denn diese entsprechen den 16 Knotenpunkten, resp. den singulären Ebenen.

Wir erhalten demnach die Sätze:

„Eine der 15 biquadratischen Göpel'schen Relationen, welche „zwischen 4 ϑ', die einem Vierersystem 1ter Art angehören, be„stehen, liefert die Gleichung der Cyklide in homogenen Minimal„liniencoordinaten bezogen auf eines der räumlichen Vierseite, welche „aus Minimallinien zusammengesetzt sind, und deren Ecken von den „Punkten gebildet werden, in denen je 3 der Fundamentalkugeln sich „treffen".

Die Gruppirung dieser räumlichen Vierseite zeigt uns § 1. des 1ten Capitels des 2ten Teils, p. 233.

„Die Θ' Functionen, welche die Relation bilden, liefern die Coor„dinaten von je 16 zusammengehörigen Minimalgeraden, welche die „Cyklide berühren. Sie sondern sich wieder in 4 Untergruppen von „je 4 Minimalgeraden. Die Minimalgeraden einer Untergruppe unter„scheiden sich in den Coordinaten durch 2 Vorzeichenwechsel; da„gegen gelangt man von einer Untergruppe zur andern, indem man „die Coordinaten in 2 Paare teilt und die Elemente jedes Paares „mit einander vertauscht".

II. Curvensysteme.

a. Die 16 einfachen ϑ' Functionen.

Fragen wir, was auf der Kummer'schen Fläche die 16 einfachen ϑ'Functionen, wenn wir sie gleich Null setzen. bedeuten, so finden wir zunächst eine Teilung derselben in 4 und 12. Die ersten 4, welche das Vierersystem erster Art bilden, aus welchem die die Kummer'sche Fläche darstellende Göpel'sche Relation besteht, liefern natürlich die Schnitte mit den 4 Ebenen des Fundamentaltetraeders, also 4 ebene Curven 4ter Ordnung von allgemeinem Cha-

29) resp. die durch dieselbe bestimmte Congruenz von Minimalgeraden.

rakter auf der Kummer'schen Fläche. Die 12 übrigen liefern, wie Herr Rohn [30]) zeigt, die Berührungsschnitte 4ter Ordnung mit Flächen 2ter Ordnung, welche das betreffende Fundamentaltetraeder zum gemeinsamen Polartetraeder haben.

Was zunächst die 4 Schnittcurven mit den Tetraederebenen anbetrifft, so entsprechen diesen vermöge unserer Transformation Curven 6ter Ordnung auf der Cyklide, die wie die entsprechenden Curven auf der Kummer'schen Fläche keine Doppelpunkte haben werden, aber den Kugelkreis in 8 Punkten schneiden.

Sie kann übrigens auch aufgefasst werden als Berührungsschnitt mit einer Minimallinienfläche 8ter Ordnung, die den Kugelkreis 4-fach enthält. Diese Minimallinienfläche hat als Leitlinie eine Minimallinie und enthält letztere doppelt zählend, es ist dies die betreffende Minimallinie des Coordinatenvierseits.

Die 12 übrigen ϑ' liefern Curven 4ter Ordnung auf der Cyklide, die wir ansehen können als Berührungsschnitte mit 12 Dupin'schen Cykliden; denn in solche verwandeln sich vermöge der Transformation die 12 die Kummer'sche Fläche berührenden Flächen 2ter Ordnung [31]) und zwar sind dieselben auf dasselbe Coordinatenvierseit bezogen.

Wir fassen die erhaltenen Resultate wiederum in den Satz zusammen:

„Setzen wir die 16 einfachen Θ' gleich Null, so erhalten wir auf „der Cyklide 4 Curven 8ter und 12 Curven 4ter Ordnung. Die er„steren entsprechen den 4 ausgezeichneten Θ', die das gewählte „Vierersystem bilden, und können angesehen werden als die Berüh„rungsschnitte mit Minimallinienflächen 8ter Ordnung, die den Kugel„kreis vierfach, und die entsprechende Minimallinie des Coordinaten„vierseits als Leitlinie 2fach enthalten. Die 12 übrigen Curven 4ter „Ordnung sind die Berührungsschnitte mit 12 Dupin'schen Cykliden".

b. Die ∞' Curvenschaar $\vartheta'(u-e)=0$.

$e_1 \mid e_2 \equiv$ einfachen Integralen.

Nach Seite 250 ist mit $\vartheta'(u-e)$ auch $\vartheta'(u+e)=0$, und $\vartheta'(u-e).\vartheta'(u+e)$ kann man wiederum in eine Summe von ϑ'Quadraten zerlegen, deren Argumente die $u_1 \mid u_2$ allein sind. Diese ϑ'-

---

30) Bd. 15. der Math. Annalen p 346.

31) Lie, Bd. 5. der Annalen, a. a. O. p. 173.

Quadrate wiederum lassen sich sämmtlich durch die Quadrate der ursprünglichen ein Vierersystem erster Art bildenden ϑ' ausdrücken [32]). Eine derartige Gleichung stellt demnach auf der Kummer'schen Fläche den Schnitt mit einer Fläche 2ter Ordnung dar, also Curven 8ter Ordnung. Wir erhalten so auch auf der Cyklide eine ∞' Schaar von Curven 16ter Ordnung.

c. Die ∞^2 Curvenschaar $\vartheta'(u-e)=0$ bei beliebigem $e_1 \mid e_2$.

Wir erhalten ganz dasselbe Resultat, wie unter b., nur jetzt eine ∞^2 Schaar von Curven 16ter Ordnung.

§ 3. *Die Cayley-Weber'sche Darstellung der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung.*

I. Die Gleichungsform.

Während die so eben in Betracht gezogene Darstellung an die Gleichungsform der Kummer'schen Fläche bezogen auf eins der 15 Fundamentaltetraeder anknüpfte, gründet sich die jetzt zu besprechende Methode auf die von H. Kummer [33]) gegebene Gleichungsform, welche voraussetzt, dass die Seiten des Coordinatentetraeders Doppelebenen, und die Eckpunkte Knotenpunkte der Fläche sind. Auf diese Gestalt der Gleichung wird man aber geführt, wenn man die 4 ϑ' jener biquadratischen Relation einer nochmaligen quadratischen Transformation unterwirft, so dass man die daraus hervorgehenden ϑ'' auch als aus den ursprünglichen ϑ (ohne Accente) durch Zweiteilung entstanden ansehen kann. Wenn man alsdann die nunmehrigen ϑ''Quadrate — wir bezeichnen sie durch 2 Accente, — durch die 4 ein Vierersystem 2ter Art bildenden ausdrückt, und letztere ϑ''Quadrate den 4 Coordinaten ξ, η, ζ, ω eines Punktes der Fläche gleichsetzt, so erhält man die gewünschte Gleichungsform [34])

$$\sqrt{e_5^2 e_{01}^2 \xi (e_{12}^2 \eta + e_{14}^2 \zeta - e_{03}^2 \omega)} - \sqrt{e_2^2 e_{34}^2 \eta (-e_{03}^2 \zeta + e_{12}^2 \xi + e_{14}^2 \omega} - \sqrt{e_4^2 e_{23}^2 \zeta (e_{14}^2 \xi + e_{03}^2 \eta - e_{12}^2 \omega} = 0.$$

---

32) Siehe Krazer, a. a. O. p. 53.

33) Kummer, Monatsberichte der Berl. Akad. 1864, p. 252.

— Abh. der Berl. Akad., 1866: Ueber algebraische Strahlensysteme.

34) Rohn, Bd. 15. der Annalen, p. 347. In rationaler Form findet man die Gleichung bei H. Krazer, a. a. O. p. 44., Gleichung 4.

Hierin sind die Θ Nullwerte durch e mit angehängten Index bezeichnet, entsprechend der jedesmaligen Charakteristik; die Bezeichnung ist die von Weierstrass.

Die 16 Doppelebenen der Kummer'schen Fläche verwandeln sich nun durch die Berührungstransformation zusammen mit den 16 Knotenpunkten in die 16 Minimalgeraden, die auf der Cyklide liegen. Dieselbe Θ Relation also, welche die Kummer'sche Fläche bezogen auf ein Doppelebenentetraeder darstellt, stellt auch die Cyklide bezogen auf ein Minimallinienquadrupel dar, die sämmtlich der Cyklide angehören. Wie es nun 80 Vierersysteme 2ter Art [35]) giebt, so erhalten wir auch 80 Doppelebenentetraeder.

Den 4 Ebenen eines Tetraeders entsprechen nun im Cyklidenraum 4 Minimalgerade der Cyklide. Je drei der Tetraederebenen schneiden sich aber in einem Knotenpunkte; es entstehen so 4 Knotenpunkte, und diesen müssen ebenfalls 4 Gerade der Cyklide entsprechen. Es können nun, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, 2 Fälle eintreten: die 4 Knotenpunkte liefern entweder

1) dasselbe Geradenquadrupel wie die 4 singul. Ebenen, oder

2) ein Geradenquadrupel, welches mit dem ersten eine Schläfli'sche Doppelvier bildet, und zwar erhalten wir im Ganzen

40 Quadrupel der ersten Art,

40 Quadrupel der zweiten Art, oder 20 Doppelvieren [36]).

Wir haben demnach den Satz:

„Die Relation 4ten Grades, welche zwischen den Θ''Quadraten „besteht, die einem Vierersystem 2ter Art angehören, liefert die „Gleichung der Cyklide bezogen auf eins der 80 Quadrupel, welche „aus den Geraden der Cyklide, entsprechend den 80 Vierersystemen „2ter Art, gebildet werden können; 40 von diesen Quadrupeln haben „die besondere Eigenschaft, 20 Schläfli'sche Doppelcurven zu bil„den".

Indem wir nochmals darauf hinweisen, dass unsere jetzigen Argumente nur halb so gross als die ursprünglichen sind, welche die

---

35) Krazer, a. a. O., Tabelle II., am Schluss.

36) Damit sind aber die Doppelvieren, welche die Geraden der Cyklide bilden können, erschöpft, vergl. Clebsch: Ueber Flächen 4ter Ord. etc. Cr. J. Bd. 69., p. 157.

Digitized by Google

liniengeometrische Darstellung vermittelten, bemerken wir noch, dass die homogenen Coordinaten eines Punktes der Kummer'schen Fläche sich jetzt durch die ϑ''Quadrate ausdrücken, infolgedessen zu einem Punkte die Argumente

$$\pm u + \Pi$$

gehören, wo Π ein beliebiges, auch ungerades Periodenmultiplum bezeichnen kann.

Ebenso bestimmen jetzt im Cyklidenraum

$$\pm u + \Pi$$

ein und dieselbe die Cyklide berührende Minimalgerade, also auch mittelbar einen Punkt der Cyklide, denjenigen, in welchem die Minimalgerade berührt.

„Die Werte, welche die 4 ϑ''Quadrate annehmen, die einem „Vierersystem 2ter Art angehören, liefern die Coordinatenwerte einer „der Minimalgeraden, welche die Cyklide berühren; diese Coordinaten „bleiben ungeändert, wenn wir die Argumente der ϑ''Functionen im „Vorzeichen ändern oder beliebige Periodenmultipla zufügen".

II. Curvensysteme.

a. Die einfachen ϑ''Functionen.

Die 16 einfachen ϑ''Functionen ergeben zunächst, gleich Null gesetzt, auf der Kummer'schen Fläche die Gleichungen der 16 Kegelschnitte, in welchen die 16 Doppelebenen die Kummer'sche Fläche berühren. Ihnen entsprechen auf der Cyklide natürlich die 16 Geraden. Insofern jeder Kegelschnitt durch 5 Knotenpunkte geht, die nicht zu seiner Ebene gehören, erhalten wir bei der Construction der Doppeltangenten ausser der Linienfläche 1ten Grades, welche die Ebene des Kegelschnitts ausfüllt, noch 5 Linien ersten Grades. Denselben entsprechen die 5 Geraden der Cyklide, welche eine vorgegebene Gerade derselben schneiden.

Wir erhalten den Satz:

„Die 16 einfachen Θ''Quadrate, gleich Null gesetzt, liefern die „16 Minimalgeraden, die auf der Cyklide existiren".

b) Die Curvenschaaren $\Theta''(u-e)=0$.

1) $\vartheta_i''(u-e)=0$[37]), wo $e_1 \mid e_2$ einfachen Integralen con-

37) i = einer der 16 Charakteristiken.

Digitized by Google

gruent ist, liefert auf der Kummer'schen Fläche eine Tangentialebene, welche in einem der 16 Knotenpunkte an dieselbe gelegt wird; dieselbe schneidet auf der Kummer'schen Fläche eine Curve 4ter Ordnung aus, welche in dem Knotenpunkt eine Spitze hat.

2) Ist $e_1 \mid e_2$ allgemein, und nehmen wir $e_1 \mid e_2$ in der Gestalt an

$$e_1 \mid e_2 = \frac{v_1' + v_1''}{2} \;\Big|\; \frac{v_2' + v_2''}{2}$$

so liefert

2) $$\vartheta''(u - e) = 0$$

eine Tangentialebene der Kummer'schen Fläche, welche in dem Punkt berührt, dessen Argumente sich in die Gestalt setzen lassen [38])

$$u_1 \mid u_2 = \frac{v_1' - v_1''}{2} \;\Big|\; \frac{v_2' - v_2''}{2}.$$

Diese schneidet auf der Kummer'schen Fläche also eine Curve 4ter Ordnung aus, die in dem betreffenden Punkt einen Doppelpunkt besitzt.

Die Curven 4ter Ordnung, welche auf der Kummer'schen Fläche durch die Gleichung 1) dargestellt werden, verwandeln sich in Curven 8ter Ordnung auf der Cyklide, die eine der Minimalgeraden der Cyklide zur stationären Tangente besitzen; sie bilden den Berührungsschnitt mit Minimallinienflächen 8ter Ordnung, welche den Kugelkreis 4fach enthalten und diejenige Minimallinie als Leitlinie (2fach zählend) besitzen, welche die Cyklide in dem genannten Tangenteninflexionspunkt der Curve berührt.

Wir erhalten den Satz:

„Durch die Gleichungen

$$\Theta_i''(u - e) = 0, \text{ wo } e_1 \mid e_2 \equiv \text{einfachen Integralen,}$$

„werden auf der Cyklide 16 Curvensysteme 8ter Ordnung dargestellt, „welche je eine der 16 Minimalgeraden der Cyklide zur Wendetan„gente besitzen und angesehen werden können als Berührungsschnitt „mit Minimallinienflächen 8ter Ordnung, die den Kugelkreis 4fach „enthalten und die in dem betreffenden Wendepunkt die Cyklide be„rührende Minimalgerade als Leitlinie besitzen".

---

38) Man vergleiche Seminarvortrag des H. Klein, W. S. 82|83. „Ueber die Kummer'sche Fläche".

Digitized by Google

Daran schliesst sich sofort der weitere Satz, die Curven betreffend, die durch 2) dargestellt sind:

„Durch die Gleichungen

$$\vartheta''(u-e)=0 \text{ bei beliebigem } e_1 \mid e_2$$

„werden auf der Cyklide ∞^2 Curven 8ter Ordnung mit Doppelpunkt „dargestellt, die angesehen werden können als Berührungsschnitt mit „Minimallinienflächen 8ter Ordnung, die den Kugelkreis 4fach ent„halten und eine der beiden im Doppelpunkt die Cyklide berühren„den Minimalgeraden als Leitlinie besitzen".

Schlusscapitel.

Beziehungen zwischen Kummer'schen Flächen und Flächen 2ten Grades.

Uebertragen wir die Ergebnisse des letzten Capitels im ersten Teil auf den Raum des linearen Complexes, so erhalten wir hier an Stelle der doppeltberührenden Kreise an 2 Flächen des confocalen Systems Hyperboloide, welche 2 Erzeugende derselben Art enthalten, die Doppeltangenten der einen Kummer'schen Fläche, und 2 weitere Erzeugende derselben Art, die Doppeltangenten der andern Kummerschen Fläche der Schaar [39]) sind, Hyperboloide berühren die Kummer'schen Flächen also in je 4 Punkten. Die Erzeugenden der andern Art der Hyperboloide entsprechen zu je zweien den Kugeln des durch den Bildkreis bestimmten Büschels; den beiden Punktkugeln des Büschels entsprechen (die) 2 $x_6 = 0$ angehörigen Erzeugenden.

Wählen wir 2 Kummer'sche Flächen der Schaar mit den Parametern λ_0 und μ_0 willkürlich heraus und überdies ein Geradenpaar, das $x_6 = 0$ angehört und conjugirt in Bezug auf einen andern der Fundamentalcomplexe ist, so lassen sich durch dieses Geradenpaar 4 Hyperboloide legen, welche die gewünschte Eigenschaft besitzen, mit jeder der Kummer'schen Flächen 2 Doppeltangenten gemein zu haben und auf jeder derselben die Kummer'sche Fläche 2mal zu berühren. Durch ein Doppeltangentenpaar $x_6 = 0$ auf einer der beiden Kummer'schen Flächen selbst, das conjugirt ist in Bezug auf einen der andern 5 Complexe, lassen sich noch 2 Hyperboloide der verlangten Art legen.

Wir haben demnach auf einem solchen Hyperboloide 2 Geraden der ersten Erzeugung. Die $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$ od. 5) und 2 Ge-

---

39) Die Kummer'schen Flächen der Schaar berühren sich längs der ausgezeichn. Haupttang. 8. Ord.

Digitized by Google

rade der 2ten Erzeugung, die $x_6 = 0$ angehören. Die übrigen Geraden der letzten Erzeugung gruppiren sich zu je zweien zu denselben als Doppelelementen einer Involution; entsprechend der Involution des Kugelbüschels mit den Punktkugeln als Doppelelementen. Eine Kugel des Büschels wird zur Ebene; ihr entsprechen die beiden conjugirten Erzeugenden, die die Fundamentalgerade treffen. Die Fundamentalgerade wird noch von 2 Erzeugenden der andern Art geschnitten; letztere entsprechen den Kreispunkten des Ausgangskreises.

Wir haben jetzt im Raum des Complexes $x_6 = 0$, indem wir noch einen der übrigen Fundamentalcomplexe $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$ oder 5) herausgreifen [40]), eine Darstellung der Geradenpaare, jeweils conjugirt in Bezug auf diesen 2ten Fundamentalcomplex, durch 3 Parameter λ, μ, ν, wo

$$a_1 > \nu > a_2, \quad a_2 > \mu > a_3, \quad a_3 > \lambda > a_4.$$

Einem Werttripel λ, μ, ν gehören 8 Geradenpaare an, welche die 3 Kummer'schen Flächen der Schaar, entsprechend den 3 Parametern λ, μ, ν als gemeinschaftliche Doppeltangenten besitzen (cf. p. 235).

Die ∞^2 Schaar von Hyperboloiden wird alsdann analytisch definirt durch die simultanen Differentialgleichungen

$$1) \quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{\Lambda} - \dfrac{d\mu}{M} + \dfrac{d\nu}{N} = 0 \\ \dfrac{\lambda d\lambda}{\Lambda} - \dfrac{\mu d\mu}{M} + \dfrac{\nu d\nu}{N} = 0 \end{cases}$$

wo Λ, M, N die Werte 3) p. 210. besitzen und $\dfrac{d\lambda}{\Lambda} \cdot \dfrac{d\mu}{M} \cdot \dfrac{d\nu}{N}$ sämmtlich dasselbe Vorzeichen besitzen. Um nur mit reellen Grössen zu tun zu haben, lassen wir wiederum die Ungleichungen bestehen

$$2) \quad a_1 > \nu > a_2, \quad \mu_0 > \mu > a_3, \quad \lambda_0 > \lambda > a_4.$$

Der Uebergang von einem Complexgeradenpaar λ, μ, ν zu einem benachbarten $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ giebt uns alsdann eins der 4 in Redestehenden Hyperboloide, wenn dabei die Gleichungen 1) erfüllt werden. Die 4 Hyperboloide sind von einander unterschieden durch die Vorzeichen der Verhältnisse der Wurzelfunctionen Λ, M, N.

Betrachten wir jetzt ein einzelnes der 4 Hyperboloide. Wir lassen das Erzeugendenpaar $(\lambda\,\mu\,\nu)$ — wir wollen es (LL') nennen —

40) Wir wollen $x_5 = 0$ auszeichnen.

Digitized by Google

längs des ganzen Hyperboloids hinlaufen; es werden sich dann die den successiven Erzeugendenpaaren zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, N stetig ändern und ihre Vorzeichen nur mit resp. $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ zusammen ändern, d. h. in den Erzeugendenpaaren resp. $\lambda = a_4$, $\lambda = \lambda_0$; $\mu = a_3$, $\mu = \mu_0$; $\nu = a_2$, $\nu = a_1$; jede Wurzelfunction ändert also ihr Vorzeichen 2 mal auf jeder Hälfte des Hyperboloids [41]).

Geht man von dem Geradenpaar $(LL') = (\lambda\,\mu\,\nu)$ bis zu dem Geradenpaare $(L_0 L_0') = (\lambda_0\,\mu'\,\alpha')$, das Doppeltangentenpaar an die Kummer'sche Fläche λ_0 ist, so ergeben die Differentialgleichungen 1):

$$3)\quad \int_{\nu N}^{\nu' N'} \frac{\nu^{k-1} d\nu}{N} - \int_{\mu M}^{\mu' M'} \frac{\mu^{k-1} d\mu}{M} \int_{\lambda \Lambda}^{\lambda_{01} 0} \frac{\lambda^{\varkappa-1} d\lambda}{\Lambda} = 0 \quad k = 1,\ 2$$

oder

$$4)\quad \int_{a_2}^{\nu N} \frac{\nu^{k-1} d\nu}{N} - \int_{a_3}^{\mu M} \frac{\mu^{k-1} d\mu}{M} + \int_{\lambda_0}^{\lambda_1 \Lambda} \frac{\lambda^{k-1} d\lambda}{\Lambda}$$
$$= \int_{a_2}^{\nu' N'} \frac{\nu^{k-1} d\nu}{N} - \int_{a_3}^{\mu' M'} \frac{\mu^{k-1} d\mu}{M} \quad k = 1,\ 2$$

als Relationen zwischen den Coordinaten $(\nu'\mu')$ der Berührungsdoppeltangente $(L_0 L_0')$ einer der 4 vom Geradenpaar (LL') an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 gehenden Doppelberührungshyperboloide und den Coordinaten $\lambda\mu\nu$ von (LL').

Nun können wir endlich auch Schliessungssätze aufstellen für Gebilde — den Polygonen entsprechend — die aus Teilen von Hyperboloiden zusammen gesetzt sind, welche zu der betrachteten ∞^2 Schaar gehören, Gebilde also, die den Flächen λ_0 und μ_0 umschrieben sind, und ausserdem einer Fläche der Schaar einbeschrieben sein mögen.

Man gelangt zu einem solchen aus Hyperboloidteilen bestehenden Gebilde, indem man von einem Doppeltangentenpaare, conjugirt in Bezug auf $x_5 = 0$ der Kummer'schen Fläche λ ausgeht und, eins der hindurch gehenden 4 Hyperboloide der Schaar beliebig herausgreifend, auf demselben von Erzeugender zur Erzeugender fortschreitet, bis man wiederum zu einem Erzeugendenpaare gelangt, das der Fläche

---

41) Das Hyperboloid wird durch die 2 $x_5 = 0$ angehörigen Erzeugenden in 2 Hälften geteilt.

Digitized by Google

λ angehört. Jetzt verlassen wir das Ausgangshyperboloid und gehen auf dem in Bezug auf λ conjugirten Hyperboloid weiter, für welches Δ das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Bleibt diese Festsetzung auch für alle späteren Schnitte mit der Fläche λ bestehen, so ist dadurch unsere Construction eindeutig bestimmt, nachdem Anfangserzeugendenpaar und Anfangsfläche gegeben sind.

Neben dem einen Polygon (im übertragenen Sinne) erhalten wir ein 2tes conjugirtes, dessen Kanten ebenfalls auf λ liegen, aber das vom ersten durch die Congruenz $x_4 = 0$ $x_6 = 0$ geschieden ist. Auch jetzt ist zu bemerken, dass wir im allgemeinsten Falle nicht 2, sondern ein einziges Polygon erhalten würden mit der doppelten Kantenzahl, welches die Congruenz $x_4 = 0$, $x_6 = 0$ durchsetzt.

Soll die Polygonconstruction sich schliessen, also Endkante mit Anfangskante zusammenfallen, und das letzte Hyperboloid mit dem ersten conjugirt in Bezug auf λ sein, so muss die Bedingung bestehen:

$$5) \qquad 2e \int_{\lambda\Delta}^{\lambda_0} \frac{\lambda^{k-1} d\lambda}{\Delta} - 4m \int_{a_3}^{\mu_0} \frac{\mu^{k-1} d\mu}{M} + 4n \int_{0|2}^{a_1} \frac{\nu^{k-1} d\nu}{N}.$$

Sachgebietsverzeichnis

Siehe auch Verzeichnis der Stichworte

Kapitel

1. Allgemeines, Grundlagen, Recht der EU, Soziale Marktwirtschaft 1
2. Wirtschaftsordnung, Wirtschaftspolitik, Wirtschaftsrecht 3
3. Wirtschaftsstruktur, Wirtschaftsentwicklung, Wirtschaftsprognosen 5
4. Wirtschaftsbeobachtung, Wirtschaftsstatistik, Wirtschaftsindikatoren 7
5. Wirtschaftskreislauf, Volkswirtschaftliche Gesamtrechnung 9
6. Geld, Währung, Kredit, Banken, Börsen 11
7. Preise, Preisbildung, Preispolitik, Preisrecht 13
8. Einkommen, Vermögen, Verteilung, Sozialpolitik 15
9. Produktionsfaktoren, Produktionsfunktionen, Produktivität 17
10. Unternehmen, Unternehmensformen, Unternehmensrecht 19
11. Unternehmenszusammenschlüsse, Kartellrecht, Wettbewerbsrecht 21
12. Unternehmensführung, Management, Organisation 23
13. Investition, Finanzierung, Steuern 25
14. Beschaffung, Lagerhaltung, Logistik 27
15. Produktion, Fertigungsverfahren, Qualitätssicherung 29
16. Absatz, Marketing, Werbung, Handel 31
17. Rechnungswesen, Kostenrechnung, Controlling 33
18. Arbeitsmarkt, Arbeitsrecht, Tarifrecht, Arbeitsschutz 35
19. Personalwesen, Personalwirtschaft, Personalführung 37
20. Außenwirtschaft, Internationale Wirtschaftsbeziehungen, Zahlungsverkehr 39
21. Verkehrswirtschaft, Transportrecht, Versicherungen 41
22. Informationswirtschaft, Informationstechnologie, Kommunikation 43
23. Umwelt, Umweltschutz, Umweltrecht 45
24. Energie, Energiewirtschaft, Energierecht 47
25. Landwirtschaft, Forstwirtschaft, Fischerei 49
26. Bergbau, Rohstoffe, Grundstoffindustrie 51
27. Verarbeitende Industrie, Bauwirtschaft, Handwerk 53
28. Dienstleistungen, Tourismus, Freizeitwirtschaft 55
29. Öffentliche Wirtschaft, Öffentliche Finanzen, Haushaltsrecht 57
30. Verbraucherschutz, Verbraucherrecht, Verbraucherpolitik 59

c. Die ∞^2 Curvenschaar $\Theta'(u-e)=0$
$e_1 \mid e_2$ beliebig 55

§ 3. Die Cayley-Weber'sche Darstellung der Kummer'schen Fläche und ihre Uebertragung.

I. Die Gleichungsform 55

II. Curvensysteme 57

a. Die 16 einfachen ΘFunctionen 57

b. Die Curvenschaaren $\Theta''(u-e)=0$ 57

Schlusscapitel.

Beziehungen zwischen Kummer'schen Flächen und Flächen 2ten Grades 59

Über einen Satz des Gabrielschen.

Von
HANS HAHN (Czernowitz).

In dem 1. Bande dieser Monatshefte (S. 1—56) hat Herr Gabriel einen Satz über Matrizen bewiesen, der folgendermaßen lautet:

Es sei $A = (a_{ik})$ eine Matrix mit n Zeilen und n Kolonnen, deren Elemente a_{ik} sämtlich positiv sind. Es sei λ die größte unter den Zahlen, die folgendermaßen definiert sind:

Es sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ irgendein System von n positiven Zahlen; es sei $y_1, y_2, \ldots, y_n$ das System der Zahlen, die durch die Gleichungen

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert sind; es sei ϱ die größte unter den Zahlen $\frac{y_i}{x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; es sei σ die kleinste unter den Zahlen $\frac{y_i}{x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; es sei λ die untere Grenze der Zahlen ϱ, die man erhält, wenn man für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alle möglichen Systeme von n positiven Zahlen einsetzt.

Es sei μ die größte unter den Zahlen, die folgendermaßen definiert sind:

Es sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ irgendein System von n positiven Zahlen; es sei $y_1, y_2, \ldots, y_n$ das System der Zahlen, die durch die Gleichungen

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert sind; es sei ϱ die größte unter den Zahlen $\frac{y_i}{x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; es sei σ die kleinste unter den Zahlen $\frac{y_i}{x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; es sei μ die obere Grenze der Zahlen σ, die man erhält, wenn man für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alle möglichen Systeme von n positiven Zahlen einsetzt.

Es ist $\lambda = \mu$.

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \Sigma A u^{(i)} (y')^\alpha (y'')^\beta \ldots (y^{(n)})^\lambda$$

wo A eine ganze Zahl ist.

Um den Satz in aller Allgemeinheit zu beweisen, betrachten wir die Functionen

$$u = f(y_1, y_2, \ldots y_l);\ y_1 = \varphi_1(x);\ y_2 = \varphi_2(x); \ldots\ y_l = \varphi_l(x)$$

In unserm Artikel — über die Derivirten beliebiger Ordnung, publicirt im XVIII. Bande des Giornale di Battaglini, haben wir gezeigt, dass die Derivirte $n$ter Ordnung von u nach x durch die Formel gegeben ist:

$$u^{(n)} = \Sigma A \frac{\partial^m f}{\partial {u_1}^\alpha, \partial {y_2}^\beta \ldots} (u_1')^\alpha (u_1'')^\beta \ldots (u_2')^{\alpha'} (u_2'')^{\beta'} \ldots$$

wo A eine ganze Zahl und durch die Formel ausgedrückt ist:

$$A = \frac{n!}{\alpha!\,\beta! \ldots \lambda! \times \alpha'!\,\beta!! \ldots \lambda'! \times \ldots \times (2!)^{\beta+\beta'+\cdots} (3'!)^{\gamma+\gamma'\cdots} \ldots (n!)^{\lambda+\lambda'+\cdots}}$$

wo

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + 3\gamma' + \ldots + n\lambda' + \ldots = n$$

Der Satz ist hiernach vollständig bewiesen.

Aus dem eben Gesagten schliesst man, dass ein Band besteht zwischen den Coefficienten im analytischen Ausdruck der Derivirten $n$ter Ordnung und der Anzahl der Combinationen von n Buchstaben; und so ergibt ein beliebiger Satz aus der einen Doctrin einen entsprechenden Satz der andern, und die mit der einen verknüpften Gegenstände sind es auch mit der andern.

So sind z. B. die Bernoulli'schen Zahlen, gemäss ihrem Ausdruck

$$B_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{2^{2n} - 1} y_0^{(2n-1)}$$

wo $y_0^{(2n-1)}$ die $(2n-1)$te Derivirte der Function

$$y = (1 + e^x)^{-1}$$

für $x = 0$ darstellt, verknüpft mit den in Rede stehenden Coefficienten A mittelst der folgenden Formel:

$$B_{2n-1} = \frac{(2n)!}{2^{2n} - 1} \Sigma \frac{(-1)^{i+n} i!}{2^{i+1} \alpha!\,\beta! \ldots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda}$$

wo

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots (2n-1)\lambda = 2^n - 1$$

Digitized by Google

Um die Bedeutung der Zusammenstellung der Theorie der Derivirten beliebiger Ordnung mit den Combinationen ans Licht zu stellen, wollen wir einen Satz der Theorie der Derivirten herleiten.

Zu diesem Zwecke wollen wir zuerst mittelst einer Derivirten $n$ter Ordnung den Ausdruck der Summe der Coefficienten A suchen, für welche $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$ einen bestimmten Wert i hat.

Setzt man $u = y^i$ in der Formel

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \Sigma A u^{(i)} (y')^\alpha (y'')^\beta \ldots (y^{(n)})^\lambda$$

so werden alle Terme von der Ordnung i an null, weil man hat:

$$u^{(i)} = i!, \quad u^{(i+1)} = u^{(i+2)} = \ldots = 0$$

Macht man nachher $y = e^x - 1$ und $x = 0$, so erhält man gesondert den Term $i$ter Ordnung, weil $y = 0$, $y' = 1$, $y'' = 1$, etc., folglich

$$u = 0, \quad u' = 0, \quad u'' = 0, \quad \ldots u^{(i-1)} = 0$$

Wir haben also

$$\Sigma' A = \frac{1}{i!}\left(\frac{\partial^n (e^x-1)^i}{\partial x^n}\right)_{x=0}$$

wo Σ' die Summe der Werte von A darstellt, welche den Lösungen der Gleichungen

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+h\lambda = n; \quad \alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda = i$$

in positiven ganzen Zahlen entsprechen. Dafür kann man schreiben:

$$i+\beta+2\gamma+\ldots(h-1)\lambda = 0$$

Andrerseits haben wir in Anwendung der Leibnitz'schen Formel:

$$\frac{\partial^n (e^x-1)^i}{\partial x^n} = \left[(e^x-1)(e^x-1)\ldots\right]^{(n)}$$
$$= S\frac{n!\, e^{(i-\mu)x}(e^x-1)^\mu}{h_1!\, h_2! \ldots h_i!}$$

wo die h alle ganzen Zahlen von 0 bis n zu durchlaufen haben, für welche

$$h_1+h_2+\ldots h_i = n \tag{1}$$

ist, und wo μ die Anzahl der h bezeichnet, welche $= 0$ sind, und folglich

$$\left[\frac{\partial^n (e^x-1)^i}{\partial x^n}\right]_{x=0} = S\frac{n!}{h_1!\, h_2! \ldots h_i!}$$

Digitized by Google

wo die h unter der Beschränkung (1) von 1 bis n variiren. Wir haben also:

$$\Sigma' \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(h!)^{\lambda}} = \frac{1}{i!} S \frac{n!}{h_1!h_2!\ldots h_i!}$$

Bezeichnet man nun durch $\varphi(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)$ die Anzahl der Arten, auf welche man mit der Bedingung

$$n = a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots$$

eine Zusammenstellung von a Gruppen zu α, b Gruppen zu β, c Gruppen zu γ Buchstaben u. s. w. bilden kann, so haben wir folgenden Satz:

$$\Sigma\varphi[i+\beta+2\gamma+\ldots+(n-1)\alpha] = \Sigma\varphi(h_1+h_2+\ldots+h_i)$$

das heisst:

„Die Summe aller Anzahlen von Arten, auf welche man, nach „Zerlegung von n auf alle mögliche Arten in $i+\beta+2\gamma+\ldots(n-1)\lambda$, „Zusammenstellungen von i Buchstaben, β Buchstaben, 2 Gruppen zu „γ Buchstaben u. s. w. bilden kann, ist gleich der Summe, welche der Zer„legung von n auf alle möglichen Arten in $h_1+h_2+\ldots+h_i$ entspricht."

Zum Schluss dieses Artikels geben wir noch den Ausdruck von ΣA mittelst der Derivirten beliebiger Ordnung. Setzt man zu diesem Zwecke $u = e^y$ $y = e^x - 1$, so hat man:

$$u^{(i)} = e^y, \quad u_0^{(i)} = 1, \quad y_0 = 0, \quad y_0' = 1, \quad y_0'' = 1, \text{ etc.}$$

und folglich

$$\Sigma A = \left[\frac{\partial^n(e^{e^x}-1)}{\partial x^n}\right]_{x=0}$$

Porto, den 6. Januar 1885.

Digitized by Google

XII.

Zum Molins'schen Problem.

Von

R. Hoppe.

In den Mémoires de l'Acad. des sc., inscr. et b. l. de Toulouse. T. V. hat H. Molins die Aufgabe gestellt und gelöst: in voller Allgemeinheit diejenige Curve in Coordinaten darzustellen, von welcher der Radius der osculirenden Kugel gegebene Function des Krümmungsradius ist. Ohne in den wesentlichen Bestandteilen der Herleitung etwas abzuändern, nehme ich die Aufgabe noch einmal auf, um diese Bestandteile in einfachern Zusammenhang zu bringen, die teilweise Zuziehung geometrischer Betrachtungen, welche dem Einblick keinerweise dienlich ist, durch gleichmässig fortschreitende Rechnung zu ersetzen und zu zeigen, dass der Weg der Lösung, welcher in vorliegender Darstellung durchweg als Invention erscheint, aus der Aufgabe und der ergänzenden willkürlichen Bestimmung sichtlich hervorgeht.

Da zur Bestimmung einer Curve 2 Relationen notwendig sind, die Aufgabe aber nur eine liefert, so muss die allgemeine Lösung eine willkürliche Function enthalten. Es steht uns frei diese von Anfang festzusetzen. Molins hat das Krümmungsverhältniss zur willkürlichen Function des einen Richtungswinkels der Tangente gemacht; letzterer tritt dann als unabhängige Variable im Ausdruck der Curve auf. Wir behalten diese Wahl bei, führen jedoch die ergänzende Relation erst nach erster Integration ein; denn es ist bemerkenswert, dass sich eine solche schon unabhängig davon vollziehen lässt, was bei der Molins'schen Integrationsweise nicht aus Licht kommt.

Die Coordinaten eines Punktes der Curve s seien x, y, z, die Richtungscosinus der Tangente f, g, h, der Hauptnormale f', g', h', der Binormale l, m, n, der Contingenzwinkel der Tangente $\partial\tau$, der Schmiegungsebene $\partial\vartheta$, der Accent bezeichne die Differentiation nach s

Der Krümmungsradius ist hiernach $= s'$. Der Radius der osculirenden Kugel, d. h. derjenigen Kugel, welche durch 4 consecutive Punkte geht, hat, wie bekannt, den Ausdruck:

$$\pi = \sqrt{s'^2 + \left(\frac{\partial s'}{\partial \vartheta}\right)^2} \tag{1}$$

woraus:

$$\partial\vartheta = \frac{\partial s'}{\sqrt{\pi^2 - s'^2}} \tag{2}$$

Der Aufgabe gemäss soll nun π gegebene Function von s' sein. Gl. (2) zeigt, dass dann auch der Torsionswinkel ϑ bekannte Function von s' ist.

Jetzt führen wir ϑ' als willkürliche Function von f ein. Aus dieser Relation allein geht mit Beachtung, dass $\partial l = -f'\partial\vartheta$ ist, hervor:

$$l = -\int f'\partial\vartheta = -\int \vartheta'\partial f$$

Nun ist

$$f^2 + f'^2 + l^2 = 1$$

folglich

$$f' = \sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}$$

oder

$$\partial\tau = \frac{\partial f}{\sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}} \tag{3}$$

oder

$$\partial\vartheta = \frac{\vartheta'\partial f}{\sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}} \tag{4}$$

Dies identificirt mit (2) gibt zwischen s' und f die Relation:

$$\int \frac{\partial s'}{\sqrt{\pi^2 - s'^2}} = \int \frac{\partial\vartheta'\partial f}{\sqrt{1 - f^2 - (\int \vartheta'\partial f)^2}} \tag{5}$$

Was übrig bleibt, ist eine bekannte Aufgabe. Aus f, f', l findet man g, h, indem man setzt:

$$f = \cos\zeta; \quad g = \sin\zeta\cos\eta; \quad h = \sin\zeta\sin\eta \tag{6}$$

woraus durch Differentiation:

$$g' = \zeta'\cos\zeta\cos\eta - \eta'\sin\zeta\sin\eta$$
$$h' = \zeta'\cos\zeta\sin\eta + \eta'\sin\zeta\cos\eta$$

und in Verbindung mit (6):

Digitized by Google

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{k^2 + \sin^2\theta} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{\sin\theta}{k^2 + \sin^2\theta} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \quad \dots \quad (3).$$

Now the equation of energy is

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \frac{k^2 + \sin^2\theta}{k^2 + 1} = 2gz + \text{const.} \quad \dots \quad (4).$$

Eliminating $\frac{d\phi}{dt}$ between (3) and (4), we have

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{k^2 + \sin^2\theta} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{\sin\theta}{k^2 + 1} (2gz + \text{const.}) \quad \dots \quad (5).$$

Multiplying by $2\frac{d\theta}{dt}$ and integrating, we have

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \log(k^2 + \sin^2\theta) - \frac{2}{k^2 + 1} \int (2gz + \text{const.}) \, d\theta \quad \dots \quad (6).$$

Substituting in (4), we have

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{k^2 + 1}{k^2 + \sin^2\theta} \left\{2gz + \text{const.} - \log(k^2 + \sin^2\theta) + \frac{2}{k^2 + 1} \int (2gz + \text{const.}) \, d\theta\right\} \quad \dots \quad (7).$$

Equations (6) and (7) are the complete solution of the problem.

3. *Motion of a sphere on the inside of a fixed spheroid.*

Let a be the equatorial radius of the spheroid, c the polar radius, ρ the radius of the sphere, θ the angle between the normal to the spheroid and the axis of z, ϕ the angle between the plane of zx and the plane through the axis of z and the normal to the spheroid, ψ the angle between the plane of zx and the plane through the axis of z and the point of contact, ω the angle between the plane of zx and the plane through the axis of z and the axis of the sphere, χ the angle between the axis of the sphere and the plane through the axis of z and the point of contact, α the angle between the axis of the sphere and the plane of xy, β the angle between the plane of xy and the plane through the axis of z and the point of contact.

Then we have

$$\tan\theta = \frac{a^2}{c^2} \tan\phi \quad \dots \quad (1),$$

$$\psi = \omega + \chi \quad \dots \quad (2),$$

$$\beta = \alpha + \chi \quad \dots \quad (3).$$

Let x, y, z be the coordinates of the point of contact, ξ, η, ζ the coordinates of the centre of the sphere, p, q, r the component velocities of the point of contact, u, v, w the component velocities of the centre of the sphere, Ω the angular velocity of the sphere, Ω_1 the component angular velocity about the axis of the sphere, Ω_2 the component angular velocity about the line through the centre of the sphere perpendicular to the axis of the sphere and to the line through the point of contact, Ω_3 the component angular velocity about the line through the centre of the sphere perpendicular to the axis of the sphere and to the line through the centre of the spheroid.

Then we have

$$x = a \cos\phi \cos\psi, \quad y = a \cos\phi \sin\psi, \quad z = c \sin\phi \quad \dots \quad (4),$$

$$\xi = x + \rho \cos\theta \cos\psi, \quad \eta = y + \rho \cos\theta \sin\psi, \quad \zeta = z + \rho \sin\theta \quad \dots \quad (5),$$

$$p = -a \sin\phi \cos\psi \frac{d\phi}{dt} - a \cos\phi \sin\psi \frac{d\psi}{dt}, \quad q = -a \sin\phi \sin\psi \frac{d\phi}{dt} + a \cos\phi \cos\psi \frac{d\psi}{dt}, \quad r = c \cos\phi \frac{d\phi}{dt} \quad \dots \quad (6),$$

$$u = p - \rho \sin\theta \cos\psi \frac{d\theta}{dt} - \rho \cos\theta \sin\psi \frac{d\psi}{dt}, \quad v = q - \rho \sin\theta \sin\psi \frac{d\theta}{dt} + \rho \cos\theta \cos\psi \frac{d\psi}{dt}, \quad w = r + \rho \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \quad \dots \quad (7),$$

$$\Omega_1 = \Omega \cos\alpha, \quad \Omega_2 = \Omega \sin\alpha \cos\chi, \quad \Omega_3 = \Omega \sin\alpha \sin\chi \quad \dots \quad (8),$$

$$u = \Omega_1 \rho \cos\beta \sin\psi - \Omega_2 \rho \sin\beta \sin\psi - \Omega_3 \rho \cos\psi, \quad v = -\Omega_1 \rho \cos\beta \cos\psi + \Omega_2 \rho \sin\beta \cos\psi - \Omega_3 \rho \sin\psi \quad \dots \quad (9),$$

$$w = -\Omega_1 \rho \sin\beta - \Omega_2 \rho \cos\beta \quad \dots \quad (10).$$

Eliminating $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ between (9) and (10), we have

$$u \cos\beta \sin\psi - v \cos\beta \cos\psi + w \sin\beta = 0 \quad \dots \quad (11).$$

Substituting in (11) the values of u, v, w from (7), we have

$$\frac{d\theta}{dt} \sin\beta + \frac{d\psi}{dt} \cos\beta (\sin\theta \sin\psi \sin\beta + \cos\theta \cos\psi) = \frac{p}{\rho} \cos\beta \sin\psi - \frac{q}{\rho} \cos\beta \cos\psi + \frac{r}{\rho} \sin\beta \quad \dots \quad (12).$$

Substituting in (12) the values of p, q, r from (6), we have

$$\frac{d\theta}{dt} \sin\beta + \frac{d\psi}{dt} \cos\beta (\sin\theta \sin\psi \sin\beta + \cos\theta \cos\psi) = -\frac{a}{\rho} \cos\beta \sin\phi \frac{d\phi}{dt} + \frac{c}{\rho} \sin\beta \cos\phi \frac{d\phi}{dt} \quad \dots \quad (13).$$

Substituting in (13) the values of θ and β from (1) and (3), we have

$$\frac{d\theta}{dt} \sin(\alpha + \chi) + \frac{d\psi}{dt} \cos(\alpha + \chi) (\sin\theta \sin\psi \sin(\alpha + \chi) + \cos\theta \cos\psi) = -\frac{a}{\rho} \cos(\alpha + \chi) \sin\phi \frac{d\phi}{dt} + \frac{c}{\rho} \sin(\alpha + \chi) \cos\phi \frac{d\phi}{dt} \quad \dots \quad (14).$$

Substituting in (14) the values of θ and ψ from (1) and (2), we have

$$\frac{d\chi}{dt} \sin(\alpha + \chi) + \left(\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right) \cos(\alpha + \chi) \left(\frac{a^2}{c^2} \tan\phi \sin(\omega + \chi) \sin(\alpha + \chi) + \cos(\omega + \chi)\right) = -\frac{a}{\rho} \cos(\alpha + \chi) \sin\phi \frac{d\phi}{dt} + \frac{c}{\rho} \sin(\alpha + \chi) \cos\phi \frac{d\phi}{dt} \quad \dots \quad (15).$$

Now the equation of energy is

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \left(\frac{a^2}{c^2} \cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \cos^2\phi + \frac{2}{5} \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = 2g(z - \zeta) + \text{const.} \quad \dots \quad (16).$$

Substituting in (16) the values of z and ζ from (4) and (5), we have

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \left(\frac{a^2}{c^2} \cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \cos^2\phi + \frac{2}{5} \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = 2g(c \sin\phi - \rho \sin\theta) + \text{const.} \quad \dots \quad (17).$$

Substituting in (17) the value of θ from (1), we have

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \left(\frac{a^2}{c^2} \cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \cos^2\phi + \frac{2}{5} \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = 2g\left(c \sin\phi - \rho \frac{a^2}{c^2} \tan\phi\right) + \text{const.} \quad \dots \quad (18).$$

Equations (15) and (18) are the complete solution of the problem.

The binary exponential backoff algorithm was chosen to dynamically adapt the number of stations trying to gain access to the channel. If it used too large a number, after a collision the idle period might be too long, and the channel would often be unnecessarily idle. If it chose too many stations might collide again, and in fact with each successive collision the probability of a second collision following the retransmission increases. Backing off by doubling the interval each time a station unsuccessfully tries to acquire the channel means that the retransmission interval will approximately match the amount of load, thus providing a stable solution.

As mentioned above, the first version of Ethernet ran at 2.94 Mbps and used 8-bit addresses. Destination addresses could be 16 bits, 48 bits, or broadcast. The experimental Ethernet also supported multicast addressing. Each packet contained a 16-bit type field that told the receiver what to do with the packet. Multicast addressing and the type field are also used in modern Ethernet.

Between 1979 and 1980, Ethernet evolved to the 10-Mbps standard that is now known as DIX 1.0, named after its three developers: Digital, Intel, and Xerox. This standard was revised in 1982 into DIX 2.0, which is the only version that is actually implemented. It is also almost the only version that will ever be implemented. In 1983, the IEEE standard was published. Although there are minor differences between DIX 2.0 and IEEE 802.3, they are not large. Ethernet has become extremely widespread, and nearly every computer system sold today comes with an Ethernet interface built in. Ethernet has become the dominant LAN technology and will probably remain so for years to come.

3.2.2 Ethernet Cabling

Ethernet has evolved through four generations of cabling technology and five generations of speeds. The original cable was a single, thick, coaxial cable with the bits encoded using Manchester encoding. This cable formed the ether, with a maximum length of 2.5 km (three segments with two repeaters). A station was connected by tapping into the cable and making a connection to the transceiver. The tap could be made anywhere along the cable, as all points on the cable had the same voltage. The transceiver contained the electronics that encoded and decoded the bits. It was also responsible for detecting when it was safe to transmit and for detecting collisions. The transceiver was connected by a short cable to a board in the computer containing a controller chip that managed the transmission and reception of frames.

The 10Base5 cabling soon gave way to 10Base2 cabling, which was cheaper and easier to install. It also was coaxial, but used connectors that were simple BNC plugs and sockets. Cables could be connected together with a T-shaped connector that fit between the network interface card and the cable. Cables could be up to 185 m long, but could not be used to connect stations over 30 m apart. Only 10Base2 cabling was used in the first LAN we built at VU.

Both 10Base5 and 10Base2 cabling are rarely used anymore, but they are still listed in the current standard. Perhaps they will be removed in the next revision. Nevertheless, they are still found in many buildings around the world.

Next came 10Base-T, which solved many cabling problems. It was cheap, flexible, and easy to maintain. It also was coaxial, but used connectors that were simple BNC plugs and sockets. Cables could be connected together with a T-shaped connector that fit between the network interface card and the cable. Cables could be up to 185 m long, but could not be used to connect stations over 30 m apart. Only 10Base2 cabling was used in the first LAN we built at VU.

Both 10Base5 and 10Base2 cabling are rarely used anymore, but they are still listed in the current standard. Perhaps they will be removed in the next revision. Nevertheless, they are still found in many buildings around the world.

Next came 10Base-T, which solved many cabling problems. It was cheap, flexible, and easy to maintain. It also

Theorem 2. Let $\mathcal{L}$ be a Lie algebra over a field K of characteristic $p > 0$. Then

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} \binom{p-1}{i} x^i = -\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p-i} \binom{p-1}{i} x^i$$

XII.

Ueber Ordnung von Gemeinden und geraden Flächen.

Von

A. Voss.

In der Abhandlung „Ueber die Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt“ (Bd. 97 dieses Journals) habe ich gezeigt, dass eine Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt, welche keine Gerade enthält, sich durch eine Gleichung von der Form

$$\varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_3 + \varphi_4 = 0$$

darstellen lässt, wo φ_2, φ_3, φ_4 ganze Functionen zweiter, dritter, vierter Dimension der Coordinaten sind. Ich habe ferner gezeigt, dass eine solche Fläche eine Gemeinde von 16 Punkten besitzt, welche durch die Gleichungen

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 \varphi_3 + \varphi_4 = 0$$

bestimmt sind, und dass diese Gemeinde die Eigenschaft hat, dass jede Fläche dritter Ordnung, welche durch 15 Punkte derselben geht, auch durch den 16ten geht. Ich habe endlich gezeigt, dass jede Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt, welche eine Gerade enthält, sich durch eine Gleichung von der Form

$$\varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_3 = 0$$

darstellen lässt, und dass eine solche Fläche eine Gemeinde von 12 Punkten besitzt, welche durch die Gleichungen

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 \varphi_3 = 0$$

bestimmt sind, und dass diese Gemeinde die Eigenschaft hat, dass jede Fläche dritter Ordnung, welche durch 11 Punkte derselben geht, auch durch den 12ten geht.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \cdots\right) \tag{1}$$

$$\frac{dM}{dt} = n\left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \cdots\right) \tag{2}$$

$$\frac{dM}{dt} = n\left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \cdots\right) \tag{3}$$

Equation (3) is the desired result. Note that the series is a geometric series.

Example 6.2.1

Given $e = 0.1$, find $\frac{dM}{dt}$ to 3 decimal places.

Solution: Using the first three terms of the series in (3),

$$\frac{dM}{dt} = n\left(1 + \frac{3}{4}(0.1)^2 + \frac{45}{64}(0.1)^4\right) = n(1.008)$$

Example 6.2.2

Given $e = 0.2$, find $\frac{dM}{dt}$ to 3 decimal places.

Solution: Using the first three terms of the series in (3),

$$\frac{dM}{dt} = n\left(1 + \frac{3}{4}(0.2)^2 + \frac{45}{64}(0.2)^4\right) = n(1.035)$$

Example 6.2.3

Given $e = 0.3$, find $\frac{dM}{dt}$ to 3 decimal places.

Solution: Using the first three terms of the series in (3),

$$\frac{dM}{dt} = n\left(1 + \frac{3}{4}(0.3)^2 + \frac{45}{64}(0.3)^4\right) = n(1.079)$$

ferner die Quadratsumme der Gl. (2) (3):

$$r^2 \frac{\partial s^2 - \partial r^2}{\partial t^2} = \alpha^2 c^4 \cos^2\beta \tag{8}$$

und nach Elimination von ∂s^2 durch Gl. (6):

$$\frac{r^2 \partial r^2}{\partial t^2} = -\varkappa^2 r^2 + 2c^2 gr - \alpha^2 c^4 \cos^2\beta \tag{9}$$

Sei nun

$$\sin\gamma = \frac{\alpha\varkappa}{g}\cos\beta \tag{10}$$

$$r = \frac{c^2 g}{\varkappa^2}(1 + \cos\gamma\cos\psi) \tag{11}$$

dann werden die Gl. (9) (5):

$$\left(\frac{r\,\partial r}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{c^2 g\cos\gamma\sin\psi}{\varkappa}\right)^2 \tag{12}$$

$$\frac{y\,\partial z - z\,\partial y}{\partial t} = \frac{c^2 g\sin\gamma\cos\beta}{\varkappa} \tag{13}$$

Nehmen wir im Anfang, wo r mit t wächst, $\sin\psi$ positiv, so wird nach Gl. (12) (11):

$$\partial t = -\frac{r\,\partial\psi}{\varkappa} = -\frac{c^2 g}{\varkappa^3}(1 + \cos\gamma\cos\psi)\,\partial\psi \tag{14}$$

integrirt:

$$t = \frac{c^2 g}{\varkappa^3}\{\psi_0 - \psi + \cos\gamma(\sin\psi_0 - \sin\psi)\} \tag{15}$$

und zwar ist nach Gl. (11)

$$\cos\gamma\cos\psi_0 = \frac{\varkappa^2}{cg} - 1 \tag{16}$$

Jetzt wird nach Gl. (7)

$$p^2 = -\varkappa^2 + 2cg - \frac{c^2 g^2}{\varkappa^2}\sin^2\gamma = \left(\frac{cg}{\varkappa}\cos\gamma\right)^2 - \left(\varkappa - \frac{cg}{\varkappa}\right)^2$$

$$= \left(\frac{cg}{\varkappa}\cos\gamma\sin\psi_0\right)^2$$

daher

$$\cos\gamma\sin\psi_0 = \frac{p\varkappa}{cg} \tag{17}$$

woraus sich der kleine Winkel ψ_0 besser bestimmt als aus Gl. (16).

Digitized by Google

Hence, adopting the notation used in Section 2.1, we have

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{I} \tag{2.3}$$

Suppose that $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are related by $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, where $\mathbf{A}$ is a matrix whose elements are independent of $\mathbf{x}$. Then

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{A} \tag{2.4}$$

as will be verified in Exercise 2.1.

Similarly, if $z = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, where $\mathbf{A}$ is a symmetric matrix, then

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}^T} = 2\mathbf{x}^T\mathbf{A} \tag{2.5}$$

Again, this will be verified in Exercise 2.1.

Nimmt man besonders grosse Werte, nämlich für p die von einer Kanone erzeugte Geschwindigkeit 500 Meter, und den Ausgangspunkt im Aequator, so werden die Grössen

$$\left.\begin{aligned}\mu &= \frac{\alpha^2 c \cos^2\beta}{g} = 0{,}0032283\\ \nu &= \frac{p^2}{gc} = 0{,}0039988\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

in denen sich alle Grössen darstellen, noch immer klein genug zur schnellen Annäherung, wenn wir Reihen nach Potenzen derselben entwickeln.

Unmittelbar gibt Gl. (7):

$$x^2 = 2cg\left(1-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\right) \qquad (28)$$

woraus nach Gl. (10):

$$\sin\gamma = \sqrt{2\mu}\left\{1-\frac{\mu+\nu}{4}-\frac{(\mu+\nu)^2}{32}-\ldots\right\}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\left(1+\frac{\mu-\nu}{4}+\frac{3\mu^2-14\mu\nu-\nu^2}{32}+\ldots\right)$$

nach Gl. (17)

$$\cos\gamma\sin\psi_0 = \sqrt{2\nu}\left\{1-\frac{\mu+\nu}{4}-\frac{(\mu+\nu)^2}{32}-\ldots\right\}$$

$$\sin\psi_0 = \sqrt{2\nu}\left(1+\frac{3\mu-\nu}{4}+\frac{23\mu^2-26\mu\nu-\nu^2}{32}+\ldots\right)$$

$$\psi_0 = \sqrt{2\nu}\left(1+\frac{3\mu}{4}+\frac{\nu}{12}+\frac{23\mu^2}{32}-\frac{\mu\nu}{16}+\frac{3\nu^2}{160}+\ldots\right)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2} = \sqrt{\frac{\nu}{2}}\left(1+\frac{3\mu+\nu}{4}+\frac{23\mu^2+10\mu\nu+3\nu^2}{32}+\ldots\right)$$

$$\psi_0+\cos\gamma\sin\psi_0 = 2\sqrt{2\nu}\left(1+\frac{\mu}{4}-\frac{\nu}{12}+\frac{11\mu^2}{32}-\frac{\mu\nu}{16}-\frac{\nu^2}{160}-\ldots\right)$$

dann nach Gl. (15), wo $\psi = -\psi_0$ zu setzen, mit Berücksichtigung, dass

$$x^{-3} = (2gc)^{-\frac{3}{2}}\left\{1+3\frac{\mu+\nu}{4}+\frac{15(\mu+\nu)}{32}+\ldots\right\}$$

ist:

Digitized by Google

$$\frac{\partial \ln(S_t)}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t} \text{ et } \frac{\partial^2 \ln(S_t)}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2}$$

Ainsi on a :

$$\frac{\partial \ln(S_t)}{\partial t} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$$

Et donc :

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$$

Et finalement :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$$

Si on note maintenant $\mu = r$ on a bien $S_t = S_0 e^{rt}$

Si on note $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ on a bien $S_t = S_0 e^{\mu t}$

Exercice 2

On considère un actif S de valeur S_0 à l'instant 0 et de valeur S_t à l'instant t. On suppose que S_t suit un mouvement brownien géométrique :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$$

où W_t est un mouvement brownien standard.

a) Pour quelle valeur de μ le processus $(S_t)_{t \geq 0}$ est-il une martingale ? Dans la suite on prendra cette valeur de μ.

b) Calculer $\mathbb{E}[S_t]$ et $\mathrm{Var}(S_t)$.

c) Calculer $\mathbb{E}[S_t S_s]$ pour $s \leq t$.

d) Pour $s \leq t$, calculer $\mathbb{E}[S_t \mid S_s]$.

e) Pour $s \leq t$, calculer $\mathbb{E}[S_t^2 \mid S_s]$.

f) Pour $s \leq t$, calculer $\mathrm{Var}(S_t \mid S_s)$.

In dieser Entfernung = 155 Meter hätte das Geschoss noch gesehen werden können, doch konnte es auch leicht der Beachtung entgehen, wenn die Richtung nicht vorher berechnet war. Aus λ und β' ergibt sich eine Richtung fast 35^0 von West nach Süd.

Die umgekehrte Aufgabe, aus der Entfernung

$$\delta = \sqrt{\lambda^2 + \beta'^2}$$

die Anfangsgeschwindigkeit zu berechnen, lässt sich nicht direct durch Reihenentwickelung lösen; doch kann man, da p Function von δ ist, eine Tafel darüber aufstellen. Man findet, wenn $\frac{\beta'}{\lambda} = \operatorname{tg} \zeta$:

δ	p	ζ
0,001	1,686	90^0
0,01	5,320	$89^0,12$
0,1	16,815	$87^0,23$
1	52,90	$81^0,33$
10	160,30	$65^0,21$
100	423,36	$39^0,29$
1000	971,17	$19_0'$,63

Es liegt nahe, auch für beliebige Elevation die Abweichung der Geschosse vom Zielpunkte infolge der Erdrotation zu berechnen. Unter diesem Gesichtspunkt hat Biehringer in Schlömilch's Zeitschrift Bd. XXVIII. S. 157. die Frage behandelt. In beiden Fällen ist die absolute Bewegung geometrisch bekannt als Ellipse, um den Erdmittelpunkt als Brennpunkt beschrieben, also kein Problem zu lösen.

Digitized by Google

PART I.

The Court Courts.

The Bishop of Exeter as Consolidation Scheme.

By Lord Ashbourne.

A.D. 1911.

The Bill, which has been introduced by the Bishop of Exeter, is a measure which has been long needed, and which will be welcomed by all who have had to do with the Court Courts. It is a measure which will be welcomed by all who have had to do with the Court Courts. It is a measure which will be welcomed by all who have had to do with the Court Courts. It is a measure

Anderen Conoidflächen nennen, und deren Entstehungsweise folgende ist: Gegeben ist eine Ebene, die Director-Ebene, eine auf dieser Ebene senkrecht stehende Gerade und eine ebene Curve, deren Ebene auf der Directorebene senkrecht steht. Eine gerade Linie bewegt sich längs dieser Curve so hin, dass sie stets der Directorebene parallel bleibt und durch die gegebene feste Gerade geht.

Unsere Aufgabe ist es, aus dieser Gruppe diejenigen Flächen zu untersuchen, deren Leitlinie ein Kegelschnitt ist, unter der näheren Voraussetzung, dass die singuläre Kante, durch welche alle erzeugenden Geraden gehen, einer Axe des Leitkegelschnitts parallel ist. Wir wollen die Flächen in Folgendem als Cono-Cunei bezeichnen, und zwar je nachdem der Leitkegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, als elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Cono-Cuneus.

Wie man nun gerade und schiefe Kegel unterscheidet, so können wir auch einen Unterschied zwischen geraden und schiefen Cono-Cuneis machen. Unter den geraden Cono-Cuneis verstehen wir dabei diejenigen, bei denen die Ebene, welche durch die singuläre Kante und durch die entsprechende Axe des Leitkegelschnittes geht, auf der Ebene des Leitkegelschnitts senkrecht steht Ist dies nicht der Fall, sondern bilden diese beiden Ebenen einen schiefen Winkel mit einander, so nennen wir diese Flächen schiefe Cono-Cunei. Von den letzteren wollen wir diejenigen etwas näher untersuchen, bei denen die Projection der singulären Kante auf die Leitkegelschnittebene mit einer Scheiteltangente des Leitkegelschnitts zusammenfällt und diese Flächen wollen wir als Scheitel-Cono-Cunei bezeichnen.

§ 2.

Jeder Kegelschnitt hat im Allgemeinen zwei aufeinander senkrecht stehende Axen. Es würden sich demnach 6 verschiedene gerade Cono-Cunei ergeben. Von diesen sind indessen, wie sich später zeigen wird, zunächst die beiden elliptischen identisch. Anders verhält es sich, wenn der Leitkegelschnitt eine Hyperbel ist. Wir wollen hierbei diejenige Fläche, welche entsteht, wenn die Projection der singulären Kante auf die Leithyperbelebene mit der reellen Axe der Leithyperbel zusammenfällt, den geteilten, und diejenige, bei welcher die Projection der singulären Kante in die imaginäre Axe der Leithyperbel fällt, den einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus nennen.

Was schliesslich die Parabel betrifft, so hat diese nur eine im Endlichen liegende Axe; die andere ist ins Unendliche gerückt. Be-

Jesus, which was taken up from you into heaven, shall so come in like manner as you have seen him go into heaven.

12 Then returned they unto Jerusalem from the mount called Olivet, which is from Jerusalem a sabbath day's journey.

13 And when they were come in, they went up into an upper room, where abode both Peter, and James, and John, and Andrew, Philip, and Thomas, Bartholomew, and Matthew, James the son of Alphæus, and Simon Zelotes, and Judas the brother of James.

14 These all continued with one accord in prayer and supplication, with the women, and Mary the mother of Jesus, and with his brethren.

15 And in those days Peter stood up in the midst of the disciples, and said, (the number of names together were about an hundred and twenty,)

16 Men and brethren, this scripture must needs have been fulfilled, which the Holy Ghost by the mouth of David spake before concerning Judas, which was guide to them that took Jesus.

17 For he was numbered with us, and had obtained part of this ministry.

18 Now this man purchased a field with the reward of iniquity; and falling headlong, he burst asunder in the midst, and all his bowels gushed out.

19 And it was known unto all the dwellers at Jerusalem; insomuch as that field is called in their proper tongue, Aceldama, that is to say, The field of blood.

20 For it is written in the book of Psalms, Let his habitation be desolate, and let no man dwell therein: and his bishoprick let another take.

21 Wherefore of these men which have companied with us all the time that the Lord Jesus went in and out among us,

22 Beginning from the baptism of John, unto that same day that he was taken up from us, must one be ordained to be a witness with us of his resurrection.

23 And they appointed two, Joseph called Barsabas, who was surnamed Justus, and Matthias.

24 And they prayed, and said, Thou, Lord, which knowest the hearts of all men, shew whether of these two thou hast chosen,

25 That he may take part of this ministry and apostleship, from which Judas by transgression fell, that he might go to his own place.

26 And they gave forth their lots; and the lot fell upon Matthias; and he was numbered with the eleven apostles.

CHAPTER 2

1 And when the day of Pentecost was fully come, they were all with one accord in one place.

2 And suddenly there came a sound from heaven as of a rushing mighty wind, and it filled all the house where they were sitting.

3 And there appeared unto them cloven tongues like as of fire, and it sat upon each of them.

4 And they were all filled with the Holy Ghost, and began to speak with other tongues, as the Spirit gave them utterance.

5 And there were dwelling at Jerusalem Jews, devout men, out of every nation under heaven.

6 Now when this was noised abroad, the multitude came together, and were confounded, because that every man heard them speak in his own language.

7 And they were all amazed and marvelled, saying one to another, Behold, are not all these which speak Galilæans?

8 And how hear we every man in our own tongue, wherein we were born?

9 Parthians, and Medes, and Elamites, and the dwellers in Mesopotamia, and in Judæa, and Cappadocia, in Pontus, and Asia,

10 Phrygia, and Pamphylia, in Egypt, and in the parts of Libya about Cyrene, and strangers of Rome, Jews and proselytes,

11 Cretes and Arabians, we do hear them speak in our tongues the wonderful works of God.

12 And they were all amazed, and were in doubt, saying one to another, What meaneth this?

13 Others mocking said, These men are full of new wine.

14 But Peter, standing up with the eleven, lifted up his voice, and said unto them, Ye men of Judæa, and all ye that dwell at Jerusalem, be this known unto you, and hearken to my words:

15 For these are not drunken, as ye suppose, seeing it is but the third hour of the day.

16 But this is that which was spoken by the prophet Joel;

17 And it shall come to pass in the last days, saith God, I will pour out of my Spirit upon all flesh: and your sons and your daughters shall prophesy, and your young men shall see visions, and your old men shall dream dreams:

18 And on my servants and on my handmaidens I will pour out in those days of my Spirit; and they shall prophesy:

19 And I will shew wonders in heaven above, and signs in the earth beneath; blood, and fire, and vapour of smoke:

20 The sun shall be turned into darkness, and the moon into blood, before that great and notable day of the Lord come:

21 And it shall come to pass, that whosoever shall call on the name of the Lord shall be saved.

22 Ye men of Israel, hear these words; Jesus of Nazareth, a man approved of God among you by miracles and wonders and signs, which God did by him in the midst of you, as ye yourselves also know:

23 Him, being delivered by the determinate counsel and foreknowledge of God, ye have taken, and by wicked hands have crucified and slain:

24 Whom God hath raised up, having loosed the pains of death: because it was not possible that he should be holden of it.

25 For David speaketh concerning him, I foresaw the Lord always before my face, for he is on my right hand, that I should not be moved:

26 Therefore did my heart rejoice, and my tongue was glad; moreover also my flesh shall rest in hope:

27 Because thou wilt not leave my soul in hell, neither wilt thou suffer thine Holy One to see corruption.

28 Thou hast made known to me the ways of life; thou shalt make me full of joy with thy countenance.

29 Men and brethren, let me freely speak unto you of the patriarch David, that he is both dead and buried, and his sepulchre is with us unto this day.

30 Therefore being a prophet, and knowing that God had sworn with an oath to him, that of the fruit of his loins, according to the flesh, he would raise up Christ to sit on his throne;

31 He seeing this before spake of the resurrection of Christ, that his soul was not left in hell, neither his flesh did see corruption.

32 This Jesus hath God raised up, whereof we all are witnesses.

33 Therefore being by the right hand of God exalted, and having received of the Father the promise of the Holy Ghost, he hath shed forth this, which ye now see and hear.

34 For David is not ascended into the heavens: but he saith himself, The Lord said unto my Lord, Sit thou on my right hand,

35 Until I make thy foes thy footstool.

36 Therefore let all the house of Israel know assuredly, that God hath made that same Jesus, whom ye have crucified, both Lord and Christ.

37 Now when they heard this, they were pricked in their heart, and said unto Peter and to the rest of the apostles, Men and brethren, what shall we do?

38 Then Peter said unto them, Repent, and be baptized every one of you in the name of Jesus Christ for the remission of sins, and ye shall receive the gift of the Holy Ghost.

39 For the promise is unto you, and to your children, and to all that are afar off, even as many as the Lord our God shall call.

40 And with many other words did he testify and exhort, saying, Save yourselves from this untoward generation.

41 Then they that gladly received his word were baptized: and the same day there were added unto them about three thousand souls.

42 And they continued stedfastly in the apostles' doctrine and fellowship, and in breaking of bread, and in prayers.

43 And fear came upon every soul: and many wonders and signs were done by the apostles.

44 And all that believed were together, and had all things common;

45 And sold their possessions and goods, and parted them to all men, as every man had need.

46 And they, continuing daily with one accord in the temple, and breaking bread from house to house, did eat their meat with gladness and singleness of heart,

47 Praising God, and having favour with all the people. And the Lord added to the church daily such as should be saved.

CHAPTER 3

1 Now Peter and John went up together into the temple at the hour of prayer, being the ninth hour.

2 And a certain man lame from his mother's womb was carried, whom they laid daily at the gate of the temple which is called Beautiful, to ask alms of them that entered into the temple;

3 Who seeing Peter and John about to go into the temple asked an alms.

4 And Peter, fastening his eyes upon him with John, said, Look on us.

5 And he gave heed unto them, expecting to receive something of them.

6 Then Peter said, Silver and gold have I none; but such as I have give I thee: In the name of Jesus Christ of Nazareth rise up and walk.

7 And he took him by the right hand, and lifted him up: and immediately his feet and ankle bones received strength.

8 And he leaping up stood, and walked, and entered with them into the temple, walking, and leaping, and praising God.

9 And all the people saw him walking and praising God:

10 And they knew that it was he which sat for alms at the beautiful gate of the temple: and they were filled with wonder and amazement at that which had happened unto him.

11 And as the lame man which was healed held Peter and John, all the people ran together unto them in the porch that is called Solomon's, greatly wondering.

12 And when Peter saw it, he answered unto the people, Ye men of Israel, why marvel ye at this? or why look ye so earnestly on us, as though by our own power or holiness we had made this man to walk?

13 The God of Abraham, and of Isaac, and of Jacob, the God of our fathers, hath glorified his Son Jesus; whom ye delivered up, and denied him in the presence of Pilate, when he was determined to let him go.

14 But ye denied the Holy One and the Just, and desired a murderer to be granted unto you;

15 And killed the Prince of life, whom God hath raised from the dead; whereof we are witnesses.

16 And his name through faith in his name hath made this man strong, whom ye see and know: yea, the faith which is by him hath given him this perfect soundness in the presence of you all.

17 And now, brethren, I wot that through ignorance ye did it, as did also your rulers.

18 But those things, which God before had shewed by the mouth of all his prophets, that Christ should suffer, he hath so fulfilled.

19 Repent ye therefore, and be converted, that your sins may be blotted out, when the times of refreshing shall come from the presence of the Lord.

20 And he shall send Jesus Christ, which before was preached unto you:

21 Whom the heaven must receive until the times of restitution of all things, which God hath spoken by the mouth of all his holy prophets since the world began.

22 For Moses truly said unto the fathers, A prophet shall the Lord your God raise up unto you of your brethren, like unto me; him shall ye hear in all things whatsoever he shall say unto you.

23 And it shall come to pass, that every soul, which will not hear that prophet, shall be destroyed from among the people.

24 Yea, and all the prophets from Samuel and those that follow after, as many as have spoken, have likewise foretold of these days.

25 Ye are the children of the prophets, and of the covenant which God made with our fathers, saying unto Abraham, And in thy seed shall all the kindreds of the earth be blessed.

26 Unto you first God, having raised up his Son Jesus, sent him to bless you, in turning away every one of you from his iniquities.

CHAPTER 4

1 And as they spake unto the people, the priests, and the captain of the temple, and the Sadducees, came upon them,

2 Being grieved that they taught the people, and preached through Jesus the resurrection from the dead.

3 And they laid hands on them, and put them in hold unto the next day: for it was now eventide.

4 Howbeit many of them which heard the word believed; and the number of the men was about five thousand.

5 And it came to pass on the morrow, that their rulers, and elders, and scribes,

6 And Annas the high priest, and Caiaphas, and John, and Alexander, and as many as were of the kindred of the high priest, were gathered together at Jerusalem.

7 And when they had set them in the midst, they asked, By what power, or by what name, have ye done this?

8 Then Peter, filled with the Holy Ghost, said unto them, Ye rulers of the people, and elders of Israel,

9 If we this day be examined of the good deed done to the impotent man, by what means he is made whole;

10 Be it known unto you all, and to all the people of Israel, that by the name of Jesus Christ of Nazareth, whom ye crucified, whom God raised from the dead, even by him doth this man stand here before you whole.

11 This is the stone which was set at nought of you builders, which is become the head of the corner.

12 Neither is there salvation in any other: for there is none other name under heaven given among men, whereby we must be saved.

13 Now when they saw the boldness of Peter and John, and perceived that they were unlearned and ignorant men, they marvelled; and they took knowledge of them, that they had been with Jesus.

14 And beholding the man which was healed standing with them, they could say nothing against it.

15 But when they had commanded them to go aside out of the council, they conferred among themselves,

16 Saying, What shall we do to these men? for that indeed also hath been done by them is manifest to all them that dwell in Jerusalem; and we cannot deny it.

17 But that it spread no further among the people, let us straitly threaten them, that they speak henceforth to no man in this name.

18 And they called them, and commanded them not to speak at all nor teach in the name of Jesus.

19 But Peter and John answered and said unto them, Whether it be right in the sight of God to hearken unto you more than unto God, judge ye.

20 For we cannot but speak the things which we have seen and heard.

21 So when they had further threatened them, they let them go, finding nothing how they might punish them, because of the people: for all men glorified God for that which was done.

22 For the man was above forty years old, on whom this miracle of healing was shewed.

23 And being let go, they went to their own company, and reported all that the chief priests and elders had said unto them.

24 And when they heard that, they lifted up their voice to God with one accord, and said, Lord, thou art God, which hast made heaven, and earth, and the sea, and all that in them is:

25 Who by the mouth of thy servant David hast said, Why did the heathen rage, and the people imagine vain things?

26 The kings of the earth stood up, and the rulers were gathered together against the Lord, and against his Christ.

27 For of a truth against thy holy child Jesus, whom thou hast anointed, both Herod, and Pontius Pilate, with the Gentiles, and the people of Israel, were gathered together,

28 For to do whatsoever thy hand and thy counsel determined before to be done.

29 And now, Lord, behold their threatenings: and grant unto thy servants, that with all boldness they may speak thy word,

30 By stretching forth thine hand to heal; and that signs and wonders may be done by the name of thy holy child Jesus.

31 And when they had prayed, the place was shaken where they were assembled together; and they were all filled with the Holy Ghost, and they spake the word of God with boldness.

32 And the multitude of them that believed were of one heart and of one soul: neither said any of them that aught of the things which he possessed was his own; but they had all things common.

33 And with great power gave the apostles witness of the resurrection of the Lord Jesus: and great grace was upon them all.

34 Neither was there any among them that lacked: for as many as were possessors of lands or houses sold them, and brought the prices of the things that were sold,

35 And laid them down at the apostles' feet: and distribution was made unto every man according as he had need.

36 And Joses, who by the apostles was surnamed Barnabas, (which is, being interpreted, The son of consolation,) a Levite, and of the country of Cyprus,

37 Having land, sold it, and brought the money, and laid it at the apostles' feet.

CHAPTER 5

1 But a certain man named Ananias, with Sapphira his wife, sold a possession,

2 And kept back part of the price, his wife also being privy to it, and brought a certain part, and laid it at the apostles' feet.

3 But Peter said, Ananias, why hath Satan filled thine heart to lie to the Holy Ghost, and to keep back part of the price of the land?

4 Whiles it remained, was it not thine own? and after it was sold, was it not in thine own power? why hast thou conceived this thing in thine heart? thou hast not lied unto men, but unto God.

5 And Ananias hearing these words fell down, and gave up the ghost: and great fear came on all them that heard these things.

6 And the young men arose, wound him up, and carried him out, and buried him.

7 And it was about the space of three hours after, when his wife, not knowing what was done, came in.

8 And Peter answered unto her, Tell me whether ye sold the land for so much? And she said, Yea, for so much.

9 Then Peter said unto her, How is it that ye have agreed together to tempt the Spirit of the Lord? behold, the feet of them which have buried thy husband are at the door, and shall carry thee out.

10 Then fell she down straightway at his feet, and yielded up the ghost: and the young men came in, and found her dead, and, carrying her forth, buried her by her husband.

11 And great fear came upon all the church, and upon as many as heard these things.

12 And by the hands of the apostles were many signs and wonders wrought among the people; (and they were all with one accord in Solomon's porch.

13 And of the rest durst no man join himself to them: but the people magnified them.

14 And believers were the more added to the Lord, multitudes both of men and women.)

15 Insomuch that they brought forth the sick into the streets, and laid them on beds and couches, that at the least the shadow of Peter passing by might overshadow some of them.

16 There came also a multitude out of the cities round about unto Jerusalem, bringing sick folks, and them which were vexed with unclean spirits: and they were healed every one.

17 Then the high priest rose up, and all they that were with him, (which is the sect of the Sadducees,) and were filled with indignation,

18 And laid their hands on the apostles, and put them in the common prison.

19 But the angel of the Lord by night opened the prison doors, and brought them forth, and said,

20 Go, stand and speak in the temple to the people all the words of this life.

21 And when they heard that, they entered into the temple early in the morning, and taught. But the high priest came, and they that were with him, and called the council together, and all the senate of the children of Israel, and sent to the prison to have them brought.

22 But when the officers came, and found them not in the prison, they returned, and told,

23 Saying, The prison truly found we shut with all safety, and the keepers standing without before the doors: but when we had opened, we found no man within.

24 Now when the high priest and the captain of the temple and the chief priests heard these things, they doubted of them whereunto this would grow.

25 Then came one and told them, saying, Behold, the men whom ye put in prison are standing in the temple, and teaching the people.

26 Then went the captain with the officers, and brought them without violence: for they feared the people, lest they should have been stoned.

27 And when they had brought them, they set them before the council: and the high priest asked them,

28 Saying, Did not we straitly command you that ye should not teach in this name? and, behold, ye have filled Jerusalem with your doctrine, and intend to bring this man's blood upon us.

29 Then Peter and the other apostles answered and said, We ought to obey God rather than men.

30 The God of our fathers raised up Jesus, whom ye slew and hanged on a tree.

31 Him hath God exalted with his right hand to be a Prince and a Saviour, for to give repentance to Israel, and forgiveness of sins.

32 And we are his witnesses of these things; and so is also the Holy Ghost, whom God hath given to them that obey him.

33 When they heard that, they were cut to the heart, and took counsel to slay them.

34 Then stood there up one in the council, a Pharisee, named Gamaliel, a doctor of the law, had in reputation among all the people, and commanded to put the apostles forth a little space;

35 And said unto them, Ye men of Israel, take heed to yourselves what ye intend to do as touching these men.

36 For before these days rose up Theudas, boasting himself to be somebody; to whom a number of men, about four hundred, joined themselves: who was slain; and all, as many as obeyed him, were scattered, and brought to nought.

37 After this man rose up Judas of Galilee in the days of the taxing, and drew away much people after him: he also perished; and all, even as many as obeyed him, were dispersed.

38 And now I say unto you, Refrain from these men, and let them alone: for if this counsel or this work be of men, it will come to nought:

39 But if it be of God, ye cannot overthrow it; lest haply ye be found even to fight against God.

40 And to him they agreed: and when they had called the apostles, and beaten them, they commanded that they should not speak in the name of Jesus, and let them go.

41 And they departed from the presence of the council, rejoicing that they were counted worthy to suffer shame for his name.

42 And daily in the temple, and in every house, they ceased not to teach and preach Jesus Christ.

CHAPTER 6

1 And in those days, when the number of the disciples was multiplied, there arose a murmuring of the Grecians against the Hebrews, because their widows were neglected in the daily ministration.

2 Then the twelve called the multitude of the disciples unto them, and said, It is not reason that we should leave the word of God, and serve tables.

3 Wherefore, brethren, look ye out among you seven men of honest report, full of the Holy Ghost and wisdom, whom we may appoint over this business.

4 But we will give ourselves continually to prayer, and to the ministry of the word.

5 And the saying pleased the whole multitude: and they chose Stephen, a man full of faith and of the Holy Ghost, and Philip, and Prochorus, and Nicanor, and Timon, and Parmenas, and Nicolas a proselyte of Antioch:

6 Whom they set before the apostles: and when they had prayed, they laid their hands on them.

7 And the word of God increased; and the number of the disciples multiplied in Jerusalem greatly; and a great company of the priests were obedient to the faith.

8 And Stephen, full of faith and power, did great wonders and miracles among the people.

9 Then there arose certain of the synagogue, which is called the synagogue of the Libertines, and Cyrenians, and Alexandrians, and of them of Cilicia and of Asia, disputing with Stephen.

10 And they were not able to resist the wisdom and the spirit by which he spake.

11 Then they suborned men, which said, We have heard him speak blasphemous words against Moses, and against God.

12 And they stirred up the people, and the elders, and the scribes, and came upon him, and caught him, and brought him to the council,

13 And set up false witnesses, which said, This man ceaseth not to speak blasphemous words against this holy place, and the law:

14 For we have heard him say, that this Jesus of Nazareth shall destroy this place, and shall change the customs which Moses delivered us.

15 And all that sat in the council, looking stedfastly on him, saw his face as it had been the face of an angel.

CHAPTER 7

1 Then said the high priest, Are these things so?

2 And he said, Men, brethren, and fathers, hearken; The God of glory appeared unto our father Abraham, when he was in Mesopotamia, before he dwelt in Charran,

3 And said unto him, Get thee out of thy country, and from thy kindred, and come into the land which I shall shew thee.

4 Then came he out of the land of the Chaldæans, and dwelt in Charran: and from thence, when his father was dead, he removed him into this land, wherein ye now dwell.

5 And he gave him none inheritance in it, no, not so much as to set his foot on: yet he promised that he would give it to him for a possession, and to his seed after him, when as yet he had no child.

6 And God spake on this wise, That his seed should sojourn in a strange land; and that they should bring them into bondage, and entreat them evil four hundred years.

7 And the nation to whom they shall be in bondage will I judge, said God: and after that shall they come forth, and serve me in this place.

8 And he gave him the covenant of circumcision: and so Abraham begat Isaac, and circumcised him the eighth day; and Isaac begat Jacob; and Jacob begat the twelve patriarchs.

9 And the patriarchs, moved with envy, sold Joseph into Egypt: but God was with him,

10 And delivered him out of all his afflictions, and gave him favour and wisdom in the sight of Pharaoh king of Egypt; and he made him governor over Egypt and all his house.

11 Now there came a dearth over all the land of Egypt and Chanaan, and great affliction: and our fathers found no sustenance.

12 But when Jacob heard that there was corn in Egypt, he sent out our fathers first.

13 And at the second time Joseph was made known to his brethren; and Joseph's kindred was made known unto Pharaoh.

14 Then sent Joseph, and called his father Jacob to him, and all his kindred, threescore and fifteen souls.

15 So Jacob went down into Egypt, and died, he, and our fathers,

16 And were carried over into Sychem, and laid in the sepulchre that Abraham bought for a sum of money of the sons of Emmor the father of Sychem.

17 But when the time of the promise drew nigh, which God had sworn to Abraham, the people grew and multiplied in Egypt,

18 Till the time arose that another king arose, which knew not Joseph.

19 The same dealt subtilly with our kindred, and evil entreated our fathers, so that they cast out their young children, to the end they might not live.

20 In which time Moses was born, and was exceeding fair, and nourished up in his father's house three months:

21 And when he was cast out, Pharaoh's daughter took him up, and nourished him for her own son.

22 And Moses was learned in all the wisdom of the Egyptians, and was mighty in words and in deeds.

23 And when he was full forty years old, it came into his heart to visit his brethren the children of Israel.

24 And seeing one of them suffer wrong, he defended him, and avenged him that was oppressed, and smote the Egyptian:

25 For he supposed his brethren would have understood how that God by his hand would deliver them: but they understood not.

26 And the next day he shewed himself unto them as they strove, and would have set them at one again, saying, Sirs, ye are brethren; why do ye wrong one to another?

27 But he that did his neighbour wrong thrust him away, saying, Who made thee a ruler and a judge over us?

28 Will thou kill me, as thou didst the Egyptian yesterday?

29 Then fled Moses at this saying, and was a stranger in the land of Madian, where he begat two sons.

30 And when forty years were expired, there appeared to him in the wilderness of mount Sina an angel of the Lord in a flame of fire in a bush.

31 When Moses saw it, he wondered at the sight: and as he drew near to behold it, the voice of the Lord came unto him,

32 Saying, I am the God of thy fathers, the God of Abraham, and Isaac, and Jacob. Then Moses trembled, and durst not behold.

33 Then said the Lord to him, Put off thy shoes from thy feet: for the place where thou standest is holy ground.

34 I have seen, I have seen the affliction of my people which is in Egypt, and I have heard their groaning, and am come down to deliver them. And now come, I will send thee into Egypt.

35 This Moses whom they refused, saying, Who made thee a ruler and a judge? the same did God send to be a ruler and a deliverer by the hand of the angel which appeared to him in the bush.

36 He brought them out, after that he had shewed wonders and signs in the land of Egypt, and in the Red sea, and in the wilderness forty years.

37 This is that Moses, which said unto the children of Israel, A prophet shall the Lord your God raise up unto you of your brethren, like unto me; him shall ye hear.

38 This is he, that was in the church in the wilderness with the angel which spake to him in the mount Sina, and with our fathers: who received the lively oracles to give unto us:

39 To whom our fathers would not obey, but thrust him from them, and in their hearts turned back again into Egypt,

40 Saying unto Aaron, Make us gods to go before us: for as for this Moses, which brought us out of the land of Egypt, we wot not what is become of him.

41 And they made a calf in those days, and offered sacrifice unto the idol, and rejoiced in the works of their own hands.

42 Then God turned, and gave them up to worship the host of heaven; as it is written in the book of the prophets, O ye house of Israel, have ye offered to me slain beasts and sacrifices by the space of forty years in the wilderness?

43 Yea, ye took up the tabernacle of Moloch, and the star of your god Remphan, figures which ye made to worship them: and I will carry you away beyond Babylon.

44 Our fathers had the tabernacle of witness in the wilderness, as he had appointed, speaking unto Moses, that he should make it according to the fashion that he had seen.

45 Which also our fathers that came after brought in with Jesus into the possession of the Gentiles, whom God drave out before the face of our fathers, unto the days of David;

46 Who found favour before God, and desired to find a tabernacle for the God of Jacob.

47 But Solomon built him an house.

48 Howbeit the most High dwelleth not in temples made with hands; as saith the prophet,

49 Heaven is my throne, and earth is my footstool: what house will ye build me? saith the Lord: or what is the place of my rest?

50 Hath not my hand made all these things?

51 Ye stiffnecked and uncircumcised in heart and ears, ye do always resist the Holy Ghost: as your fathers did, so do ye.

52 Which of the prophets have not your fathers persecuted? and they have slain them which shewed before of the coming of the Just One; of whom ye have been now the betrayers and murderers:

53 Who have received the law by the disposition of angels, and have not kept it.

54 When they heard these things, they were cut to the heart, and they gnashed on him with their teeth.

55 But he, being full of the Holy Ghost, looked up stedfastly into heaven, and saw the glory of God, and Jesus standing on the right hand of God,

56 And said, Behold, I see the heavens opened, and the Son of man standing on the right hand of God.

57 Then they cried out with a loud voice, and stopped their ears, and ran upon him with one accord,

58 And cast him out of the city, and stoned him: and the witnesses laid down their clothes at a young man's feet, whose name was Saul.

59 And they stoned Stephen, calling upon God, and saying, Lord Jesus, receive my spirit.

60 And he kneeled down, and cried with a loud voice, Lord, lay not this sin to their charge. And when he had said this, he fell asleep.

CHAPTER 8

1 And Saul was consenting unto his death. At that time there was a great persecution against the church which was at Jerusalem; and they were all scattered abroad throughout the regions of Judæa and Samaria, except the apostles.

2 And devout men carried Stephen to his burial, and made great lamentation over him.

3 As for Saul, he made havock of the church, entering into every house, and haling men and women committed them to prison.

4 Therefore they that were scattered abroad went every where preaching the word.

5 Then Philip went down to the city of Samaria, and preached Christ unto them.

6 And the people with one accord gave heed unto those things which Philip spake, hearing and seeing the miracles which he did.

7 For unclean spirits, crying with loud voice, came out of many that were possessed with them: and many taken with palsies, and that were lame, were healed.

8 And there was great joy in that city.

9 But there was certain man, called Simon, which before time in the same city used sorcery, and bewitched the people of Samaria, giving out that himself was some great one:

10 To whom they all gave heed, from the least to the greatest, saying, This man is the great power of God.

11 And to him they had regard, because that of long time he had bewitched them with sorceries.

12 But when they believed Philip preaching the things concerning the kingdom of God, and the name of Jesus Christ, they were baptized, both men and women.

13 Then Simon himself believed also: and when he was baptized, he continued with Philip, and wondered, beholding the miracles and signs which were done.

14 Now when the apostles which were at Jerusalem heard that Samaria had received the word of God, they sent unto them Peter and John:

15 Who, when they were come down, prayed for them, that they might receive the Holy Ghost:

16 (For as yet he was fallen upon none of them: only they were baptized in the name of the Lord Jesus.)

17 Then laid they their hands on them, and they received the Holy Ghost.

18 And when Simon saw that through laying on of the apostles' hands the Holy Ghost was given, he offered them money,

19 Saying, Give me also this power, that on whomsoever I lay hands, he may receive the Holy Ghost.

20 But Peter said unto him, Thy money perish with thee, because thou hast thought that the gift of God may be purchased with money.

21 Thou hast neither part nor lot in this matter: for thy heart is not right in the sight of God.

22 Repent therefore of this thy wickedness, and pray God, if perhaps the thought of thine heart may be forgiven thee.

23 For I perceive that thou art in the gall of bitterness, and in the bond of iniquity.

24 Then answered Simon, and said, Pray ye to the Lord for me, that none of these things which ye have spoken come upon me.

25 And they, when they had testified and preached the word of the Lord, returned to Jerusalem, and preached the gospel in many villages of the Samaritans.

26 And the angel of the Lord spake unto Philip, saying, Arise, and go toward the south unto the way that goeth down from Jerusalem unto Gaza, which is desert.

27 And he arose and went: and, behold, a man of Ethiopia, an eunuch of great authority under Candace queen of the Ethiopians, who had the charge of all her treasure, and had come to Jerusalem for to worship,

28 Was returning, and sitting in his chariot read Esaias the prophet.

29 Then the Spirit said unto Philip, Go near, and join thyself to this chariot.

30 And Philip ran thither to him, and heard him read the prophet Esaias, and said, Understandest thou what thou readest?

31 And he said, How can I, except some man should guide me? And he desired Philip that he would come up and sit with him.

32 The place of the scripture which he read was this, He was led as a sheep to the slaughter; and like a lamb dumb before his shearer, so opened he not his mouth:

33 In his humiliation his judgment was taken away: and who shall declare his generation? for his life is taken from the earth.

34 And the eunuch answered Philip, and said, I pray thee, of whom speaketh the prophet this? of himself, or of some other man?

35 Then Philip opened his mouth, and began at the same scripture, and preached unto him Jesus.

36 And as they went on their way, they came unto a certain water: and the eunuch said, See, here is water; what doth hinder me to be baptized?

37 And Philip said, If thou believest with all thine heart, thou mayest. And he answered and said, I believe that Jesus Christ is the Son of God.

38 And he commanded the chariot to stand still: and they went down both into the water, both Philip and the eunuch; and he baptized him.

39 And when they were come up out of the water, the Spirit of the Lord caught away Philip, that the eunuch saw him no more: and he went on his way rejoicing.

40 But Philip was found at Azotus: and passing through he preached in all the cities, till he came to Cæsarea.

CHAPTER 9

1 And Saul, yet breathing out threatenings and slaughter against the disciples of the Lord, went unto the high priest,

2 And desired of him letters to Damascus to the synagogues, that if he found any of this way, whether they were men or women, he might bring them bound unto Jerusalem.

3 And as he journeyed, he came near Damascus: and suddenly there shined round about him a light from heaven:

4 And he fell to the earth, and heard a voice saying unto him, Saul, Saul, why persecutest thou me?

5 And he said, Who art thou, Lord? And the Lord said, I am Jesus whom thou persecutest: it is hard for thee to kick against the pricks.

6 And he trembling and astonished said, Lord, what wilt thou have me to do? And the Lord said unto him, Arise, and go into the city, and it shall be told thee what thou must do.

7 And the men which journeyed with him stood speechless, hearing a voice, but seeing no man.

8 And Saul arose from the earth; and when his eyes were opened, he saw no man: but they led him by the hand, and brought him into Damascus.

9 And he was three days without sight, and neither did eat nor drink.

10 And there was a certain disciple at Damascus, named Ananias; and to him said the Lord in a vision, Ananias. And he said, Behold, I am here, Lord.

11 And the Lord said unto him, Arise, and go into the street which is called Straight, and inquire in the house of Judas for one called Saul of Tarsus: for, behold, he prayeth,

12 And hath seen in a vision a man named Ananias coming in, and putting his hand on him, that he might receive his sight.

13 Then Ananias answered, Lord, I have heard by many of this man, how much evil he hath done to thy saints at Jerusalem:

14 And here he hath authority from the chief priests to bind all that call on thy name.

15 But the Lord said unto him, Go thy way: for he is a chosen vessel unto me, to bear my name before the Gentiles, and kings, and the children of Israel:

16 For I will shew him how great things he must suffer for my name's sake.

17 And Ananias went his way, and entered into the house; and putting his hands on him said, Brother Saul, the Lord, even Jesus, that appeared unto thee in the way as thou camest, hath sent me, that thou mightest receive thy sight, and be filled with the Holy Ghost.

18 And immediately there fell from his eyes as it had been scales: and he received sight forthwith, and arose, and was baptized.

19 And when he had received meat, he was strengthened. Then was Saul certain days with the disciples which were at Damascus.

20 And straightway he preached Christ in the synagogues, that he is the Son of God.

21 But all that heard him were amazed, and said, Is not this he that destroyed them which called on this name in Jerusalem, and came hither for that intent, that he might bring them bound unto the chief priests?

22 But Saul increased the more in strength, and confounded the Jews which dwelt at Damascus, proving that this is very Christ.

23 And after that many days were fulfilled, the Jews took counsel to kill him:

24 But their laying wait was known of Saul. And they watched the gates day and night to kill him.

25 Then the disciples took him by night, and let him down by the wall in a basket.

26 And when Saul was come to Jerusalem, he assayed to join himself to the disciples: but they were all afraid of him, and believed not that he was a disciple.

27 But Barnabas took him, and brought him to the apostles, and declared unto them how he had seen the Lord in the way, and that he had spoken to him, and how he had preached boldly at Damascus in the name of Jesus.

28 And he was with them coming in and going out at Jerusalem.

29 And he spake boldly in the name of the Lord Jesus, and disputed against the Grecians: but they went about to slay him.

30 Which when the brethren knew, they brought him down to Cæsarea, and sent him forth to Tarsus.

31 Then had the churches rest throughout all Judæa and Galilee and Samaria, and were edified; and walking in the fear of the Lord, and in the comfort of the Holy Ghost, were multiplied.

32 And it came to pass, as Peter passed throughout all quarters, he came down also to the saints which dwelt at Lydda.

33 And there he found a certain man named Æneas, which had kept his bed eight years, and was sick of the palsy.

34 And Peter said unto him, Æneas, Jesus Christ maketh thee whole: arise, and make thy bed. And he arose immediately.

35 And all that dwelt at Lydda and Saron saw him, and turned to the Lord.

36 Now there was at Joppa a certain disciple named Tabitha, which by interpretation is called Dorcas: this woman was full of good works and almsdeeds which she did.

37 And it came to pass in those days, that she was sick, and died: whom when they had washed, they laid her in an upper chamber.

38 And forasmuch as Lydda was nigh to Joppa, and the disciples had heard that Peter was there, they sent unto him two men, desiring him that he would not delay to come to them.

39 Then Peter arose and went with them. When he was come, they brought him into the upper chamber: and all the widows stood by him weeping, and shewing the coats and garments which Dorcas made, while she was with them.

40 But Peter put them all forth, and kneeled down, and prayed; and turning him to the body said, Tabitha, arise. And she opened her eyes: and when she saw Peter, she sat up.

41 And he gave her his hand, and lifted her up, and when he had called the saints and widows, presented her alive.

42 And it was known throughout all Joppa; and many believed in the Lord.

43 And it came to pass, that he tarried many days in Joppa with one Simon a tanner.

CHAPTER 10

1 There was a certain man in Cæsarea called Cornelius, a centurion of the band called the Italian band,

2 A devout man, and one that feared God with all his house, which gave much alms to the people, and prayed to God always.

3 He saw in a vision evidently about the ninth hour of the day an angel of God coming in to him, and saying unto him, Cornelius.

4 And when he looked on him, he was afraid, and said, What is it, Lord? And he said unto him, Thy prayers and thine alms are come up for a memorial before God.

5 And now send men to Joppa, and call for one Simon, whose surname is Peter:

6 He lodgeth with one Simon a tanner, whose house is by the sea side: he shall tell thee what thou oughtest to do.

7 And when the angel which spake unto Cornelius was departed, he called two of his household servants, and a devout soldier of them that waited on him continually;

8 And when he had declared all these things unto them, he sent them to Joppa.

9 On the morrow, as they went on their journey, and drew nigh unto the city, Peter went up upon the house top to pray about the sixth hour:

10 And he became very hungry, and would have eaten: but while they made ready, he fell into a trance,

11 And saw heaven opened, and a certain vessel descending unto him, as it had been a great sheet knit at the four corners, and let down to the earth:

12 Wherein were all manner of four footed beasts of the earth, and wild beasts, and creeping things, and fowls of the air.

13 And there came a voice to him, Rise, Peter; kill, and eat.

14 But Peter said, Not so, Lord; for I have never eaten any thing that is common or unclean.

15 And the voice spake unto him again the second time, What God hath cleansed, that call not thou common.

16 This was done thrice: and the vessel was received up again into heaven.

17 Now while Peter doubted in himself what this vision which he had seen should mean, behold, the men which were sent from Cornelius had made inquiry for Simon's house, and stood before the gate,

18 And called, and asked whether Simon, which was surnamed Peter, were lodged there.

19 While Peter thought on the vision, the Spirit said unto him, Behold, three men seek thee.

20 Arise therefore, and get thee down, and go with them, doubting nothing: for I have sent them.

21 Then Peter went down to the men which were sent unto him from Cornelius; and said, Behold, I am he whom ye seek: what is the cause wherefore ye are come?

22 And they said, Cornelius the centurion, a just man, and one that feareth God, and of good report among all the nation of the Jews, was warned from God by a holy angel to send for thee into his house, and to hear words of thee.

23 Then called he them in, and lodged them. And on the morrow Peter went away with them, and certain brethren from Joppa accompanied him.

24 And the morrow after they entered into Cæsarea. And Cornelius waited for them, and had called together his kinsmen and near friends.

25 And as Peter was coming in, Cornelius met him, and fell down at his feet, and worshipped him.

26 But Peter took him up, saying, Stand up; I myself also am a man.

27 And as he talked with him, he went in, and found many that were come together.

28 And he said unto them, Ye know how that it is an unlawful thing for a man that is a Jew to keep company, or come unto one of another nation; but God hath shewed me that I should not call any man common or unclean.

29 Therefore came I unto you without gainsaying, as soon as I was sent for: I ask therefore for what intent ye have sent for me?

30 And Cornelius said, Four days ago I was fasting until this hour; and at the ninth hour I prayed in my house, and, behold, a man stood before me in bright clothing,

31 And said, Cornelius, thy prayer is heard, and thine alms are had in remembrance in the sight of God.

32 Send therefore to Joppa, and call hither Simon, whose surname is Peter; he is lodged in the house of one Simon a tanner by the sea side: who, when he cometh, shall speak unto thee.

33 Immediately therefore I sent to thee; and thou hast well done that thou art come. Now therefore are we all here present before God, to hear all things that are commanded thee of God.

34 Then Peter opened his mouth, and said, Of a truth I perceive that God is no respecter of persons:

35 But in every nation he that feareth him, and worketh righteousness, is accepted with him.

36 The word which God sent unto the children of Israel, preaching peace by Jesus Christ: (he is Lord of all:)

37 That word, I say, ye know, which was published throughout all Judæa, and began from Galilee, after the baptism which John preached;

38 How God anointed Jesus of Nazareth with the Holy

indessen diejenige Fläche, bei welcher die Projection der singulären Kante auf die Leithyperbelebene in einem Endpunkte der imaginären Axe auf dieser Axe senkrecht steht, den geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus nennen.

Für die parabolischen Scheitel-Cono-Cunei ergeben sich ähnliche Beziehungen wie für die geraden. Man erhält hierbei nur einen eigentlichen Cono-Cuneus, da es nur eine im Endlichen liegende Scheiteltangente der Parabel giebt. Wir können diesen mithin kurz den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus nennen. Der andere wird ebenso wie der betreffende gerade im Allgemeinen ein parabolischer Cylinder, mit dem einzigen Unterschiede, dass hier die Projectionen der Erzeugenden auf die Leitparabelebene auf der im Endlichen liegenden Axe der Parabel senkrecht stehen, während sie bei den anderen dieser Parabelaxe parallel waren.

Bemerkt sei schliesslich noch, dass die Kegelschnitte in speciellen Fällen zu geraden Linien degeneriren können. Alsdann erhält man im Allgemeinen die aus der analytischen Geometrie bekannten hyperbolischen Paraboloide.

Wir haben demnach folgende 8 Flächen zu betrachten:

1) den geraden elliptischen Cono-Cuneus
2) den geteilten
3) den einfachen } geraden hyperbolischen Cono-Cuneus
4) den geraden parabolischen Cono-Cuneus
5) den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus
6) den einfachen
7) den geteilten } hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus
8) den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus.

§ 4.

Bevor wir auf die Betrachtung der definirten Cono-Cunei eingehen, wollen wir allgemein die Gleichung der Flächen ableiten, deren Leitlinie durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \eta = f(\xi) \\ \zeta = c \end{cases}$$

dargestellt wird. Die Erzeugenden sollen der YZ-Ebene parallel sein und durch die X-Axe gehen. Dieselben müssen daher den Gleichungen genügen:

Digitized by Google

$$\begin{cases} x = v \\ y = u \,.\, z \end{cases} \tag{2}$$

hierbei sind u und v beliebige Grössen, welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass die Erzeugenden die Leitlinie (1) schneiden, welche Bedingung darin besteht, dass die Coordinaten x, y, z den Gleichungen (1) genügen. Für dieselbe ergiebt sich demnach:

$$c \,.\, u = f(v) \tag{3}$$

Eliminirt man nun u und v aus den Gleichungen (2) und (3), so erhält man als Gleichung der gesuchten geradlinigen Fläche:

$$cy = z \,.\, f(x) \tag{4}$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass für den Fall, wo die Leitlinie der Gleichung:

$$y^n = f(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m \tag{5}$$

genügt, wobei A_0, $A_1, \ldots A_m$ Constante bedeuten, die Fläche vom $(m+n)$ten Grade ist. Hat die Leitlinie speciell die Gleichung:

$$y = f(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m, \tag{6}$$

so ist die vorgelegte Fläche vom $(m+1)$ten Grade.

§ 5.

An die Gleichung (4) wollen wir einige allgemeine Bemerkungen knüpfen. Schneiden wir zu diesem Zwecke die vorgelegte Fläche (4) durch die zur XY-Ebene parallele Ebene:

$$z = h,$$

so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Fläche (4) auf die XY-Ebene:

$$y = \frac{h}{c} f(x) \tag{7}$$

Aus der Vergleichung von (1) und (7) resultirt:

Die zur XY-Ebene parallelen Ebenen schneiden aus der vorgelegten Fläche (4) Curven, deren Ordinaten für dasselbe x proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der XY-Ebene wachsen. Für $z = h = 0$ degenerirt die ausgeschnittene Curve zur X-Achse, für $z = h = \infty$ besteht dieselbe aus so vielen zur Y-Achse parallelen Geraden, in wie viel Punkten die Leitlinie der Fläche (4) die XZ-Ebene schneidet.

Ferner erhält man für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene

$$y = k$$

mit der vorgelegten Fläche auf die *XZ*-Ebene:

$$ck = z \,.\, f(x) \tag{8}$$

Daraus geht hervor, dass jede zur *XZ*-Ebene parallele Ebene die vorgelegte Fläche (4) im Allgemeinen in einer Curve schneidet, deren Grad gleich dem Grade der Fläche ist.

Um diese Curve genauer zu untersuchen, bilden wir:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{ck\,f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{ck\,\{f(x)\,.\,f''(x) - [f'(x)]^2\}}{[f(x)]^3}$$

Hieraus ergeben sich die Relationen:

Die Tangenten in denjenigen Punkten der Durchschnittscurve (8), welche Punkten der Leitlinie der betreffenden Fläche entsprechen, in denen die Tangenten an die Leitlinie der *XZ*-Ebene parallel ist, sind der *X*-Axe parallel.

Die Durchschnittscurve (8) nähert sich asymptotisch den auf der *X*-Axe senkrecht stehenden Ebenen, welche durch die Durchschnittspunkte der Leitlinie mit der *XZ*-Ebene gehen.

Ist $k \gtrless 0$, so ist die Durchschnittscurve convex oder concav nach der *X*-Axe hin, je nachdem:

$$f(x)\,.\,f''(x) - [f'(x)]^2 \lessgtr 0$$

ist. Wendepunkte kann diese Curve nur besitzen, wenn die Gleichung:

$$f(x)\,.\,f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$$

reelle Werte für x liefert

Schliesslich folgt für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene

$$x = l$$

mit der Fläche (4) auf die *YZ*-Ebene:

$$cy = z \,.\, f(l) \tag{9}$$

d. h. die zur Directorebene parallelen Ebenen schneiden aus der vorgelegten Fläche die Erzeugenden derselben aus.

Wenn die Art der Verwendung eine Änderung des Patents, des Gebrauchsmusters oder der Eintragung erfordert, so ist diese Änderung zu beantragen.

Die Gebühr für die Eintragung beträgt

bei Patenten, Gebrauchsmustern und Eintragungen, die vor dem 1. Januar 1968 angemeldet worden sind, 50 DM,

bei Patenten, Gebrauchsmustern und Eintragungen, die nach dem 31. Dezember 1967 angemeldet worden sind, 100 DM.

Die Gebühr ist mit dem Antrag auf Eintragung zu entrichten.

Wenn die Art der Verwendung eine Änderung des Patents, des Gebrauchsmusters oder der Eintragung erfordert, so ist diese Änderung zu beantragen.

Die Gebühr für die Eintragung beträgt

bei Patenten, Gebrauchsmustern und Eintragungen, die vor dem 1. Januar 1968 angemeldet worden sind, 50 DM,

bei Patenten, Gebrauchsmustern und Eintragungen, die nach dem 31. Dezember 1967 angemeldet worden sind, 100 DM.

Die Gebühr ist mit dem Antrag auf Eintragung zu entrichten.

Wenn die Art der Verwendung eine Änderung des Patents, des Gebrauchsmusters oder der Eintragung erfordert, so ist diese Änderung zu beantragen.

Die Gebühr für die Eintragung beträgt

bei Patenten, Gebrauchsmustern und Eintragungen, die vor dem 1. Januar 1968 angemeldet worden sind, 50 DM,

bei Patenten, Gebrauchsmustern und Eintragungen, die nach dem 31. Dezember 1967 angemeldet worden sind, 100 DM.

Die Gebühr ist mit dem Antrag auf Eintragung zu entrichten.

Wenn die Art der Verwendung eine Änderung des Patents, des Gebrauchsmusters oder der Eintragung erfordert, so ist diese Änderung zu beantragen.

Die Gebühr für die Eintragung beträgt

bei Patenten, Gebrauchsmustern und Eintragungen, die vor dem 1. Januar 1968 angemeldet worden sind, 50 DM,

bei Patenten, Gebrauchsmustern und Eintragungen, die nach dem 31. Dezember 1967 angemeldet worden sind, 100 DM.

Die Gebühr ist mit dem Antrag auf Eintragung zu entrichten.

$$(11) \qquad zf'(x)(\xi - x) - [f(\xi) - f(x)]\zeta = 0$$

Angenommen, $f(x)$ genüge der Gleichung (6), dann ist $f(\xi) - f(x)$ durch $(\xi - x)$ ohne Rest teilbar. Die Gleichung (11) zerfällt demnach in die beiden Gleichungen:

$$(12) \qquad \begin{cases} \xi - x = 0 \\ zf'(x) - \dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\zeta = 0 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass die Tangentialebene aus der Fläche (4) $(m+1)$ten Grades im Allgemeinen die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende der Fläche und eine Curve $m$ten Grades ausschneidet. Aendert sich z, während x constant bleibt, so ändert sich damit die Curve $m$ten Grades; d. h. gleitet der Berührungspunkt der Tangentialebene auf der durch ihn gehenden erzeugenden Geraden der Fläche fort, so ändert sich die Tangentialebene. Daraus resultirt, dass die Tangentialebene die vorgelegte geradlinige Fläche im Allgemeinen nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben berührt.

Ausnahmen von diesem Satze finden für $f'(x) = 0$ und für $f'(x) = \infty$ statt; d. h. die Tangentialebene in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche Punkten ihrer Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie der XZ-Ebene parallel ist oder auf ihr senkrecht steht, berührt die Fläche längs der ganzen durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben.

Ist $f'(x) = 0$, so schneidet die Tangentialebene aus der Fläche (4) ausser der erzeugenden Geraden noch die X-Axe aus.

Hat die Leitlinie der vorgelegten Fläche die Gleichung (5), so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve der Tangentialebene mit der Fläche auf die XZ-Ebene:

$$(13) \qquad \begin{cases} \xi - x = 0 \\ n^n [f(x)]^{n-1} \dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\zeta^n - z^n [f'(x)]^n (\xi - x)^{n-1} \\ - \binom{n}{1} nz^{n-1} f(x) [f'(x)]^{n-1} (\xi - x)^{n-2} . \zeta - \ldots \\ \ldots - \binom{n}{1} n^{n-1} zf'(x) [f(x)]^{n-1} \zeta^{n-1} = 0 \end{cases}$$

Auch für diesen Fall gelten mithin die eben abgeleiteten Sätze.

Digitized by Google

Party Defined. Sec. 2. (1) A party is a person who is or may be affected by a proceeding and who claims a right to appear or is required by the Board to appear.

Parties. (2) The parties to a proceeding are the persons admitted as parties by the Board.

Intervention. Sec. 3. (1) Any person may file with the Board a petition for leave to intervene in a proceeding.

Petition. (2) A petition for intervention shall set forth the grounds and the nature of the petitioner's proposed intervention and whether the petitioner's participation is sought to be as a party or as an intervenor.

Answer. (3) Answer to a petition for intervention may be filed within 10 days after service of the petition.

Board Action. (4) The Board may grant or deny a petition for intervention. In granting a petition for intervention, the Board shall determine whether the intervention is to be as a party or as an intervenor and may impose conditions upon the intervention.

Notice. (5) Before granting a petition for intervention, the Board shall give notice of the petition to the parties and shall give them an opportunity to object.

Time for Petition. (6) A petition for intervention shall be filed not later than 15 days before the date set for the hearing, unless the Board authorizes a later filing.

Amendment. (7) The Board may allow a petition for intervention to be amended.

Effect of Intervention. (8) An intervenor has such rights as to notice and service as the Board determines but an intervenor does not become a party.

von diesen Ebenen, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil der Fläche begrenzt wird:

$$V = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \int_{z=0}^{z=z_0} y\,dx\,dz = \frac{1}{c} \int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x)\,.\,dx \int_{z=0}^{z=z_0} z dz$$

$$V = \frac{z_0^2}{2c} \int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x)\,.\,dx$$

Wir wissen aber, dass die zur XY-Ebene parallele Ebene $z = z_0$ die vorgelegte geradlinige Fläche in der Curve: $cy = z_0 f(x)$ schneidet. Projiciren wir diese Curve auf die XY-Ebene, so resultirt für das Volumen V' zwischen den Ebenen $x = x_1$, $x = x_2$, $z = 0$, $z = z_0$ der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil der Cylinderfläche:

$$V' = z_0 \int_{x=x_1}^{x=x_2} y dx = \frac{z_0^2}{c} \int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x)\,.\,dx$$

Aus den beiden erhaltenen Resultaten folgt:

(15) $$V : V' = 1 : 2$$

Die vorgelegte Fläche hat demnach die Eigenschaft, den zugehörigen Cylinder zu halbiren.

Bisher haben wir eine bestimmte Fläche angenommen. Wir wollen nun die Flächenschaar in Betracht ziehen, welche durch die Gleichung:

$$F \equiv cy - z\,.\,\varphi(x, \alpha) = 0$$

dargestellt wird, wenn α ein variabler Parameter ist. Für die einhüllende Fläche dieser Flächenschaar ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$F = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$$

Daraus geht hervor, dass die einhüllende Fläche der vorgelegten Flächenschaar eine geradlinige Fläche derselben Art wie die Fläche (4) ist; dass nur dann eine wirkliche einhüllende Fläche dieser Schaar existirt, wenn die Leitlinien der einzelnen Flächen dieser Schaar eine Enveloppe besitzen. Diese Enveloppe ist die Leitlinie der einhüllenden Fläche der vorgelegten Flächenschaar.

Digitized by Google

1st Session.

Bill (No. 3) to amend the Revised Statutes of Canada, 1886, chapter 135, intituled "An Act respecting Insolvency."

(Reprinted as amended by the Committee on the Bill.)

HIS EXCELLENCY the Governor General, by and with the advice and consent of the Senate and House of Commons of Canada, enacts as follows:

1. Section 2 of the Revised Statutes of Canada, 1886, chapter 135, is amended by inserting the following subsection after subsection 1:

"1. Until the 1st February, no person, whether trading or not trading,

(a) who has not become insolvent, and

(b) who owes debts amounting to the sum of $1,000 or upwards,

may present a petition to the Court or Judge praying that the estate and effects of such person may be wound up under the provisions of this Act.

2. Section 3 of the said Act is amended by adding thereto the following subsection:

"2. Until the 1st February, no trader, whether insolvent or not, who owes debts amounting to the sum of $1,000 or upwards, shall make an assignment of his estate and effects for the general benefit of his creditors under the provisions of this Act."

Der elliptische Cono-Cuneus kann daher auch so entstanden gedacht werden, dass sich eine Ellipse, deren eine Axe constant, deren andere variabel ist, parallel mit sich selbst bewegt, während ihr Mittelpunkt eine Gerade senkrecht auf der Ellipsenebene beschreibt, und die variable Axe proportional dem Abstande der Ellipsenebene von einer gegebenen Ebene wächst.

Zunächst folgt hieraus, dass der Cono-Cuneus von Wallis mit einem Kreise als Leitlinie identisch mit unserem geraden elliptischen Cono-Cuneus ist, denn auch hierbei wird ein Kreis und durch eine dem Kreise parallele Ebene im Allgemeinen eine Ellipse ausgeschnitten. Ferner ist ersichtlich, dass es gleichgültig ist, welcher von beiden Axen der Leitellipse die singuläre Kante parallel geht; denn ist $a > b$, so ist $h = \frac{a}{b} c > c$, wenn h und c die Entfernungen bezüglich des Kreisschnittes und der Leitellipse von der singulären Kante bezeichnen; d. h. ist die singuläre Kante der grösseren Axe der Leitellipse parallel, so liegt der Kreis ausserhalb der Leitellipse und der singulären Kante. Ist dagegen $a < b$, so ist $h = \frac{a}{b} c < c$, d h. ist die singuläre Kante der kleineren Axe der Leitellipse parallel, so liegt der Kreis zwischen dieser Kante und der Leitellipse. Im Wesentlichen wird dadurch nichts geändert, womit wir die Behauptung in der Einleitung bewiesen haben.

Ferner erhält man für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene $y = k$ mit dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) auf die XZ-Ebene:

$$z^2 (a^2 - x^2) = c^2 k^2 \tag{19}$$

d. i. im Allgemeinen eine Curve vierten Grades, welche die Z-Axe in den Punkten $x = 0$, $z = \pm \frac{ck}{a}$ schneidet. Sie ist in allen ihren Punkten convex nach der X-Axe hin und besteht aus zwei ins Unendliche sich erstreckenden Geraden, welche symmetrisch zu den Axen der x und der z liegen und sich asymptotisch den beiden Geraden $x = \pm a$ nähern. In ihren Durchschnittspunkten mit der Z-Axe sind die Tangenten an die Curve der X-Axe parallel. Für $k = 0$ geht diese Curve über in die X-Axe von $-a$ bis $+a$ und in die beiden Geraden $x = \pm a$.

Schneiden wir schliesslich die vorgelegte geradlinige Fläche (17) durch die Ebene $x = l$, so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Fläche auf die YZ-Ebene:

Digitized by Google

Sect. 2a. Sections.—Sections are of two kinds, viz. sections of a line and sections of a surface. A section of a line is a point which divides the line into two parts. A section of a surface is a line which divides the surface into two parts. Sections are also called cuts.

Sect. 2b. Bisection.—Bisection is the division of a line or surface into two equal parts. A line is bisected by a point, and a surface by a line.

Sect. 2c. Trisection.—Trisection is the division of a line or surface into three equal parts. A line is trisected by two points, and a surface by two lines.

Sect. 2d. Quadrisection.—Quadrisection is the division of a line or surface into four equal parts. A line is quadrisected by three points, and a surface by three lines.

Sect. 2e. Multisection.—Multisection is the division of a line or surface into any number of equal parts. A line is multisected by any number of points, and a surface by any number of lines.

Sect. 2f. Dichotomy.—Dichotomy is the division of a line or surface into two unequal parts. A line is dichotomized by a point, and a surface by a line.

Sect. 2g. Trichotomy.—Trichotomy is the division of a line or surface into three unequal parts. A line is trichotomized by two points, and a surface by two lines.

Sect. 2h. Quadrichotomy.—Quadrichotomy is the division of a line or surface into four unequal parts. A line is quadrichotomized by three points, and a surface by three lines.

Sect. 2i. Multichotomy.—Multichotomy is the division of a line or surface into any number of unequal parts. A line is multichotomized by any number of points, and a surface by any number of lines.

Durch Vergleichung von (18) und (21) ergiebt sich, wenn man

$$\frac{ah}{c} = c$$

setzt:

$$h = \frac{c^2}{a}.$$

Daraus folgt: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu a und c ist, schneidet aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) eine Ellipse aus, welche gleich dem geometrischen Ort der Brennpunkte aller Ellipsen ist, die durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus der vorgelegten Fläche ausgeschnitten werden.

Ferner folgt aus dem Obigen, dass die Brennpunkte derjenigen Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17), deren Abstand von der singulären Kante absolute grösser als c ist, in der YZ-Ebene liegen. Als Gleichung des geometrischen Ortes dieser Brennpunkte erhält man:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{22}$$

Mithin resultirt der Satz: Der geometrische Ort der Brennpunkte derjenigen Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17), deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder grösser als c ist, ist eine Hyperbel in der YZ-Ebene mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren reelle Axe $2c$ in der Z-Axe, und deren imaginäre Axe $2a$ in der Y-Axe liegt. Ist $c = a$, so wird dieser geometrische Ort eine gleichseitige Hyperbel mit dem Parameter $2a$.

Betrachtet man ferner die beiden Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) in den Entfernungen h_1 und h_2 von der singulären Kante, so ergiebt sich, wenn $h_1 < c$ ist, für das Verhältniss der Axen der zu h_1 zugehörigen Ellipse: $\frac{c}{h_1}$; andererseits erhält man, wenn $h_2 > c$ ist, als Axenverhältniss der zu h_2 zugehörigen Ellipse $\frac{h_2}{c}$. Sollen diese beiden Verhältnisse einander gleich sein, so folgt:

$$h_1 . h_2 = c^2. \tag{23}$$

Daraus fliesst der Satz: Das Product der Entfernungen der beiden Ellipsen des geraden elliptischen Cono-Cuneus von der singulären Kante, welche dasselbe Axenverhältniss haben und auf derselben Seite der singulären Kante liegen, ist gleich dem Quadrat des Abstandes des Kreises dieses Cono-Cuneus von seiner singulären Kante.

Digitized by Google

Then he said, Thou shalt not be able to receive it now, for the Spirit of the Lord is upon thee, and thou shalt be with them, and shalt prophesy before Saul, and he shall take thee and bring thee to his father's house; and when thou comest to Gibeah of God, where the garrison of the Philistines is, and it shall come to pass, when thou comest thither to the city, that thou shalt meet a company of prophets coming down from the high place with a psaltery, and a tabret, and a pipe, and a harp, before them; and they shall prophesy: and the Spirit of the Lord will come upon thee, and thou shalt prophesy with them, and shalt be turned into another man. And let it be when these signs are come unto thee, that thou do as occasion serve thee; for God is with thee. And thou shalt go down before me to Gilgal: and, behold, I will come down unto thee, to offer burnt offerings, and to sacrifice sacrifices of peace offerings: seven days shalt thou tarry, till I come to thee, and shew thee what thou shalt do.

And it was so, that when he had turned his shoulder to go from Samuel, God gave him another heart: and all those signs came to pass that day. And when they came thither to the hill, behold a company of prophets met him; and the Spirit of God came upon him, and he prophesied among them. And it came to pass, when all that knew him beforetime saw that, behold, he prophesied among the prophets, then the people said one to another, What is this that is come unto the son of Kish? Is Saul also among the prophets? And one of the same place answered and said, But who is their father? Therefore it became a proverb, Is Saul also among the prophets? And when he had made an end of prophesying, he came to the high place.

And Saul's uncle said unto him and to his servant, Whither went ye? And he said, To seek the asses: and when we saw that they were no where, we came to Samuel. And Saul's uncle said, Tell me, I pray thee, what Samuel said unto you. And Saul said unto his uncle, He told us plainly that the asses were found. But concerning the matter of the kingdom, whereof Samuel spake, he told him not.

And Samuel called the people together unto the Lord to Mizpeh; and said unto the children of Israel, Thus saith the Lord God of Israel, I brought up Israel out of Egypt, and delivered you out of the hand of the Egyptians, and out of the hand of all kingdoms, and of them that oppressed you: but ye have this day rejected your God, who himself saved you out of all your adversities and your tribulations; and ye have said unto him, Nay, but set a king over us. Now therefore present yourselves before the Lord by your tribes, and by your thousands. And when Samuel had caused all the tribes of Israel to come near, the tribe of Benjamin was taken. When he had caused the tribe of Benjamin to come near by their families, Matri's family was taken, and Saul the son of Kish was taken: and when they sought him, he could not be found. Therefore they enquired of the Lord further, if the man should yet come thither. And the Lord answered, Behold, he hath hid himself among the stuff. And they ran and fetched him thence: and when he stood among the people, he was higher than any of the people from his shoulders and upward. And Samuel said to all the people, See ye him whom the Lord hath chosen, that there is none like him among all the people? And all the people shouted, and said, God save the king.

Then Samuel told the people the manner of the kingdom, and wrote it in a book, and laid it up before the Lord. And Samuel sent all the people away, every man to his house. And Saul also went home to Gibeah; and there went with him a band of men, whose hearts God had touched. But the children of Belial said, How shall this man save us? And they despised him, and brought him no presents. But he held his peace.

Then Nahash the Ammonite came up, and encamped against Jabesh-gilead: and all the men of Jabesh said unto Nahash, Make a covenant with us, and we will serve thee. And Nahash the Ammonite answered them, On this condition will I make a covenant with you, that I may thrust out all your right eyes, and lay it for a reproach upon all Israel. And the elders of Jabesh said unto him, Give us seven days' respite, that we may send messengers unto all the coasts of Israel: and then, if there be no man to save us, we will come out to thee. Now when the messengers came to Gibeah of Saul, and told the tidings in the ears of the people, all the people lifted up their voices, and wept. And, behold, Saul came following the herd out of the field; and Saul said, What aileth the people that they weep? And they told him the tidings of the men of Jabesh. And the Spirit of God came upon Saul when he heard those tidings, and his anger was kindled greatly. And he took a yoke of oxen, and hewed them in pieces, and sent them throughout all the coasts of Israel by the hands of messengers, saying, Whosoever cometh not forth after Saul and after Samuel, so shall it be done unto his oxen. And the fear of the Lord fell on the people, and they came out with one consent. And when he numbered them in Bezek, the children of Israel were three hundred thousand, and the men of Judah thirty thousand. And they said unto the messengers that came, Thus shall ye say unto the men of Jabesh-gilead, To morrow, by that time the sun be hot, ye shall have help. And the messengers came and shewed it to the men of Jabesh; and they were glad. Therefore the men of Jabesh said, To morrow we will come out unto you, and ye shall do with us all that seemeth good unto you. And it was so on the morrow, that Saul put the people in three companies; and they came into the midst of the host in the morning watch, and slew the Ammonites until the heat of the day: and it came to pass, that they which remained were scattered, so that two of them were not left together.

And the people said unto Samuel, Who is he that said, Shall Saul reign over us? bring the men, that we may put them to death. And Saul said, There shall not a man be put to death this day: for to day the Lord hath wrought salvation in Israel. Then said Samuel to the people, Come, and let us go to Gilgal, and renew the kingdom there. And all the people went to Gilgal; and there they made Saul king before the Lord in Gilgal; and there they sacrificed sacrifices of peace offerings before the Lord; and there Saul and all the men of Israel rejoiced greatly.

And Samuel said unto all Israel, Behold, I have hearkened unto your voice in all that ye said unto me, and have made a king over you. And now, behold, the king walketh before you: and I am old and grayheaded; and, behold, my sons are with you: and I have walked before you from my childhood unto this day. Behold, here I am: witness against me before the Lord, and before his anointed: whose ox have I taken? or whose ass have I taken? or whom have I defrauded? whom have I oppressed? or of whose hand have I received any bribe to blind mine eyes therewith? and I will restore it you. And they said, Thou hast not defrauded us, nor oppressed us, neither hast thou taken aught of any man's hand. And he said unto them, The Lord is witness against you, and his anointed is witness this day, that ye have not found aught in my hand. And they answered, He is witness.

And Samuel said unto the people, It is the Lord that advanced Moses and Aaron, and that brought your fathers up out of the land of Egypt. Now therefore stand still, that I may reason with you before the Lord of all the righteous acts of the Lord, which he did to you and to your fathers. When Jacob was come into Egypt, and your fathers cried unto the Lord, then the Lord sent Moses and Aaron, which brought forth your fathers out of Egypt, and made them dwell in this place. And when they forgat the Lord their God, he sold them into the hand of Sisera, captain of the host of Hazor, and into the hand of the Philistines, and into the hand of the king of Moab, and they fought against them. And they cried unto the Lord, and said, We have sinned, because we have forsaken the Lord, and have served Baalim and Ashtaroth: but now deliver us out of the hand of our enemies, and we will serve thee. And the Lord sent Jerubbaal, and Bedan, and Jephthah, and Samuel, and delivered you out of the hand of your enemies on every side, and ye dwelled safe. And when ye saw that Nahash the king of the children of Ammon came against you, ye said unto me, Nay; but a king shall reign over us: when the Lord your God was your king. Now therefore behold the king whom ye have chosen, and whom ye have desired! and, behold, the Lord hath set a king over you. If ye will fear the Lord, and serve him, and obey his voice, and not rebel against the commandment of the Lord, then shall both ye and also the king that reigneth over you continue following the Lord your God: but if ye will not obey the voice of the Lord, but rebel against the commandment of the Lord, then shall the hand of the Lord be against you, as it was against your fathers.

Now therefore stand and see this great thing, which the Lord will do before your eyes. Is it not wheat harvest to day? I will call unto the Lord, and he shall send thunder and rain; that ye may perceive and see that your wickedness is great, which ye have done in the sight of the Lord, in asking you a king. So Samuel called unto the Lord; and the Lord sent thunder and rain that day: and all the people greatly feared the Lord and Samuel. And all the people said unto Samuel, Pray for thy servants unto the Lord thy God, that we die not: for we have added unto all our sins this evil, to ask us a king. And Samuel said unto the people, Fear not: ye have done all this wickedness: yet turn not aside from following the Lord, but serve the Lord with all your heart; and turn ye not aside: for then should ye go after vain things, which cannot profit nor deliver; for they are vain. For the Lord will not forsake his people for his great name's sake: because it hath pleased the Lord to make you his people. Moreover as for me, God forbid that I should sin against the Lord in ceasing to pray for you: but I will teach you the good and the right way: only fear the Lord, and serve him in truth with all your heart: for consider how great things he hath done for you. But if ye shall still do wickedly, ye shall be consumed, both ye and your king.

Saul reigned one year; and when he had reigned two years over Israel, Saul chose him three thousand men of Israel; whereof two thousand were with Saul in Michmash and in mount Bethel, and a thousand were with Jonathan in Gibeah of Benjamin: and the rest of the people he sent every man to his tent. And Jonathan smote the garrison of the Philistines that was in Geba, and the Philistines heard of it. And Saul blew the trumpet throughout all the land, saying, Let the Hebrews hear. And all Israel heard say that Saul had smitten a garrison of the Philistines, and that Israel also was had in abomination with the Philistines. And the people were called together after Saul to Gilgal.

And the Philistines gathered themselves together to fight with Israel, thirty thousand chariots, and six thousand horsemen, and people as the sand which is on the sea shore in multitude: and they came up, and pitched in Michmash, eastward from Bethaven. When the men of Israel saw that they were in a strait, (for the people were distressed,) then the people did hide themselves in caves, and in thickets, and in rocks, and in high places, and in pits. Now the Hebrews had given over passing over Jordan to the land of Gad and Gilead. As for Saul, he was yet in Gilgal, and all the people followed him trembling. And he tarried seven days, according to the set time that Samuel had appointed: but Samuel came not to Gilgal; and the people were scattered from him. And Saul said, Bring hither a burnt offering to me, and peace offerings. And he offered the burnt offering. And it came to pass, that as soon as he had made an end of offering the burnt offering, behold, Samuel came; and Saul went out to meet him, that he might salute him. And Samuel said, What hast thou done? And Saul said, Because I saw that the people were scattered from me, and that thou comedst not within the days appointed, and that the Philistines gathered themselves together at Michmash; therefore said I, The Philistines will come down now upon me to Gilgal, and I have not made supplication unto the Lord: I forced myself therefore, and offered a burnt offering. And Samuel said to Saul, Thou hast done foolishly: thou hast not kept the commandment of the Lord thy God, which he commanded thee: for now would the Lord have established thy kingdom upon Israel for ever. But now thy kingdom shall not continue: the Lord hath sought him a man after his own heart, and the Lord hath commanded him to be captain over his people, because thou hast not kept that which the Lord commanded thee. And Samuel arose, and gat him up from Gilgal unto Gibeah of Benjamin. And Saul numbered the people that were present with him, about six hundred men.

And Saul, and Jonathan his son, and the people that were present with them, abode in Gibeah of Benjamin: but the Philistines encamped in Michmash. And the spoilers came out of the camp of the Philistines in three companies: one company turned unto the way that leadeth to Ophrah, unto the land of Shual: and another company turned the way to Bethhoron: and another company turned to the way of the border that looketh to the valley of Zeboim toward the wilderness. Now there was no smith found throughout all the land of Israel: for the Philistines said, Lest the Hebrews make them swords or spears: but all the Israelites went down to the Philistines, to sharpen every man his share, and his coulter, and his axe, and his mattock. Yet they had a file for the mattocks, and for the coulters, and for the forks, and for the axes, and to set the goads. So it came to pass in the day of battle, that there was neither sword nor spear found in the hand of any of the people that were with Saul and with Jonathan: but with Saul and with Jonathan his son was there found.

And the garrison of the Philistines went out to the passage of Michmash. And it came to pass upon a certain day, that Jonathan the son of Saul said unto the young man that bare his armour, Come, and let us go over to the Philistines' garrison, that is on the other side. But he told not his father. And Saul tarried in the uttermost part of Gibeah under a pomegranate tree which is in Migron: and the people that were with him were about six hundred men; and Ahiah, Ahitub's son, Ichabod's brother, the son of Phinehas, the son of Eli, the Lord's priest in Shiloh, wearing an ephod. And the people knew not that Jonathan was gone. And between the passages, by which Jonathan sought to go over unto the Philistines' garrison, there was a sharp rock on the one side, and a sharp rock on the other side: and the name of the one was Bozez, and the name of the other Seneh. The forefront of the one was situate northward over against Michmash, and the other southward over against Gibeah. And Jonathan said to the young man that bare his armour, Come, and let us go over unto the garrison of these uncircumcised: it may be that the Lord will work for us: for there is no restraint to the Lord to save by many or by few. And his armourbearer said unto him, Do all that is in thine heart: turn thee; behold, I am with thee according to thy heart. Then said Jonathan, Behold, we will pass over unto these men, and we will discover ourselves unto them. If they say thus unto us, Tarry until we come to you; then we will stand still in our place, and will not go up unto them. But if they say thus, Come up unto us; then we will go up: for the Lord hath delivered them into our hand: and this shall be a sign unto us. And both of them discovered themselves unto the garrison of the Philistines: and the Philistines said, Behold, the Hebrews come forth out of the holes where they had hid themselves. And the men of the garrison answered Jonathan and his armourbearer, and said, Come up to us, and we will shew you a thing. And Jonathan said unto his armourbearer, Come up after me: for the Lord hath delivered them into the hand of Israel. And Jonathan climbed up upon his hands and upon his feet, and his armourbearer after him: and they fell before Jonathan; and his armourbearer slew after him. And that first slaughter, which Jonathan and his armourbearer made, was about twenty men, within as it were an half acre of land, which a yoke of oxen might plow.

And there was trembling in the host, in the field, and among all the people: the garrison, and the spoilers, they also trembled, and the earth quaked: so it became a very great trembling. And the watchmen of Saul in Gibeah of Benjamin looked; and, behold, the multitude melted away, and they went on beating down one another. Then said Saul unto the people that were with him, Number now, and see who is gone from us. And when they had numbered, behold, Jonathan and his armourbearer were not there. And Saul said unto Ahiah, Bring hither the ark of God. For the ark of God was at that time with the children of Israel. And it came to pass, while Saul talked unto the priest, that the noise that was in the host of the Philistines went on and increased: and Saul said unto the priest, Withdraw thine hand. And Saul and all the people that were with him assembled themselves, and they came to the battle: and, behold, every man's sword was against his fellow, and there was very great confusion. Moreover the Hebrews that were with the Philistines before that time, which went up with them into the country round about, even they also turned to be with the Israelites that were with Saul and Jonathan. Likewise all the men of Israel which had hid themselves in mount Ephraim, when they heard that the Philistines fled, even they also followed hard after them in the battle. So the Lord saved Israel that day: and the battle passed over unto Bethaven.

And the men of Israel were distressed that day: for Saul had adjured the people, saying, Cursed be the man that eateth any food until evening, that I may be avenged on mine enemies. So none of the people tasted any food. And all they of the land came to a wood; and there was honey upon the ground. And when the people were come into the wood, behold, the honey dropped; but no man put his hand to his mouth: for the people feared the oath. But Jonathan heard not when his father charged the people with the oath: wherefore he put forth the end of the rod that was in his hand, and dipped it in an honeycomb, and put his hand to his mouth; and his eyes were enlightened. Then answered one of the people, and said, Thy father straitly charged the people with an oath, saying, Cursed be the man that eateth any food this day. And the people were faint. Then said Jonathan, My father hath troubled the land: see, I pray you, how mine eyes have been enlightened, because I tasted a little of this honey. How much more, if haply the people had eaten freely to day of the spoil of their enemies which they found? for had there not been now a much greater slaughter among the Philistines?

And they smote the Philistines that day from Michmash to Aijalon: and the people were very faint. And the people flew upon the spoil, and took sheep, and oxen, and calves, and slew them on the ground: and the people did eat them with the blood. Then they told Saul, saying, Behold, the people sin against the Lord, in that they eat with the blood. And he said, Ye have transgressed: roll a great stone unto me this day. And Saul said, Disperse yourselves among the people, and say unto them, Bring me hither every man his ox, and every man his sheep, and slay them here, and eat; and sin not against the Lord in eating with the blood. And all the people brought every man his ox with him that night, and slew them there. And Saul built an altar unto the Lord: the same was the first altar that he built unto the Lord.

And Saul said, Let us go down after the Philistines by night, and spoil them until the morning light, and let us not leave a man of them. And they said, Do whatsoever seemeth good unto thee. Then said the priest, Let us draw near hither unto God. And Saul asked counsel of God, Shall I go down after the Philistines? wilt thou deliver them into the hand of Israel? But he answered him not that day. And Saul said, Draw ye near hither, all the chief of the people: and know and see wherein this sin hath been this day. For, as the Lord liveth, which saveth Israel, though it be in Jonathan my son, he shall surely die. But there was not a man among all the people that answered him. Then said he unto all Israel, Be ye on one side, and I and Jonathan my son will be on the other side. And the people said unto Saul, Do what seemeth good unto thee. Therefore Saul said unto the Lord God of Israel, Give a perfect lot. And Saul and Jonathan were taken: but the people escaped. And Saul said, Cast lots between me and Jonathan my son. And Jonathan was taken. Then Saul said to Jonathan, Tell me what thou hast done. And Jonathan told him, and said, I did but taste a little honey with the end of the rod that was in mine hand, and, lo, I must die. And Saul answered, God do so and more also: for thou shalt surely die, Jonathan. And the people said unto Saul, Shall Jonathan die, who hath wrought this great salvation in Israel? God forbid: as the Lord liveth, there shall not one hair of his head fall to the ground; for he hath wrought with God this day. So the people rescued Jonathan, that he died not. Then Saul went up from following the Philistines: and the Philistines went to their own place.

So Saul took the kingdom over Israel, and fought against all his enemies on every side, against Moab, and against the children of Ammon, and against Edom, and against the kings of Zobah, and against the Philistines: and whithersoever he turned himself, he vexed them. And he gathered an host, and smote the Amalekites, and delivered Israel out of the hands of them that spoiled them.

Now the sons of Saul were, Jonathan, and Ishui, and Melchishua: and the names of his two daughters were these; the name of the firstborn Merab, and the name of the younger Michal: and the name of Saul's wife was Ahinoam, the daughter of Ahimaaz: and the name of the captain of his host was Abner, the son of Ner, Saul's uncle. And Kish was the father of Saul; and Ner the father of Abner was the son of Abiel.

And the war was sore against the Philistines all the days of Saul: and when Saul saw any strong man, or any valiant man, he took him unto him.

Then Samuel said unto Saul, The Lord sent me also to anoint thee to be king over his people, over Israel: now therefore hearken thou unto the voice of the words of the Lord. Thus saith the Lord of hosts, I remember that which Amalek did to Israel, how he laid wait for him in the way, when he came up from Egypt. Now go and smite Amalek, and utterly destroy all that they have, and spare them not; but slay both man and woman, infant and suckling, ox and sheep, camel and ass. And Saul gathered the people together, and numbered them in Telaim, two hundred thousand footmen, and ten thousand men of Judah. And Saul came to a city of Amalek, and laid wait in the valley. And Saul said unto the Kenites, Go, depart, get you down from among the Amalekites, lest I destroy you with them: for ye shewed kindness to all the children of Israel, when they came up out of Egypt. So the Kenites departed from among the Amalekites. And Saul smote the Amalekites from Havilah until thou comest to Shur, that is over against Egypt. And he took Agag the king of the Amalekites alive, and utterly destroyed all the people with the edge of the sword. But Saul and the people spared Agag, and the best of the sheep, and of the oxen, and of the fatlings, and the lambs, and all that was good, and would not utterly destroy them: but every thing that was vile and refuse, that they destroyed utterly.

Then came the word of the Lord unto Samuel, saying, It repenteth me that I have set up Saul to be king: for he is turned back from following me, and hath not performed my commandments. And it grieved Samuel; and he cried unto the Lord all night. And when Samuel rose early to meet Saul in the morning, it was told Samuel, saying, Saul came to Carmel, and, behold, he set him up a place, and is gone about, and passed on, and gone down to Gilgal. And Samuel came to Saul: and Saul said unto him, Blessed be thou of the Lord: I have performed the commandment of the Lord. And Samuel said, What meaneth then this bleating of the sheep in mine ears, and the lowing of the oxen which I hear? And Saul said, They have brought them from the Amalekites: for the people spared the best of the sheep and of the oxen, to sacrifice unto the Lord thy God; and the rest we have utterly destroyed. Then Samuel said unto Saul, Stay, and I will tell thee what the Lord hath said to me this night. And he said unto him, Say on. And Samuel said, When thou wast little in thine own sight, wast thou not made the head of the tribes of Israel, and the Lord anointed thee king over Israel? And the Lord sent thee on a journey, and said, Go and utterly destroy the sinners the Amalekites, and fight against them until they be consumed. Wherefore then didst thou not obey the voice of the Lord, but didst fly upon the spoil, and didst evil in the sight of the Lord? And Saul said unto Samuel, Yea, I have obeyed the voice of the Lord, and have gone the way which the Lord sent me, and have brought Agag the king of Amalek, and have utterly destroyed the Amalekites. But the people took of the spoil, sheep and oxen, the chief of the things which should have been utterly destroyed, to sacrifice unto the Lord thy God in Gilgal. And Samuel said, Hath the Lord as great delight in burnt offerings and sacrifices, as in obeying the voice of the Lord? Behold, to obey is better than sacrifice, and to hearken than the fat of rams. For rebellion is as the sin of witchcraft, and stubbornness is as iniquity and idolatry. Because thou hast rejected the word of the Lord, he hath also rejected thee from being king. And Saul said unto Samuel, I have sinned: for I have transgressed the commandment of the Lord, and thy words: because I feared the people, and obeyed their voice. Now therefore, I pray thee, pardon my sin, and turn again with me, that I may worship the Lord. And Samuel said unto Saul, I will not return with thee: for thou hast rejected the word of the Lord, and the Lord hath rejected thee from being king over Israel. And as Samuel turned about to go away, he laid hold upon the skirt of his mantle, and it rent. And Samuel said unto him, The Lord hath rent the kingdom of Israel from thee this day, and hath given it to a neighbour of thine, that is better than thou. And also the Strength of Israel will not lie nor repent: for he is not a man, that he should repent. Then he said, I have sinned: yet honour me now, I pray thee, before the elders of my people, and before Israel, and turn again with me, that I may worship the Lord thy God. So Samuel turned again after Saul; and Saul worshipped the Lord.

Then said Samuel, Bring ye hither to me Agag the king of the Amalekites. And Agag came unto him delicately. And Agag said, Surely the bitterness of death is past. And Samuel said, As thy sword hath made women childless, so shall thy mother be childless among women. And Samuel hewed Agag in pieces before the Lord in Gilgal.

Then Samuel went to Ramah; and Saul went up to his house to Gibeah of Saul. And Samuel came no more to see Saul until the day of his death: nevertheless Samuel mourned for Saul: and the Lord repented that he had made Saul king over Israel.

And the Lord said unto Samuel, How long wilt thou mourn for Saul, seeing I have rejected him from reigning over Israel? fill thine horn with oil, and go, I will send thee to Jesse the Bethlehemite: for I have provided me a king among his sons. And Samuel said, How can I go? if Saul hear it, he will kill me. And the Lord said, Take an heifer with thee, and say, I am come to sacrifice to the Lord. And call Jesse to the sacrifice, and I will shew thee what thou shalt do: and thou shalt anoint unto me him whom I name unto thee. And Samuel did that which the Lord spake, and came to Bethlehem. And the elders of the town trembled at his coming, and said, Comest thou peaceably? And he said, Peaceably: I am come to sacrifice unto the Lord: sanctify yourselves, and come with me to the sacrifice. And he sanctified Jesse and his sons, and called them to the sacrifice. And it came to pass, when they were come, that he looked on Eliab, and said, Surely the Lord's anointed is before him. But the Lord said unto Samuel, Look not on his countenance, or on the height of his stature; because I have refused him: for the Lord seeth not as man seeth; for man looketh on the outward appearance, but the Lord looketh on the heart. Then Jesse called Abinadab, and made him pass before Samuel. And he said, Neither hath the Lord chosen this. Then Jesse made Shammah to pass by. And he said, Neither hath the Lord chosen this. Again, Jesse made seven of his sons to pass before Samuel. And Samuel said unto Jesse, The Lord hath not chosen these. And Samuel said unto Jesse, Are here all thy children? And he said, There remaineth yet the youngest, and, behold, he keepeth the sheep. And Samuel said unto Jesse, Send and fetch him: for we will not sit down till he come hither. And he sent, and brought him in. Now he was ruddy, and withal of a beautiful countenance, and goodly to look to. And the Lord said, Arise, anoint him: for this is he. Then Samuel took the horn of oil, and anointed him in the midst of his brethren: and the Spirit of the Lord came upon David from that day forward. So Samuel rose up, and went to Ramah.

But the Spirit of the Lord departed from Saul, and an evil spirit from the Lord troubled him. And Saul's servants said unto him, Behold now, an evil spirit from God troubleth thee. Let our lord now command thy servants, which are before thee, to seek out a man, who is a cunning player on a harp: and it shall come to pass, when the evil spirit from God is upon thee, that he shall play with his hand, and thou shalt be well. And Saul said unto his servants, Provide me now a man that can play well, and bring him to me. Then answered one of the servants, and said, Behold, I have seen a son of Jesse the Bethlehemite, that is cunning in playing, and a mighty valiant man, and a man of war, and prudent in matters, and a comely person, and the Lord is with him. Wherefore Saul sent messengers unto Jesse, and said, Send me David thy son, which is with the sheep. And Jesse took an ass laden with bread, and a bottle of wine, and a kid, and sent them by David his son unto Saul. And David came to Saul, and stood before him: and he loved him greatly; and he became his armourbearer. And Saul sent to Jesse, saying, Let David, I pray thee, stand before me; for he hath found favour in my sight. And it came to pass, when the evil spirit from God was upon Saul, that David took an harp, and played with his hand: so Saul was refreshed, and was well, and the evil spirit departed from him.

Now the Philistines gathered together their armies to battle, and were gathered together at Shochoh, which belongeth to Judah, and pitched between Shochoh and Azekah, in Ephesdammim. And Saul and the men of Israel were gathered together, and pitched by the valley of Elah, and set the battle in array against the Philistines. And the Philistines stood on a mountain on the one side, and Israel stood on a mountain on the other side: and there was a valley between them. And there went out a champion out of the camp of the Philistines, named Goliath, of Gath, whose height was six cubits and a span. And he had an helmet of brass upon his head, and he was armed with a coat of mail; and the weight of the coat was five thousand shekels of brass. And he had greaves of brass upon his legs, and a target of brass between his shoulders. And the staff of his spear was like a weaver's beam; and his spear's head weighed six hundred shekels of iron: and one bearing a shield went before him. And he stood and cried unto the armies of Israel, and said unto them, Why are ye come out to set your battle in array? am not I a Philistine, and ye servants to Saul? choose you a man for you, and let him come down to me. If he be able to fight with me, and to kill me, then will we be your servants: but if I prevail against him, and kill him, then shall ye be our servants, and serve us. And the Philistine said, I defy the armies of Israel this day; give me a man, that we may fight together. When Saul and all Israel heard those words of the Philistine, they were dismayed, and greatly afraid.

Now David was the son of that Ephrathite of Bethlehemjudah, named Jesse; which had eight sons: and the man went among men for an old man in the days of Saul. And the three eldest sons of Jesse went and followed Saul to the battle: and the names of his three sons that went to the battle were Eliab the firstborn, and next unto him Abinadab, and the third Shammah. And David was the youngest: and the three eldest followed Saul. But David went and returned from Saul to feed his father's sheep at Bethlehem. And the Philistine drew near morning and evening, and presented himself forty days.

And Jesse said unto David his son, Take now for thy brethren an ephah of this parched corn, and these ten loaves, and run to the camp to thy brethren; and carry these ten cheeses unto the captain of their thousand, and look how thy brethren fare, and take their pledge. Now Saul, and they, and all the men of Israel, were in the valley of Elah, fighting with the Philistines. And David rose up early in the morning, and left the sheep with a keeper, and took, and went, as Jesse had commanded him; and he came to the trench, as the host was going forth to the fight, and shouted for the battle. For Israel and the Philistines had put the battle in array, army against army. And David left his carriage in the hand of the keeper of the carriage, and ran into the army, and came and saluted his brethren. And as he talked with them, behold, there came up the champion, the Philistine of Gath, Goliath by name, out of the armies of the Philistines, and spake according to the same words: and David heard them. And all the men of Israel, when they saw the man, fled from him, and were sore afraid. And the men of Israel said, Have ye seen this man that is come up? surely to defy Israel is he come up: and it shall be, that the man who killeth him, the king will enrich him with great riches, and will give him his daughter, and make his father's house free in Israel. And David spake to the men that stood by him, saying, What shall be done to the man that killeth this Philistine, and taketh away the reproach from Israel? for who is this uncircumcised Philistine, that he should defy the armies of the living God? And the people answered him after this manner, saying, So shall it be done to the man that killeth him. And Eliab his eldest brother heard when he spake unto the men; and Eliab's anger was kindled against David, and he said, Why camest thou down hither? and with whom hast thou left those few sheep in the wilderness? I know thy pride, and the naughtiness of thine heart; for thou art come down that thou mightest see the battle. And David said, What have I now done? Is there not a cause? And he turned from him toward another, and said after the same manner: and the people answered him again after the former manner. And when the words were heard which David spake, they rehearsed them before Saul: and he sent for him. And David said to Saul, Let no man's heart fail because of him; thy servant will go and fight with this Philistine. And Saul said to David, Thou art not able to go against this Philistine to fight with him: for thou art but a youth, and he a man of war from his youth. And David said unto Saul, Thy servant kept his father's sheep, and there came a lion, and a bear, and took a lamb out of the flock: and I went out after him, and smote him, and delivered it out of his mouth: and when he arose against me, I caught him by his beard, and smote him, and slew him. Thy servant slew both the lion and the bear: and this uncircumcised Philistine shall be as one of them, seeing he hath defied the armies of the living God. David said moreover, The Lord that delivered me out of the paw of the lion, and out of the paw of the bear, he will deliver me out of the hand of this Philistine. And Saul said unto David, Go, and the Lord be with thee. And Saul armed David with his armour, and he put an helmet of brass upon his head; also he armed him with a coat of mail. And David girded his sword upon his armour, and he assayed to go; for he had not proved it. And David said unto Saul, I cannot go with these; for I have not proved them. And David put them off him. And he took his staff in his hand, and chose him five smooth stones out of the brook, and put them in a shepherd's bag which he had, even in a scrip; and his sling was in his hand: and he drew near to the Philistine. And the Philistine came on and drew near unto David; and the man that bare the shield went before him. And when the Philistine looked about, and saw David, he disdained him: for he was but a youth, and ruddy, and of a fair countenance. And the Philistine said unto David, Am I a dog, that thou comest to me with staves? And the Philistine cursed David by his gods. And the Philistine said to David, Come to me, and I will give thy flesh unto the fowls of the air, and to the beasts of the field. Then said David to the Philistine, Thou comest to me with a sword, and with a spear, and with a shield: but I come to thee in the name of the Lord of hosts, the God of the armies of Israel, whom thou hast defied. This day will the Lord deliver thee into mine hand; and I will smite thee, and take thine head from thee; and I will give the carcases of the host of the Philistines this day unto the fowls of the air, and to the wild beasts of the earth; that all the earth may know that there is a God in Israel. And all this assembly shall know that the Lord saveth not with sword and spear: for the battle is the Lord's, and he will give you into our hands. And it came to pass, when the Philistine arose, and came and drew nigh to meet David, that David hasted, and ran toward the army to meet the Philistine. And David put his hand in his bag, and took thence a stone, and slang it, and smote the Philistine in his forehead, that the stone sunk into his forehead; and he fell upon his face to the earth. So David prevailed over the Philistine with a sling and with a stone, and smote the Philistine, and slew him; but there was no sword in the hand of David. Therefore David ran, and stood upon the Philistine, and took his sword, and drew it out of the sheath thereof, and slew him, and cut off his head therewith. And when the Philistines saw their champion was dead, they fled. And the men of Israel and of Judah arose, and shouted, and pursued the Philistines, until thou come to the valley, and to the gates of Ekron. And the slain of the Philistines fell down by the way to Shaaraim, even unto Gath, and unto Ekron. And the children of Israel returned from chasing after the Philistines, and they spoiled their tents. And David took the head of the Philistine, and brought it to Jerusalem; but he put his armour in his tent.

And when he had made an end of speaking unto Saul, that the soul of Jonathan was knit with the soul of David, and Jonathan loved him as his own soul. And Saul took him that day, and would let him go no more home to his father's house. Then Jonathan and David made a covenant, because he loved him as his own soul. And Jonathan stripped himself of the robe that was upon him, and gave it to David, and his garments, even to his sword, and to his bow, and to his girdle. And David went whithersoever Saul sent him, and behaved himself wisely: and Saul set him over the men of war, and he was accepted in the sight of all the people, and also in the sight of Saul's servants.

And it came to pass as they came, when David was returned from the slaughter of the Philistine, that the women came out of all cities of Israel, singing and dancing, to meet king Saul, with tabrets, with joy, and with instruments of musick. And the women answered one another as they played, and said, Saul hath slain his thousands, and David his ten thousands. And Saul was very wroth, and the saying displeased him; and he said, They have ascribed unto David ten thousands, and to me they have ascribed but thousands: and what can he have more but the kingdom? And Saul eyed David from that day and forward.

And it came to pass on the morrow, that the evil spirit from God came upon Saul, and he prophesied in the midst of the house: and David played with his hand, as at other times: and there was a javelin in Saul's hand. And Saul cast the javelin; for he said, I will smite David even to the wall with it. But David avoided out of his presence twice.

And Saul was afraid of David, because the Lord was with him, and was departed from Saul. Therefore Saul removed him from him, and made him his captain over a thousand; and he went out and came in before the people. And David behaved himself wisely in all his ways; and the Lord was with him. Wherefore when Saul saw that he behaved himself very wisely, he was afraid of him. But all Israel and Judah loved David, because he went out and came in before them.

And Saul said to David, Behold my elder daughter Merab, her will I give thee to wife: only be thou valiant for me, and fight the Lord's battles. For Saul said, Let not mine hand be upon him, but let the hand of the Philistines be upon him. And David said unto Saul, Who am I? and what is my life, or my father's family in Israel, that I should be son in law to the king? But it came to pass at the time when Merab Saul's daughter should have been given to David, that she was given unto Adriel the Meholathite to wife.

And Michal Saul's daughter loved David: and they told Saul, and the thing pleased him. And Saul said, I will give him her, that she may be a snare to him, and that the hand of the Philistines may be against him. Wherefore Saul said to David, Thou shalt this day be my son in law in the one of the twain. And Saul commanded his servants, saying, Commune with David secretly, and say, Behold, the king hath delight in thee, and all his servants love thee: now therefore be the king's son in law. And Saul's servants spake those words in the ears of David. And David said, Seemeth it to you a light thing to be a king's son in law, seeing that I am a man poor, and lightly esteemed? And the servants of Saul told him, saying, On this manner spake David. And Saul said, Thus shall ye say to David, The king desireth not any dowry, but an hundred foreskins of the Philistines, to be avenged of the king's enemies. But Saul thought to make David fall by the hand of the Philistines. And when his servants told David these words, it pleased David well to be the king's son in law: and the days were not expired. Wherefore David arose and went, he and his men, and slew of the Philistines two hundred men; and David brought their foreskins, and they gave them in full tale to the king, that he might be the king's son in law. And Saul gave him Michal his daughter to wife. And Saul saw and knew that the Lord was with David, and that Michal Saul's daughter loved him. And Saul was yet more afraid of David; and Saul became David's enemy continually.

Then the princes of the Philistines went forth: and it came to pass, after they went forth, that David behaved himself more wisely than all the servants of Saul, so that his name was much set by.

And Saul spake to Jonathan his son, and to all his servants, that they should kill David. But Jonathan Saul's son delighted much in David: and Jonathan told David, saying, Saul my father seeketh to kill thee: now therefore, I pray thee, take heed to thyself until the morning, and abide in a secret place, and hide thyself: and I will go out and stand beside my father in the field where thou art, and I will commune with my father of thee; and what I see, that I will tell thee. And Jonathan spake good of David unto Saul his father, and said unto him, Let not the king sin against his servant, against David; because he hath not sinned against thee, and because his works have been to thee-ward very good: for he did put his life in his hand, and slew the Philistine, and the Lord wrought a great salvation for all Israel: thou sawest it, and didst rejoice: wherefore then wilt thou sin against innocent blood, to slay David without a cause? And Saul hearkened unto the voice of Jonathan: and Saul sware, As the Lord liveth, he shall not be slain. And Jonathan called David, and Jonathan shewed him all those things. And Jonathan brought David to Saul, and he was in his presence, as in times past.

And there was war again: and David went out, and fought with the Philistines, and slew them with a great slaughter; and they fled from him. And the evil spirit from the Lord was upon Saul, as he sat in his house with his javelin in his hand: and David played with his hand. And Saul sought to smite David even to the wall with the javelin; but he slipped away out of Saul's presence, and he smote the javelin into the wall: but David fled, and escaped that night.

Saul also sent messengers unto David's house, to watch him, and to slay him in the morning: and Michal David's wife told him, saying, If thou save not thy life to night, to morrow thou shalt be slain. So Michal let David down through a window: and he went, and fled, and escaped. And Michal took an image, and laid it in the bed, and put a pillow of goats' hair for his bolster, and covered it with a cloth. And when Saul sent messengers to take David, she said, He is sick. And Saul sent the messengers again to see David, saying, Bring him up to me in the bed, that I may slay him. And when the messengers were come in, behold, there was an image in the bed, with a pillow of goats' hair for his bolster. And Saul said unto Michal, Why hast thou deceived me so, and sent away mine enemy, that he is escaped? And Michal answered Saul, He said unto me, Let me go; why should I kill thee?

So David fled, and escaped, and came to Samuel to Ramah, and told him all that Saul had done to him. And he and Samuel went and dwelt in Naioth. And it was told Saul, saying, Behold, David is at Naioth in Ramah. And Saul sent messengers to take David: and when they saw the company of the prophets prophesying, and Samuel standing as appointed over them, the Spirit of God was upon the messengers of Saul, and they also prophesied. And when they told Saul, he sent other messengers, and they prophesied likewise. And Saul sent messengers again the third time, and they prophesied also. Then went he also to Ramah, and came to a great well that is in Sechu: and he asked and said, Where are Samuel and David? And one said, Behold, they be at Naioth in Ramah. And he went thither to Naioth in Ramah: and the Spirit of God was upon him also, and he went on, and prophes

Um die entsprechende Durchschnittscurve zu untersuchen, führen wir die Coordinatentransformation ein:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$
$$y = \delta + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$
$$z = z'$$

Setzen wir dann $y' = 0$, so ergiebt sich als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$c^2(\delta + x'\sin\varphi)^2 = z'^2(a^2 - x'^2\cos^2\varphi) \tag{24}$$

Daraus folgt:

$$\frac{dz'}{dx'} = \pm \frac{c(\delta x'\cos^2\varphi + a^2\sin\varphi)}{(a^2 - x'^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2z'}{dx'^2} = \pm \frac{c\cos^2\varphi\{2\delta x'^2\cos^2\varphi + 3a^2x'\sin\varphi + a^2\delta\}}{(a^2 - x'^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Bei der näheren Discussion haben wir 3 Fälle zu unterscheiden:

1) $\delta\,\mathrm{cosec}\,\varphi < a\sec\varphi$ oder $\delta < a\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

Alsdann besteht die Durchschnittscurve vierten Grades aus zwei symmetrischen Zweigen, welche sich im Punkte $x' = -\delta\,\mathrm{cosec}\,\varphi$, $z' = 0$ schneiden. Die beiden Zweige schneiden die z'-Axe in den Punkten $x' = 0$, $z' = \pm\frac{c\delta}{a}$ und erstrecken sich für $x' = \pm a\sec\varphi$ nach beiden Seiten der Z'-Axe ins Unendliche. Sie nähern sich asymptotisch den beiden Geraden $x' = \pm a\sec\varphi$. Diese Curve besitzt zwei Wendepunkte, welche zur Abscisse:

$$x' = \frac{a}{4\delta\cos^2\varphi}\{-3a\sin\varphi + \cos\varphi\sqrt{9a^2\mathrm{tg}^2\varphi - 8\delta^2}\}$$

gehören. Ein specieller Fall findet für $\delta = 0$ statt.

Alsdann schneiden sich die beiden Zweige im Coordinatenanfang und liegen sowohl zur X'-Axe als zur Z'-Axe symmetrisch.

2) $\delta = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

Dadurch geht die Gleichung (24) über in:

$$c^2(a + x'\cos\varphi)\,\mathrm{tg}^2\varphi = z'^2(a - x'\cos\varphi)$$

Die Durchschnittscurve ist mithin alsdann vom dritten Grade. Sie liegt symmetrisch zur X'-Axe und schneidet dieselbe im Punkte $x' = -a\sec\varphi$, $z' = 0$. Diese Curve erstreckt sich sowohl auf der

Digitized by Google

positiven als auf der negativen Seite der Z'-Axe für $x' = a\sec\varphi$ ins Unendliche und hat die Asymptote $x' = a\sec\varphi$. In ihrem Durchschnittspunkte mit der X'-Axe steht die Tangente an die Curve auf dieser Axe senkrecht. Ausserdem besitzt diese Curve zwei Wendepunkte, welche zur Abscisse $x' = -\frac{1}{2}a\sec\varphi$ gehören.

3) $\delta > a\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

In diesem Falle besteht die Durchschnittscurve vierten Grades aus zwei Zweigen, welche symmetrisch zur X'-Axe liegen, dieselbe aber nicht schneiden. Von der Z'-Axe schneiden sie bezüglich die Stücke $\pm\frac{c\delta}{a}$ ab. Für $x' = -\frac{a^2\sin\varphi}{\delta\cos^2\varphi}$ ist die Tangente an dieselbe der X'-Axe parallel. Ausserdem besitzt diese Curve die beiden Asymptoten $x' = \pm a\sec\varphi$.

Auf analoge Weise ergiebt sich als Gleichung der Durchschnittscurve des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) mit der Ebene senkrecht auf der xz-Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel ψ bildet und von der Z-Axe das Stück e abschneidet:

$$c^2 y'^2 = (e + x'\sin\varphi)^2 (a^2 - x'^2\cos^2\psi) \tag{25}$$

d. i. eine Curve vierten Grades, welche symmetrisch zur X'-Axe liegt. Auch hierbei haben wir die 3 Fälle zu unterscheiden $e \lessgtr a\,\mathrm{tg}\,\psi$. Diese Curve ist in allen Fällen geschlossen und besitzt, wenn $e < a\,\mathrm{tg}\,\psi$ ist, einen Doppelpunkt. Für $e = 0$ erhält man eine Curve vierten Grades, welche eine ähnliche Gestalt wie die Lemniskate hat.

Schneiden wir schliesslich den geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) durch eine Ebene senkrecht auf der YZ-Ebene, welche mit der Y-Axe den Winkel ϑ bildet und von der Z-Axe das Stück f abschneidet, so erhält man auf die oben ausgeführte Weise als Gleichung der betreffenden Durchschnittscurve:

$$c^2 y'^2 \cos^2\vartheta = (f + y'\sin\vartheta)^2 (a^2 - x'^2) \tag{26}$$

d. i. im Allgemeinen eine Curve vierten Grades.

Die verschiedenen Fälle, welche sich hieraus ergeben, je nachdem val. abs. $\mathrm{tg}\,\vartheta \lessgtr \frac{c}{a}$ ist, entsprechen den Kegelschnitten. Für val. abs. $\mathrm{tg}\,\vartheta < \frac{c}{a}$ stellt die Gleichung (26) eine geschlossene Curve

entsprechend der Ellipse beim Kegel dar, welche für $\vartheta = 0$ in eine Ellipse übergeht. Für $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{c}{a}$ erstreckt sich die Durchschnittscurve nach der positiven Seite der Y-Axe ins Unendliche.

Sie schneidet die Y'-Axe im Punkte $x' = 0$, $y' = -\frac{f}{c}\sqrt{a^2+c^2}$, die X'-Axe in den Punkten $x' = \pm a$, $y' = 0$ und liegt zwischen den in den letzteren Punkten auf der X'Axe errichteten Senkrechten. Diese Curve entspricht dem Parabelschnitt des Kegels. Für val. abs. $\operatorname{tg}\vartheta > \frac{c}{a}$ besteht die Durchschnittscurve (26) aus zwei nach beiden Seiten der Y'-Axe ins Unendliche sich erstreckenden Zweigen, von denen der eine Zweig die X'-Axe in den Punkten $x' = \pm a$, $y' = 0$, die Y'-Axe im Punkte $x' = 0$, $y' = -\frac{af}{a\sin\vartheta + c\cos\vartheta}$ schneidet. Der andere Zweig schneidet die Y'-Axe in dem Punkte $x' = 0$, $y' = -\frac{af}{a\sin\vartheta - c\cos\vartheta}$. Diese Curve entspricht der Hyperbel beim Kegel.

Für $f' = 0$ geht die Gleichung (26) über in:

$$x' = \pm\sqrt{a^2 - c^2\operatorname{ctg}^2\vartheta}$$

Die Ebenen, welche durch die singuläre Kante gehen, schneiden daher aus dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) zwei erzeugende Geraden desselben aus, wenn val. abs. $\operatorname{tg}\vartheta > \frac{c}{a}$ ist. Für $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{c}{a}$ fallen diese beiden Geraden in eine einzige zusammen.

§ 12.

Wir wollen nun die Untersuchungen ebener Schnitte des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) verlassen und zur Betrachtung seiner Tangentialebene übergehen.

Als Gleichung derselben im Punkte xyz der Fläche ergibt sich:

$$xz^2(\xi - x) - c^2y(\eta - y) - z(a^2 - x^2)(\zeta - z) = 0$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (17):

$$xz^2(\xi - x) - cy\,.\,c\eta - z(a^2 - x^2)\zeta = 0 \tag{27}$$

Digitized by Google

Problem 2. Let $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ be vectors in $\mathbb{R}^n$ such that $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ and $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Let $\mathbf{x}$ be a vector in $\mathbb{R}^n$ such that $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = a$ and $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = b$. Show that $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2 + b^2 + \|\mathbf{x} - a\mathbf{u} - b\mathbf{v}\|^2$.

Solution. Let $\mathbf{x}$ be a vector in $\mathbb{R}^n$ such that $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = a$ and $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = b$. Then $\mathbf{x} - a\mathbf{u} - b\mathbf{v}$ is orthogonal to both $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$, since

$$(\mathbf{x} - a\mathbf{u} - b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - a\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - b\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = a - a(1) - b(0) = 0$$

and

$$(\mathbf{x} - a\mathbf{u} - b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} - a\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - b\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = b - a(0) - b(1) = 0.$$

Therefore, $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ is orthogonal to $\mathbf{x} - a\mathbf{u} - b\mathbf{v}$, and by the Pythagorean theorem,

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + \mathbf{x} - a\mathbf{u} - b\mathbf{v}\|^2 = \|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{x} - a\mathbf{u} - b\mathbf{v}\|^2.$$

Since $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are orthogonal unit vectors, $\|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\|^2 = a^2 + b^2$, so $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2 + b^2 + \|\mathbf{x} - a\mathbf{u} - b\mathbf{v}\|^2$.

Problem 3. Let $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ be orthonormal vectors in $\mathbb{R}^n$, and let $\mathbf{x}$ be a vector in $\mathbb{R}^n$. Show that $\|\mathbf{x}\|^2 \geq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)^2$. When does equality hold?

Solution. Let $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ be orthonormal vectors in $\mathbb{R}^n$, and let $\mathbf{x}$ be a vector in $\mathbb{R}^n$. Let $\mathbf{y} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$. Then $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ is orthogonal to each of $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$, since

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i) - \cdots - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_i) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i)(1) = 0.$$

Therefore, $\mathbf{y}$ is orthogonal to $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, and by the Pythagorean theorem,

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y} + \mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \geq \|\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)^2.$$

Equality holds when $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, that is, when $\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$.

Problem 4. Let $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ be orthonormal vectors in $\mathbb{R}^n$, and let $\mathbf{x}$ be a vector in $\mathbb{R}^n$. Show that $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)^2$ if and only if $\mathbf{x} \in \operatorname{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$.

Solution. Let $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ be orthonormal vectors in $\mathbb{R}^n$, and let $\mathbf{x}$ be a vector in $\mathbb{R}^n$. Let $\mathbf{y} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$. Then $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ is orthogonal to each of $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$, since

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i) - \cdots - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_i) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i)(1) = 0.$$

Therefore, $\mathbf{y}$ is orthogonal to $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, and by the Pythagorean theorem,

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y} + \mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \geq \|\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)^2.$$

Equality holds when $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, that is, when $\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$.

Problem 5. Let $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ be orthonormal vectors in $\mathbb{R}^n$, and let $\mathbf{x}$ be a vector in $\mathbb{R}^n$. Show that $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)^2$ if and only if $\mathbf{x} \in \operatorname{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$.

Solution. Let $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ be orthonormal vectors in $\mathbb{R}^n$, and let $\mathbf{x}$ be a vector in $\mathbb{R}^n$. Let $\mathbf{y} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$. Then $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ is orthogonal to each of $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$, since

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i) - \cdots - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_i) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i)(1) = 0.$$

Therefore, $\mathbf{y}$ is orthogonal to $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, and by the Pythagorean theorem,

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y} + \mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \geq \|\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)^2.$$

Equality holds when $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, that is, when $\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$.

§ 13.

Unsere nächste Aufgabe sei, das Volumen V zu bestimmen, welches von den Ebenen $x = 0$, $x = x_0$, $z = z_0$, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teile des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) begrenzt wird. Für dasselbe ergiebt sich:

$$V = \int_0^{x_0} \int_0^{z_0} y \, dx \, dz = \frac{1}{c} \int_0^{x_0} dx \sqrt{a^2 - x^2} \int_0^{z_0} z \, dz$$

$$(30) \quad V = \frac{z_0^2}{2c} \left\{ \tfrac{1}{2} x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right) \right\}$$

oder, wenn man die zu x_0, z_0 gehörige Coordinate y mit y_0 bezeichnet

$$(31) \quad V = \tfrac{1}{4} x_0 y_0 z_0 + \tfrac{1}{4} a^2 \frac{z_0^2}{c} \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)$$

Das Volumen V mit der vorgeschriebenen Begrenzung ist demnach gleich dem vierten Teil des rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0 vermehrt um ein Prisma, dessen Grundfläche ein Quadrat mit der Seite $\frac{1}{2}a$, und dessen Höhe die mit $\arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)$ multiplicirte vierte Proportionale zu c und z_0 ist.

Setzt man in der Gleichung (30) $x_0 = a$, so geht dieselbe über in

$$V = \frac{\pi a^2 z_0^2}{8c}$$

d. i. aber der vierte Teil desjenigen Volumens V', welches von dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) und der Ebene $z = z_0$ begrenzt wird. Daraus folgt:

$$(32) \quad V' = \tfrac{1}{2} \pi a^2 \frac{z_0^2}{c}.$$

Das von dem geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) und der Ebene $z = z_0$ begrenzte Volumen ist also gleich der Hälfte eines Cylinders, dessen Grundkreis den Radius a hat, und dessen Höhe die vierte Proportionale zu c und z_0 ist.

Ziehen wir in Betracht, dass die zur XY-Ebene parallele Ebene $Z = Z_0$ aus der vorgelegten Fläche eine Ellipse mit den Halbaxen a und $\frac{az_0}{c}$ ausschneidet, so lässt sich die Formel (52) so deuten:

Digitized by

By Lemma 1.2, $\mathcal{M}$ is the set of those Dirichlet series f with $\sigma_a(f) \le 0$ and $\sigma_b(f) \le 0$. Hence $\mathcal{M}$ is a subalgebra of $\mathcal{D}$ containing $\mathcal{C}$. Moreover, $\mathcal{M}$ is a maximal subalgebra of $\mathcal{D}$. For if $f \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{M}$, then $\sigma_a(f) > 0$ or $\sigma_b(f) > 0$. Suppose $\sigma_a(f) > 0$. Then $f(s) \to \infty$ as $s \to 0$ through real values. Hence f is not bounded on any vertical line $\sigma = \sigma_0$ with $\sigma_0 \le 0$. Thus f is not a multiplier of $\mathcal{M}$. Hence $\mathcal{M}$ is a maximal subalgebra of $\mathcal{D}$.

Let $\mathcal{M}_0$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $f(s) \to 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then $\mathcal{M}_0$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$, then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_0$. Thus $\mathcal{M}_0$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_1$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_1$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_1$. Thus $\mathcal{M}_1$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_2$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_2$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_2$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_2$. Thus $\mathcal{M}_2$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_3$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_3$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_3$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_3$. Thus $\mathcal{M}_3$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_4$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_4$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_4$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_4$. Thus $\mathcal{M}_4$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_5$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_5$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_5$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_5$. Thus $\mathcal{M}_5$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_6$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_6$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_6$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_6$. Thus $\mathcal{M}_6$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_7$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_7$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_7$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_7$. Thus $\mathcal{M}_7$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_8$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_8$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_8$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_8$. Thus $\mathcal{M}_8$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_9$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_9$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_9$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_9$. Thus $\mathcal{M}_9$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{10}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{10}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{10}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{10}$. Thus $\mathcal{M}_{10}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{11}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{11}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{11}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{11}$. Thus $\mathcal{M}_{11}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{12}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{12}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{12}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{12}$. Thus $\mathcal{M}_{12}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{13}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{13}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{13}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{13}$. Thus $\mathcal{M}_{13}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{14}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{14}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{14}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{14}$. Thus $\mathcal{M}_{14}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{15}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{15}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{15}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{15}$. Thus $\mathcal{M}_{15}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{16}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{16}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{16}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{16}$. Thus $\mathcal{M}_{16}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{17}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{17}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{17}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{17}$. Thus $\mathcal{M}_{17}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{18}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{18}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{18}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{18}$. Thus $\mathcal{M}_{18}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{19}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{19}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{19}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{19}$. Thus $\mathcal{M}_{19}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{20}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{20}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{20}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{20}$. Thus $\mathcal{M}_{20}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{21}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{21}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{21}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{21}$. Thus $\mathcal{M}_{21}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{22}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{22}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{22}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{22}$. Thus $\mathcal{M}_{22}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{23}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{23}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{23}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{23}$. Thus $\mathcal{M}_{23}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{24}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{24}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{24}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{24}$. Thus $\mathcal{M}_{24}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{25}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{25}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{25}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{25}$. Thus $\mathcal{M}_{25}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{26}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{26}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{26}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{26}$. Thus $\mathcal{M}_{26}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{27}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{27}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{27}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{27}$. Thus $\mathcal{M}_{27}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{28}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{28}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{28}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{28}$. Thus $\mathcal{M}_{28}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{29}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{29}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{29}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{29}$. Thus $\mathcal{M}_{29}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{30}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{30}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{30}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{30}$. Thus $\mathcal{M}_{30}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{31}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{31}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{31}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{31}$. Thus $\mathcal{M}_{31}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{32}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{32}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{32}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{32}$. Thus $\mathcal{M}_{32}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{33}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{33}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{33}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{33}$. Thus $\mathcal{M}_{33}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{34}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{34}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{34}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{34}$. Thus $\mathcal{M}_{34}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{35}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{35}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{35}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{35}$. Thus $\mathcal{M}_{35}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{36}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{36}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{36}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{36}$. Thus $\mathcal{M}_{36}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{37}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{37}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{37}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{37}$. Thus $\mathcal{M}_{37}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{38}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{38}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{38}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{38}$. Thus $\mathcal{M}_{38}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{39}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{39}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{39}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{39}$. Thus $\mathcal{M}_{39}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{40}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{40}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{40}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{40}$. Thus $\mathcal{M}_{40}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{41}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{41}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{41}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{41}$. Thus $\mathcal{M}_{41}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{42}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{42}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{42}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{42}$. Thus $\mathcal{M}_{42}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{43}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{43}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{43}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{43}$. Thus $\mathcal{M}_{43}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{44}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{44}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{44}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{44}$. Thus $\mathcal{M}_{44}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{45}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{45}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{45}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{45}$. Thus $\mathcal{M}_{45}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{46}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{46}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{46}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{46}$. Thus $\mathcal{M}_{46}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{47}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{47}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{47}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{47}$. Thus $\mathcal{M}_{47}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{48}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{48}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{48}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{48}$. Thus $\mathcal{M}_{48}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{49}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{49}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{49}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{49}$. Thus $\mathcal{M}_{49}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{50}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{50}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{50}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{50}$. Thus $\mathcal{M}_{50}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{51}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{51}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{51}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{51}$. Thus $\mathcal{M}_{51}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{52}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{52}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{52}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{52}$. Thus $\mathcal{M}_{52}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{53}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{53}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{53}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $\sigma_a(f) = 0$. Then $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Hence f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{53}$. Thus $\mathcal{M}_{53}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{54}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ or $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{54}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{54}$, then $\sigma_a(f) = 0$ and $\sigma_b(f) = 0$. Suppose $f(s) \to \alpha \neq 0$ as $s \to \infty$ through real values. Then f is not a multiplier of $\mathcal{M}_{54}$. Thus $\mathcal{M}_{54}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$.

Let $\mathcal{M}_{55}$ be the set of those $f \in \mathcal{M}$ such that $\sigma_a(f) < 0$ and $\sigma_b(f) < 0$. Then $\mathcal{M}_{55}$ is a maximal ideal of $\mathcal{M}$. For if $f \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{55}$, then $\sigma_a(f) = 0$ or $\sigma_b(f) = 0$

Diese Formel lässt sich noch anders deuten. Es ergiebt sich nämlich daraus:

$$V = \tfrac{1}{6}\pi ab_1 h + \tfrac{1}{6}\pi ab_2 h + \tfrac{1}{3}\pi a(b_1 + b_2)h$$

$$V = \frac{h}{3}\left\{ \tfrac{1}{2}(\pi ab_1 + \pi ab_2) + 2\pi ab_3 \right\}$$

Setzt man nun:

$$\pi ab_1 = G_1$$
$$\pi ab_2 = G_2$$
$$\pi ab_3 = M,$$

wobei G_1 und G_2 die begrenzenden Ellipsen, M die Mittenfigur des Körpers V bedeutet, so ist:

$$V = \frac{h}{3}\{\tfrac{1}{2}(G_1 + G_2) + 2M\} \tag{35}$$

d. i. die Formel, welche in der Stereometrie vom Prismatoid bewiesen wird.

Die beiden Formeln (34) und (35) lassen sich noch verallgemeinern. Wir wollen diese Verallgemeinerung kurz für die erstere durchführen. Betrachtet man nämlich das Volumen zwischen den Ebenen $x = 0$, $x = x_0$, $z = z_1$, $z = z_2$, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17), so erhält man für dasselbe:

$$V' = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2c}\left\{ \tfrac{1}{2}x_0\sqrt{x_0^2 - a^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)\right\}$$

Nun ist aber:

$$\frac{z_2^2 - z_1^2}{2c} = \frac{h(z_1 + z_2)}{2c} = h\,\frac{z_3}{c}$$

und

$$\frac{z_3}{c}\left\{ \tfrac{1}{2}x_0\sqrt{a^2 - x_0^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right)\right\} = M',$$

wenn M' den Teil von M bezeichnet, welcher von den zu $x = 0$, $x = x_0$ zugehörigen Ordinaten der Ellipse, von der X-Axe und dem zugehörigen Bogen begrenzt wird. Folglich resultirt:

$$V' = M' . h.$$

Auf analoge Weise ergiebt sich der entsprechende Ausdruck für die Formel (35).

III. Abschnitt.

Die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei.

§ 14.

Um zunächst den geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus zu betrachten, nehmen wir als Gleichungen der Leithyperbel:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{array}\right. \tag{36}$$

Demnach wird die X-Axe singuläre Kante, die YZ-Ebene Directorebene. Also erhält man als Gleichungen des betreffenden Cono-Cuneus, wenn man wieder c^2 für $\frac{a^2c^2}{b^2}$ setzt:

$$c^2y^2 = z^2(x^2 - a^2) \tag{37}$$

Da diese Gleichung nur die Quadrate von x, y, z enthält, so ist zunächst klar, dass die vorgelegte Fläche symmetrisch zu den drei Coordinatenebenen liegt. Ferner folgt ohne Weiteres, dass es nur reelle Werte für y und z giebt, wenn val. abs. $x \gtrless a$ ist. Der in Rede stehende Cono-Cuneus besteht daher aus zwei gesonderten Teilen zu beiden Seiten der Directorebene, woher die Bezeichnung „geteilt" entnommen ist.

Wir wollen nicht näher auf ebene Schnitte des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus eingehen, da wir dabei auf ganz ähnliche Betrachtungen wie beim geraden elliptischen Cono-Cuneus geführt werden. Bemerkt sei hier nur, dass die zur XY-Ebene parallele Ebene $z = h$ aus der vorgelegten Fläche (37) die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2y^2}{a^2h^2} = 1 \tag{38}$$

ausschneidet. Für $h = c$ ergiebt sich demnach eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a. Die Mittelpunkte aller dieser Hyperbeln liegen auf der Z-Axe, ihre reellen Axen in der YZ-Ebene, ihre imaginären Axen in der YZ-Ebene. Die reellen Axen der ausgeschnittenen Hyperbeln sind einander gleich $2a$, die imaginären dagegen wachsen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante.

Ziehen wir die Brennpunkte dieser ausgeschnittenen Hyperbeln in Betracht, so liegen diese, wie sich aus dem Gesagten ergiebt, in

Digitized by Google

der XZ-Ebene. Als Gleichung des geometrischen Ortes dieser Brennpunkte erhält man:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{39}$$

d. h. in Worten: Der geometrische Ort der Brennpunkte aller Hyperbeln, welche aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) durch Ebenen parallel der XY-Ebene ausgeschnitten werden, ist eine Hyperbel in der XZ-Ebene mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren reelle Axe $2a$ in der X-Axe, deren imaginäre Axe $2c$ in der Z-Axe liegt. Ist $c = a$, so ist dieser geometrische Ort eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a.

Aus der Vergleichung von (38) und (39) folgt, wenn wir $\frac{ah}{c} = c$ setzen:

$$h = \frac{c^2}{a}$$

Daraus fliesst der Satz: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu a und c ist, schneidet aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) eine Hyperbel aus, welche gleich ist dem geometrischen Orte der Brennpunkte aller durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus der vorgelegten Fläche ausgeschnittenen Hyperbeln.

Es ist dies ein ganz ähnliches Resultat, wie wir es beim geraden elliptischen Cono-Cuneus erhalten haben.

Vergleichen wir die beiden Resultate (22) und (39), so erhalten wir den Satz:

Sind der gerade elliptische und der geteilte gerade hyperbolische Cono-Cuneus, welche dieselbe Directorebene und dieselbe singuläre Kante haben, so beschaffen, dass die Ebene in der Entfernung a von der singulären Kante aus dem elliptischen einen Kreis mit dem Radius a, aus dem hyperbolischen eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a ausschneidet, so ist der geometrische Ort der Brennpunkte der Ellipsen des elliptischen Cono-Cuneus, deren Entfernung von der singulären Kante absolute gleich oder grösser als a ist, gleich dem geometrischen Orte der Brennpunkte der Hyperbeln des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus.

Die durch die Gleichung (38) dargestellte Hyperbel besitzt zwei Asymptoten, welche der Gleichung genügen:

$$y = \pm \frac{h}{c} x$$

Die Asymptoten aller Hyperbeln, welche aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) durch Ebenen parallel der XY-Ebene ausgeschnitten werden, liegen demnach auf einer Fläche, welche durch die Gleichung dargestellt wird:

$$cy = \pm xz$$

Diese zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$(40) \qquad \begin{cases} cy - xz = 0 \\ cy + xz = 0 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass die Asymptoten der Hyperbeln des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus auf zwei hyperbolischen Paraboloiden liegen. Um die Gleichungen derselben auf die übliche Form zu bringen, wenden wir die Coordinatentransformation an:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - z'\sin\varphi \\ y &= y' \\ z &= x'\sin\varphi + z'\cos\varphi \end{aligned}$$

Dadurch gehen die Gleichungen (40) über in:

$$cy' = \pm\left[(x'^2 - z'^2)\sin\varphi\cos\varphi + x'z'(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right]$$

Für $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi = 0$ ergiebt sich $\varphi = \frac{\pi}{4}$, wodurch man erhält:

$$x'^2 - z'^2 = \pm 2cy'$$

Die beiden hyperbolischen Paraboloide genügen also den Gleichungen:

$$(41) \qquad \begin{cases} \dfrac{x'^2}{2c} - \dfrac{z'^2}{2c} = y' \\ \dfrac{z'^2}{2c} - \dfrac{x'^2}{2c} = y' \end{cases}$$

Diese Paraboloide sind demnach der Art, dass Ebenen parallel der $X'Z'$-Ebene gleichseitige Hyperbeln aus ihnen ausschneiden. Ausserdem sind ihre Spuren in den Ebenen der $x'y'$ und der $y'z'$ einander gleich.

§ 15.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) ergiebt sich, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$xz^2(\xi - x) - c^2 y(\eta - y) + z(x^2 - a^2)(\zeta - z) = 0$$

oder:

$$(42) \qquad xz^2(\xi - x) - cy \,.\, c\eta + z(x^2 - a^2)\zeta = 0$$

Digitized by Google

Schon aus den allgemeinen Erörterungen der Einleitung geht hervor, dass diese Tangentialebene den geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) im Allgemeinen in der durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden und in einer Curve dritten Grades schneidet. Sie berührt aber im Allgemeinen die vorgelegte Fläche nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben. Eine Ausnahme hiervon findet nur für $x = \pm a$ statt; d. h. nur die Tangentialebenen in den Durchschnittspunkten des in Rede stehenden Cono-Cuneus (37) mit der XZ-Ebene berühren denselben längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden. Diese Tangentialebenen sind zugleich der Directorebene parallel und schneiden aus der vorgelegten Fläche nur die betreffende erzeugende Gerade aus.

Ein anderer specieller Fall ergiebt sich für $z = 0$, und zwar erhält man dafür aus der Gleichung (42):

$$\zeta = \pm \frac{c}{\sqrt{x^2 - a^2}} \eta$$

In den Punkten der singulären Kante des geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) giebt es demnach im Allgemeinen je zwei Tangentialebenen, welche durch die X-Axe gehen und mit der XZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Analog dem Resultate beim geraden elliptischen Cono-Cuneus folgt, dass diese Tangentialebenen aus der vorgelegten Fläche ausser der singulären Kante zwei auf beiden Seiten der Directorebene liegende, von derselben gleich weit entfernte erzeugende Geraden ausschneiden.

Jede durch die singuläre Kante gehende Ebene ist mithin im Allgemeinen eine Tangentialebene des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus.

Für die Gleichungen der Normale im Punkte xyz des vorgelegten Cono-Cuneus (37) erhält man, wenn x_1, y_1, z_1 die laufenden Cordinaten sind:

$$\frac{x_1 - x}{xz^2} = \frac{y_1 - y}{-c^2 y} = \frac{z_1 - z}{z(x^2 - a^2)} \tag{43}$$

§ 16.

Betrachten wir jetzt in der Gleichung:

$$F \equiv c^2 y^2 - z^2 (x^2 - a^2) = 0 \tag{44}$$

c als variabel, so stellt dieselbe eine Schaar von geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneis dar. Alle Flächen dieser Schaar gehen

Digitized by Google

durch die X-Axe und berühren sich in den beiden Geraden $x = \pm a$, $y = 0$. Sie besitzen also keine eigentliche einhüllende Fläche.

Anders verhält es sich, wenn wir in der Gleichung (44) c als constant, a dagegen als variabel annehmen. Wenden wir hierauf das in § 8. erhaltene Resultat an, so erhält man als Gleichung der einhüllenden Fläche der vorgelegten Flächenschaar:

$$\begin{cases} cy - xz = 0 \\ cy + xz = 0 \end{cases}$$

Das sind aber die Gleichungen (40). Die einhüllende Fläche der vorgelegten Flächenschaar besteht demnach aus den beiden hyperbolischen Paraboloiden, auf denen die Asymptoten aller Hyperbeln des geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) liegen.

Für die erste Schaar von geradlinigen Flächen, welche durch die Gleichung (44) dargestellt wird, wollen wir noch die Orthogonalflächen bestimmen. Angenommen, eine dieser Orthogonalflächen habe die Gleichung $\varphi = 0$, dann sind die cosinus der Winkel, welche die Normale derselben mit den drei Coordinatenaxen bildet, bezüglich proportional:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ferner sind die cosinus der Winkel, welche die Normale einer Fläche der vorgelegten Flächenschaar mit den drei Coordinatenaxen bildet, bezüglich proportional:

$$\frac{\partial F}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Da diese beiden Normalen nach der obigen Bedingung auf einander senkrecht stehen, so erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{45}$$

Setzen wir hierin für $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ihre Werte und eliminiren dann c^2 zwischen der erhaltenen Gleichung und der Gleichung (44) der gegebenen Flächenschaar, dann ergiebt sich als partielle Differentialgleichung der gesuchten Orthogonalflächen:

$$xyz \frac{\partial \varphi}{\partial x} - z(x^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y(x^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{46}$$

Nach der Lagrange'schen Reduction der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf ein System gewöhnlicher

Digitized by Google

Ich bitte Sie, mir Ihre Meinung über diese Angelegenheit gefälligst bekannt zu machen. Mit vorzüglicher Hochachtung

Ihr ergebener
Dr. Hermann Kantorowicz

Hermann Kantorowicz to Gustav Radbruch

Freiburg i. Breisgau, 20.12.1911

Sehr geehrter Herr Kollege! Ich bitte Sie, mir Ihre Meinung über diese Angelegenheit gefälligst bekannt zu machen. Mit vorzüglicher Hochachtung

Ihr ergebener
Dr. Hermann Kantorowicz

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

$$(49) \qquad V = \frac{z_0^2}{2c}\left\{\tfrac{1}{2}x_0\sqrt{x_0^2-a^2} - \tfrac{1}{2}a^2\lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right)\right\}$$

Beachten wir, dass: $c^2y_0^2 = z_0^2(x_0^2-a^2)$ ist, so geht die Gleichung (49) über in:

$$(50) \qquad V = \tfrac{1}{4}x_0y_0z_0 - \tfrac{1}{4}\frac{a^2z_0^2}{c}\lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right)$$

Von diesem Volumen gelten analoge Sätze wie von demjenigen des geraden elliptischen Cono-Cuneus. Wir wollen diese hier nicht erst entwickeln, sondern auf eine andere Betrachtungsweise eingehen.

Lässt man längs einer durch die Ebene $x = x_0$ aus der vorgelegten Fläche (37) ausgeschnittenen Geraden eine gerade Linie parallel der XY-Ebene so hingleiten, dass sie stets durch die Z-Axe geht, zo erzeugt sie ein hyperbolisches Paraboloid, welches der Gleichung:

$$cy = xz$$

genügt. Für das Volumen V' zwischen den Ebenen $x = x_0$, $z = z_0$ der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teil dieser Fläche erhält man:

$$V' = \tfrac{1}{4}x_0y_0z_0$$

Mithin resultirt:

$$(51) \qquad V' - V = v = \frac{a^2z_0^2}{4c}\lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right)$$

Bezeichnen wir ferner den Hyperbelsector OPA (Fig. 1.) mit s, so ist, wenn die Hyperbel der Gleichung (38) genügt, und wenn man z_0 für h setzt:

$$(52) \qquad s = \frac{a^2z_0}{2c}\lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right)$$

Demnach geht die Gleichung (51) über in:

$$(53) \qquad v = \tfrac{1}{2}s.z_0$$

d. h. bei constantem z_0 und variablem x_0 verhalten sich die Volumina v wie die zugehörigen Hyperbelsectoren.

Wir haben im § 14. gesehen, dass die Ebene $z = c$ aus dem geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37) eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a ausschneidet. Setzen wir $z_0 = c$ in die Gleichungen (52) und (53) ein, so erhalten wir:

$$(54) \qquad \begin{cases} v = \tfrac{1}{2}s..c \\ s = \tfrac{1}{2}a^2\lg\left(\dfrac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right) \end{cases}$$

Digitized by Google

Hieran wollen wir einige Bemerkungen über Summen und Differenzen von v knüpfen, wenn x_0 verschiedene Werte annimmt. Wie sich aus den Gleichungen (54) ergiebt, haben wir dazu nur die entsprechenden Sectoren s zu betrachten.

Unter den gemachten Voraussetzungen lässt sich die zweite Gleichung in (54) auch so schreiben:

$$s = \tfrac{1}{2} a^2 \lg\left(\frac{x+y}{a}\right) \tag{55}$$

d. h. der Sector einer gleichseitigen Hyperbel ist gleich dem halben Quadrat des halben Parameters multiplicirt mit dem natürlichen Logarithmus von dem Quotienten aus der Summe der zugehörigen Endcoordinaten dividirt durch den halben Parameter.

Aus der Gleichung (55) folgt:

$$2s = \tfrac{1}{2} a^2 \lg\left(\frac{x+y}{a}\right)^2$$

Ist nun: $2s = s'$ und sind x', y' die zum Sector s' zugehörigen Endcoordinaten, so ist demnach:

$$x'+y' = \frac{(x+y)^2}{a} \tag{56}$$

Daraus fliesst der Satz: Die Summe der Coordinaten des doppelten Sectors einer gleichseitigen Hyperbel ist die vierte Proportionale zum halben Parameter derselben und der Summe der Coordinaten des einfachen Sectors.

Es ist aber: $x'^2 - y'^2 = a^2$. Mithin erhält man aus der Gleichung (56):

$$x' = \frac{x^2+y^2}{a} \tag{57}$$

Den vorigen Satz kann man daher auch so aussprechen: Die Abscisse des doppelten Sectors einer gleichseitigen Hyperbel ist die vierte Proportionale zum halben Parameter derselben und der Verbindungslinie des Endpunktes der Ordinate des einfachen Sectors mit dem Hyperbelmittelpunkt.

Um mithin den Sector OP_1A (Fig. 1.) zu verdoppeln, construire man die vierte Proportionale zu OA und OP_1, trage dieselbe auf OA von O aus bis Q_2 ab, errichte in Q_2 die Senkrechte P_2Q_2 auf OQ_2, so ist Sector $OP_2A = 2$ Sect. OP_1A.

Digitized by Go

Damit ist zugleich die Aufgabe gelöst, einen gegebenen Sector einer gleichseitigen Hyperbel zu halbiren. Denn nach der Gleichung (57) ist

$$x^2 + y^2 = a \cdot x' \tag{58}$$

Um daher den Sector OP_2A zu halbiren, construire man über OQ_2 als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die Scheiteltangente der Hyperbel in R schneidet, mache $OP_1 = OR$, so ist

$$\text{Sect. } OP_1A = \tfrac{1}{2}\,\text{Sect. } OP_2A.$$

Aus der Gleichung (58) folgt noch, wenn man $y^2 = x^2 - a^2$ setzt:

$$x^2 = \tfrac{1}{2}a(a + x') \tag{59}$$

Beachtet man ferner, dass der Krümmungsradius für die gleichseitige Hyperbel

$$\varrho = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}$$

ist, so ergiebt sich nach der Gleichung (57):

$$\overline{OQ_2}^2 = OP_1 \cdot \varrho$$

d. h. in Worten: OQ_2 ist die mittlere Proportionale zu OP_1 und dem Krümmungsradius in P_1.

Zugleich ist klar, dass für den Scheitel der gleichseitigen Hyperbel der Krümmungsradius gleich dem halben Parameter derselben ist.

Die Relation (56) lässt sich leicht verallgemeinern. Ist nämlich $s_n = n \cdot s$ und gehört s_n zu den Endcoordinaten x_n, y_n, so erhält man:

$$x_n + y_n = \frac{(x+y)^n}{a^{n-1}} \tag{60}$$

Daraus resultirt der Satz: Die Summe der Coordinaten des n-fachen, Sectors einer gleichseitigen Hyperbel ist gleich der $n$ten Potenz der Summe der Coordinaten des einfachen Sectors dividirt durch die $(n-1)$te Potenz des halben Parameters derselben.

Sind ferner die beiden Sectoren s_1 und s_2 gegeben, welche bezüglich zu den Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gehören, so ist nach (55):

$$s_1 + s_2 = \tfrac{1}{2}a^2 \lg\left(\frac{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}{a^2}\right)$$

Ist nun: $s_1 + s_2 = s_3$, wobei s_3 zu den Coordinaten x_3, y_3 gehört, so ergiebt sich die Relation:

Digitized by Google

$$(61) \qquad x_3 + y_3 = \frac{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)}{a}$$

d. h. in Worten: Ist die Summe zweier Sectoren s_1 und s_2 einer gleichseitigen Hyperbel gleich einem dritten Sector s_3, so ist die Summe der Coordinaten dieses dritten Sectors die vierte Proportionale zum halben Parameter und den beiden Summen aus den Coordinaten der beiden zu summirenden Sectoren.

Setzt man: $\frac{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)}{a} = c$, so erhält man:

$$x_3 = \frac{a^2 + c^2}{2c}$$

Um daher einen Sector s_3 zu finden (Fig. 2.), welcher gleich der Summe der beiden Sectoren OP_1A und OP_2A ist, construire man die vierte Proportionale OS zu OA, $OQ_1 + Q_1P_1 = OR_1$ und $OQ_2 + Q_2P_2 = OR_2$, halbire AS in T, trage AS von S aus auf SO bis U ab, ziehe durch U die Parallele UV zu OT, mache $OQ_3 = SV$, errichte in Q_3 die Senkrechte P_3Q_3 auf OQ_3, so ist Sect. OP_3A der gesuchte Sector.

Damit ist zugleich die Aufgabe gelöst: Es sei ein beliebiger Punkt P_2 auf dem Bogen einer gleichseitigen Hyperbel gegeben, man bestimme hierzu einen Punkt P_3 so, dass der Sector OP_2P_3 gleich einem gegebenen Sector OP_1A ist.

Durch Wiederholung derselben Operation lässt sich die Gleichung (61) verallgemeinern. Sind die Hyperbelsectoren $s_1, s_2, \ldots s_n$ gegeben, und ist:

$$s_{n+1} = s_1 + s_2 + \ldots + s_n,$$

so ist, wenn die Sectoren bezüglich zu den Endcoordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; $\ldots x_{n+1}, y_{n+1}$ gehören:

$$(62) \qquad x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\ldots(x_n + y_n)}{a^{n-1}}$$

Aus der Gleichung (61) folgt ferner:

$$(63) \qquad x_1 + y_1 = \frac{x_3 + y_3}{x_2 + y_2} a$$

d. h. in Worten: Ist der Sector s_1 einer gleichseitigen Hyperbel gleich der Differenz $s_3 - s_2$ zweier Sectoren, so ist die Summe der Coordinaten von s_1 die vierte Proportionale zu der Summe der Coordinaten von s_2, der Summe der Coordinaten von s_3 und dem halben Parameter der Hyperbel.

Daraus ergiebt sich eine der vorigen ähnliche Construction.

Digitized by Google

§ 18.

Wir wollen jetzt einige Beziehungen an der gleichseitigen Hyperbel entwickeln, wenn die Punkte P_1 und P_2 (Fig. 3.) so auf dem Hyperbelbogen liegen, dass O, A, Q_1 und Q_2 vier harmonische Punkte sind. Man hat demnach die Proportion:

(64) $$OA : AQ_1 = OQ_2 : Q_1 Q_2$$

Finden ferner die Relationen statt:

$$\text{Sect. } OP_3 A = \tfrac{1}{3} \text{ Sect. } OP_1 A$$
$$\text{Sect. } OP_4 A = \tfrac{1}{2} \text{ Sect. } OP_2 A,$$

so folgt zunächst aus (58):

$$\overline{OP_4}^2 = OA \,.\, OQ_2$$
$$\overline{OP_4}^2 = \tfrac{1}{2}(OA \,.\, OQ_2 + OA \,.\, OQ_2)$$
$$\overline{OP_4}^2 = \tfrac{1}{2}(OA \,.\, OQ_1 + OA \,.\, Q_1 Q_2 + OQ_1 \,.\, OQ_2 - AQ_1 \,.\, OQ_2)$$

Daraus folgt mit Anwendung der Proportion (64):

$$\overline{OP_4}^2 = \tfrac{1}{2} OQ_1 (OA + OQ_2)$$

Nach (59) ist nun: $\frac{1}{2} OA (OA + OQ_2) = \overline{OQ_4}^2$, folglich erhält man:

$$\overline{OP_4}^2 \,.\, OA = OQ_1 \,.\, \overline{OQ_4}^2$$

Wenden wir hierauf noch die Gleichung (58) an, nach welcher $OA \,.\, OQ_1 = \overline{OP_3}^2$ ist, so resultirt:

$$\overline{OP_4}^2 \,.\, \overline{OA}^2 = \overline{OP_3}^2 \,.\, \overline{OQ_4}^2$$

also

$$OQ_4 : OP_4 = OA : OP_3$$

Aus der Figur 3. folgt, wenn R der Durchschnittspunkt der Scheiteltangente mit OP_4 ist:

$$OQ_4 : OP_4 = OA : OR$$

Aus beiden Proportionen ergiebt sich:

(65) $$OP_3 = OR$$

Daraus fliesst der Satz: Ist der Sector $OP_4 A$ die Hälfte des Sectors $OP_2 A$ und liegen P_1 und P_2 so auf dem Bogen der gleichseitigen Hyperbel, dass die senkrecht darunter liegenden Punkte Q_1 und Q_2 mit dem Mittelpunkt O und dem Scheitel A der Hyperbel vier harmonische Punkte bilden, so schneidet die Scheiteltangente von der Verbindungslinie des Mittelpunktes O mit P_4 ein Stück OR ab, welches die mittlere Proportionale zu OA und OQ_1 ist.

Digitized by Google

Zugleich geht hieraus hervor: Wenn O, A, Q_1 und Q_2 vier harmonische Punkte sind, und man halbirt den Sector OP_2A, so dass Sect. $OP_4A = \frac{1}{2}$ Sect. OP_2A ist, so hat man damit auch den Sector OP_1A halbirt, denn man hat nur $OP_3 = OR$ zu machen, so ist Sect. $OP_3A = \frac{1}{2}$ Sect. OP_1A.

Diese Beziehungen lassen sich zu einer Construction von Punkten einer gleichseitigen Hyperbel verwenden, wenn der Mittelpunkt O und der Scheitel A derselben gegeben sind. Man wählt nämlich vier harmonische Punkte O, A, Q_1 und Q_2, construirt über OQ_1 und OQ_2 als Durchmesser Halbkreise, welche die in A auf OA errichtete Senkrechte in R und R_1 schneiden, trägt OR_1 von O aus auf OR bis P_4 ab, so ist P_4 ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel.

Andererseits lässt sich hierauf, wenn die gleichseitige Hyperbel gegeben ist, eine Construction des zu A zugeordneten vierten harmonischen Punktes zu O, A und Q_1 gründen, wie auch eine Construction des zu O conjugirten vierten harmonischen Punktes zu O, A und Q_2.

Construirt man ferner in P_4 unter Beibehaltung derselben Bedingungen die Tangente P_4T an die gleichseitige Hyperbel, so ist:

$$\overline{P_4T^2} = \left(x_4 - \frac{a^2}{x_4}\right)^2 + y_4^2$$

$$\overline{P_4T^2} = \frac{y_4^2(x_4^2 + y_4^2)}{x_4^2}$$

Da aber die Bedingung besteht:

$$\text{Sect. } OP_4A = \tfrac{1}{2}\,\text{Sect. } OP_2A,$$

so folgt nach (59):

$$x_4^2 + y_4^2 = ax_2,$$

also:

$$\frac{y_4^2}{x_4^2} = \frac{x_2 - a}{x_2 + a}$$

Mithin erhält man:

$$\overline{P_4T^2} = \frac{ax_2(x_2 - a)}{x_2 + a}$$

$$\overline{P_4T^2} = \frac{OA \cdot OQ_2 \cdot AQ_2}{OA + OQ_2}$$

$$\overline{P_4T^2} = \frac{OA \cdot OQ_2 \cdot AQ_1 + OA \cdot OQ_2 \cdot Q_1Q_2}{OA + OQ_2}$$

Digitized by Google

The meaning and character of the letters are as follows:

$$\begin{array}{llll} \text{Sol} = \odot, & \text{Mercurius} = \text{☿}, & \text{Luna} = \text{☽}, & \text{Venus} = \text{♀}, \\ \text{Jupiter} = \text{♃}, & \text{Mars} = \text{♂}, & \text{Saturnus} = \text{♄}. & \end{array}$$

Hence we have

$$\begin{array}{llll} \text{Sol} = \odot, & \text{Mercurius} = \text{☿}, & \text{Luna} = \text{☽}, & \text{Venus} = \text{♀}, \\ \text{Jupiter} = \text{♃}, & \text{Mars} = \text{♂}, & \text{Saturnus} = \text{♄}. & \end{array}$$

Second Figure.

$$\begin{array}{llll} \text{Sol} = \odot, & \text{Mercurius} = \text{☿}, & \text{Luna} = \text{☽}, & \text{Venus} = \text{♀}, \\ \text{Jupiter} = \text{♃}, & \text{Mars} = \text{♂}, & \text{Saturnus} = \text{♄}. & \end{array}$$

Hence we have

$$\begin{array}{llll} \text{Sol} = \odot, & \text{Mercurius} = \text{☿}, & \text{Luna} = \text{☽}, & \text{Venus} = \text{♀}, \\ \text{Jupiter} = \text{♃}, & \text{Mars} = \text{♂}, & \text{Saturnus} = \text{♄}. & \end{array}$$

Third Figure.

Hence we have

Fourth Figure.

Hence we have

multiplied by $\frac{1}{2}\pi$ will be the area of the circle described by the point P, or

$$\frac{\pi}{2}(x-\frac{1}{2}).$$

If the circle be described about the point A, as the centre, the area will be $\frac{\pi}{2}(x+\frac{1}{2})$; and the area of the ring described by the motion of the line PQ will be

$$\frac{\pi}{2}(x+\frac{1}{2})-\frac{\pi}{2}(x-\frac{1}{2}).$$

Again, let the line PQ, $Fig.$ 2, be the ordinate, Ap the abscissa x, pq dx,

Fig. 2.

and the curve AQ the curve proposed, whose nature is expressed by the equation $y=x^n$. Then will the area Apq be $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, and the area $Apq+pqQP$ will be $\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{nx^{n+1}}{n+1}+\frac{nx^{n-1}dx^2}{2n+2}+\frac{n\cdot n-1\cdot x^{n-2}dx^3}{2\cdot 3\cdot n+1}+\&c.$ Therefore the area $pqQP$ will be $\frac{nx^{n+1}}{n+1}+\frac{nx^{n-1}dx^2}{2n+2}+\frac{n\cdot n-1\cdot x^{n-2}dx^3}{2\cdot 3\cdot n+1}+\&c.$ Now if the line PQ be moved about the point A, as the centre, the area described by the point P will be $\frac{nx^{n+1}}{2n+2}+\frac{n\cdot n-1\cdot x^{n-2}dx^3}{2\cdot 3\cdot n+1}+\&c.$ multiplied by $\frac{1}{2}\pi$, or $\frac{\pi}{2}\left(\frac{nx^{n+1}}{2n+2}+\frac{n\cdot n-1\cdot x^{n-2}dx^3}{2\cdot 3\cdot n+1}+\&c.\right)$. If the circle be described about the point A, as the centre, the area will be $\frac{\pi}{2}\left(\frac{nx^{n+1}}{2n+2}+\frac{n\cdot n-1\cdot x^{n-2}dx^3}{2\cdot 3\cdot n+1}+\&c.\right)$; and the area of the ring described by the motion of the line PQ will be

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{nx^{n+1}}{2n+2}+\frac{n\cdot n-1\cdot x^{n-2}dx^3}{2\cdot 3\cdot n+1}+\&c.\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{nx^{n+1}}{2n+2}+\frac{n\cdot n-1\cdot x^{n-2}dx^3}{2\cdot 3\cdot n+1}+\&c.\right).$$

Der einfache gerade hyperbolische Cono-Cuneus stimmt wieder darin mit dem geteilten überein, dass auch bei ihm die Brennpunkte der ausgeschnittenen Hyperbeln auf einer Hyperbel liegen, deren Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2 z^2}{b^2 c^2} = 1 \tag{68}$$

Der Mittelpunkt dieser Hyperbel ist demnach der Coordinatenanfang, ihre reelle Axe $2a$ liegt in der X-Axe, ihre imaginäre $2\frac{bc}{a}$ in der Z-Axe.

Berücksichtigen wir hierbei die Gleichung (39), so resultirt der Satz: Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel, so liegen die Brennpunkte der durch Ebenen parallel dieser Durchschnittslinie aus ihnen ausgeschnittenen Hyperbeln auf einer und derselben Hyperbel.

Die Asymptoten einer durch eine Ebene parallel der XY-Ebene aus dem einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) ausgeschnittenen Hyperpel genügen der Gleichung:

$$y = \pm \frac{bc}{az} x$$

Die Asymptoten aller dieser ausgeschnittenen Hyperbeln liegen demnach auf den beiden hyperbolischen Paraboloiden:

$$\begin{cases} ayz - bcx = 0 \\ ayz + bcx = 0 \end{cases} \tag{69}$$

Vertauschen wir in diesen Gleichungen y mit x, so gehen dieselben über in:

$$\begin{cases} axz - bcy = 0 \\ axz + bcy = 0 \end{cases} \tag{70}$$

Das sind aber die Flächen, auf denen die Asymptoten der Hyperbeln des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) liegen, wenn man denselben um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$ dreht.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (40) resultirt daher der Satz: Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel, und dreht man den einen um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so liegen die Asymptoten der aus beiden

Digitized by Google

Flächen durch Ebenen parallel ihrer Durchschnittslinie ausgeschnittenen Hyperbeln auf denselben beiden hyperbolischen Paraboloiden.

Da diese Paraboloide, wie beim geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus nachgewiesen worden ist, zugleich die einhüllende Fläche der Schaar von Cono-Cuneis bilden, welche durch ihre Gleichung dargestellt wird, wenn der Parameter der aus einer solchen Fläche ausgeschnittenen gleichseitigen Hyperbel variabel ist, so kann man diesen Satz auch so deuten:

Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel mit dem halben Parameter a, so bestehen die einhüllenden Flächen der beiden Flächenschaaren, welche durch die Gleichungen der beiden Cono-Cunei dargestellt werden, wenn a variabel ist, und der eine um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$ gedreht wird, aus denselben beiden hyperbolischen Paraboloiden.

§ 20.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) ergiebt sich, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten sind:

$$\frac{c^2x\xi}{a^2z^2} - \frac{y(\eta - y)}{b^2} - \frac{c^2x^2\zeta}{a^2z^3} = 0 \tag{71}$$

Von derselben gelten analoge Beziehungen wie von derjenigen des geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus. Die Berührungspunkte derjenigen Tangentialebenen, welche die vorgelegte Fläche (67) längs einer ganzen Erzeugenden berühren, liegen auf den Durchschnittslinien der XZ-Ebene mit der Fläche. In den Punkten der singulären Kante giebt es ebenfalls je zwei Tangentialebenen, welche durch die singuläre Kante gehen und mit der YZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden.

Betrachten wir jetzt das Volumen V zwischen den Ebenen $y = 0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $x = 0$ und dem zugehörigen Teile des einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67), so erhält man für dasselbe:

$$V = \frac{az_0^2}{2bc}\left\{\tfrac{1}{2}y_0\sqrt{y_0^2+b^2} + \tfrac{1}{2}b^2\lg\left(\frac{y_0+\sqrt{y_0^2+b^2}}{b}\right)\right\} \tag{72}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (67) lässt sich diese Gleichung auch so schreiben:

$$(73)\quad V = \tfrac{1}{4}x_0 y_0 z_0 + \frac{ab z_0^2}{4c} \lg\left(\frac{a y_0 z_0 + bc x_0}{ab z_0}\right)$$

Ferner folgt aus der Gleichung (50), wenn man darin: $\sqrt{x_0^2 - a^2}$ durch $\frac{c y_0}{z_0}$ ersetzt:

$$(74)\quad V' = \tfrac{1}{4}x_0 y_0 z_0 - \frac{a^2 z_0^2}{4c} \lg\left(\frac{x_0 z_0 + c y_0}{a z_0}\right)$$

Vertauschen wir in (73) x mit y, d. h. drehen wir den einfachen geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (67) um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so geht diese Gleichung über in:

$$(73a)\quad V = \tfrac{1}{4}x_0 y_0 z_0 + \frac{ab z_0^2}{4c} \lg\left(\frac{a x_0 z_0 + bc y_0}{ab z_0}\right)$$

Setzen wir hierin $a = b$, so resultirt:

$$V + V' = \tfrac{1}{2}x_0 y_0 z_0$$

Daraus fliesst der Satz: Schneiden sich die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, in einer gleichseitigen Hyperbel, und dreht man den einen um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so ist die Summe der zu denselben Coordinaten x_0, y_0, z_0 gehörenden Volumina der beiden Flächen gleich dem halben Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

Digitized by Google

XV.

Miscellen.

1.

Mehrfach collineare Dreiecke bei Kegelschnitten.

Für zwei collineare Dreiecke giebt es bekanntlich stets einen Kegelschnitt, in Bezug auf welchen die beiden Dreiecke polarreciprok sind. Wenn nun die Dreiecke r-fach collinear ($r = 2, 3, 4, 6$) sind *), so giebt es r solche Kegelschnitte. Die Beziehungen dieser Kegelschnitte unter einander wollen wir erörtern.

Es seien die Dreiecke abc und 123 in $(a_1 b_2 c_3)$-Collineation. Bei passend gewähltem Coordinatensystem sind dann:

$$bc : x = 0 \qquad \overline{23} : \lambda x + y + z = 0$$
$$ca : y = 0 \qquad \overline{31} : x + \mu y + z = 0$$
$$ab : z = 0 \qquad \overline{12} : x + y + \nu z = 0$$

und der Kegelschnitt, in Bezug auf welchen die Polarreciprocität statt hat:

$$k \equiv \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0$$

Nehmen wir nun nach einander die Fälle der mehrfachen Collineation in Betracht.

1. Die Dreiecke sind auch in $(a_1 b_3 c_2)$-Collineation, wenn $\mu = 1$ ist. Der zu dieser Collineation gehörige Kegelschnitt ist:

$$k \equiv \lambda x^2 + y^2 + z^2 + 2\mu yz + 2zx + 2xy = 1$$

*) Mehrfache Collineation von zwei Dreiecken. Gruner's Archiv Bd. 70. Seite 105.

also $k - k_1 \equiv (\mu - 1)(y - z)^2$, woraus folgt, dass die beiden Kegelschnitte sich doppelt berühren, mit $\overline{a1}$ als Berührungssehne.

Sehen wir nach, ob diese Beziehung, die sich als notwendig herausstellte, auch hinreichend ist?

Es seien k und k_1 in doppelter Berührung. Bei passend gewähltem Coordinatensystem seien ihre Gleichungen:

$$k \equiv \xi^2 + 2\eta\zeta = 0 \qquad k_1 \equiv l\xi^2 + 2\eta\zeta = 0$$

Der Punkt 1 habe die Coordinaten $0,\ \eta_1,\ \zeta_1$

„ 2 „ „ „ $\xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2$.

k gehöre zur $(a_1 b_2 c_3)$-, k_1 zur $(a_1 b_3 c_2)$-Collineation.

Dann wird

$$\overline{ac}: \quad \zeta_2\xi + \zeta_2\eta + \eta_2\zeta = 0 \quad \text{(Polare von 2 bis } k\text{)}$$
$$\overline{ab}: \quad l\xi_2\zeta + \zeta_2\eta + \eta_2\zeta = 0 \quad \text{(Polare von 2 bei } k_1\text{)}$$

Nun ist aber 3 einerseits der Pol von ab bei $k(l\xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2)$, andererseits der Pol von ac bei $k_1\left(\frac{\xi_2}{l},\ \eta_2,\ \zeta_2\right)$, also muss

$$l^2 = 1 \quad \text{folglich} \quad l = -1$$

sein. ($l = 1$ würde k_1 mit k identisch machen).

Die Bedingungen sind also:

a) k und k_1 sollen sich doppelt berühren;

b) die Summe der beiden Factoren (l), wodurch $k + lk_1$ sich in lineare Factoren zerlegt, muss $= 0$ sein.

Dann kann man den Punkt 2 ganz beliebig, den Punkt 1 auf der Berührungssehne annehmen, dann erst bestimmt sich 3 eindeutig so, dsss 123 in Bezug auf k und k_1 dasselbe Dreieck zum polarreciproken besitzt.

2. Die Dreiecke sind vierfach collinear, wenn $\lambda = \mu = \nu$ ist.

$k \equiv \lambda x^2 + \lambda\eta^2 + \lambda z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0$ gehört zur $(a_1 b_2 c_3)$-Collection

$k_1 \equiv \lambda x_2 + y^2 + z^2 + 2\lambda y^2 + 2zx + 2xy = 0$ „ „ $(a_1 b_3 c_2)$ „

$k_2 = x^2 + \lambda y^2 + z^2 + 2yz + 2\lambda zx + 2xy = 0$ „ „ $(a_3 b_2 c_1)$ „

$k_3 \equiv x^2 + y^2 + \lambda z^2 + 2yz + 2zx + 2\lambda xy = 0$ „ „ $(a_2 b_1 c_3)$ „

also

Digitized by Google

XV.

Miscellen.

1.

Mehrfach collineare Dreiecke bei Kegelschnitten.

Für zwei collineare Dreiecke giebt es bekanntlich stets einen Kegelschnitt, in Bezug auf welchen die beiden Dreiecke polarreciprok sind. Wenn nun die Dreiecke r-fach collinear ($r = 2, 3, 4, 6$) sind *), so giebt es r solche Kegelschnitte. Die Beziehungen dieser Kegelschnitte unter einander wollen wir erörtern.

Es seien die Dreiecke abc und 123 in $(a_1\, b_2\, c_3)$-Collineation. Bei passend gewähltem Coordinatensystem sind dann:

$$\begin{aligned} \overline{bc} &: x = 0 & \overline{23} &: \lambda x + y + z = 0 \\ \overline{ca} &: y = 0 & \overline{31} &: x + \mu y + z = 0 \\ \overline{ab} &: z = 0 & \overline{12} &: x + y + \nu z = 0 \end{aligned}$$

und der Kegelschnitt, in Bezug auf welchen die Polarreciprocität statt hat:

$$k \equiv \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0$$

Nehmen wir nun nach einander die Fälle der mehrfachen Collineation in Betracht.

1. Die Dreiecke sind auch in $(a_1\, b_3\, c_2)$-Collineation, wenn $\mu = \nu$ ist. Der zu dieser Collineation gehörige Kegelschnitt ist:

$$k \equiv \lambda x^2 + y^2 + z^2 + 2\mu yz + 2zx + 2xy = 1$$

*) Mehrfache Collineation von zwei Dreiecken. Gruner's Archiv Bd. 70. Seite 105.

also $k - k_1 \equiv (\mu - 1)(y-z)^2$, woraus folgt, dass die beiden Kegelschnitte sich doppelt berühren, mit $a1$ als Berührungssehne.

Sehen wir nach, ob diese Beziehung, die sich als notwendig herausstellte, auch hinreichend ist?

Es seien k und k_1 in doppelter Berührung. Bei passend gewähltem Coordinatensystem seien ihre Gleichungen:

$$k \equiv \xi^2 + 2\eta\zeta = 0 \qquad k_1 \equiv l\xi^2 + 2\eta\zeta = 0$$

Der Punkt 1 habe die Coordinaten $0,\ \eta_1,\ \zeta_1$

„ 2 „ „ „ $\xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2$.

k gehöre zur $(a_1 b_2 c_3)$-, k_1 zur $(a_1 b_3 c_2)$-Collineation.

Dann wird

$$\overline{ac}: \quad \zeta_2\xi + \zeta_2\eta + \eta_2\zeta = 0 \quad \text{(Polare von 2 bis } k)$$
$$\overline{ab}: \quad l\xi_2\zeta + \zeta_2\eta + \eta_2\zeta = 0 \quad \text{(Polare von 2 bei } k_1)$$

Nun ist aber 3 einerseits der Pol von ab bei $k(l\xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2)$, andererseits der Pol von ac bei $k_1\left(\frac{\xi_2}{l},\ \eta_2,\ \zeta_2\right)$, also muss

$$l^2 = 1 \quad \text{folglich} \quad l = -1$$

sein. ($l = 1$ würde k_1 mit k identisch machen).

Die Bedingungen sind also:

a) k und k_1 sollen sich doppelt berühren;

b) die Summe der beiden Factoren (l), wodurch $k + lk_1$ sich in lineare Factoren zerlegt, muss $= 0$ sein.

Dann kann man den Punkt 2 ganz beliebig, den Punkt 1 auf der Berührungssehne annehmen, dann erst bestimmt sich 3 eindeutig so, dass 123 in Bezug auf k und k_1 dasselbe Dreieck zum polarreciproken besitzt.

2. Die Dreiecke sind vierfach collinear, wenn $\lambda = \mu = \nu$ ist.

$k \equiv \lambda x^2 + \lambda\eta^2 + \lambda z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0$ gehört zur $(a_1 b_2 c_3)$-Collection

$k_1 \equiv \lambda x_2 + y^2 + z^2 + 2\lambda y^2 + 2zx + 2xy = 0$ „ „ $(a_1 b_3 c_2)$ „

$k_2 = x^2 + \lambda y^2 + z^2 + 2yz + 2\lambda zx + 2xy = 0$ „ „ $(a_3 b_2 c_1)$ „

$k_3 \equiv x^2 + y^2 + \lambda z^2 + 2yz + 2zx + 2\lambda xy = 0$ „ „ $(a_2 b_1 c_3)$ „

also

Digitized by Google

$$k-k_1\equiv(\lambda-1)(y-z)^2 \qquad k_2-k_3\equiv(\lambda-1)(y-z)(-2x+y+z)$$
$$k-k_2\equiv(\lambda-1)(z-x)^2 \qquad k_3-k_1\equiv(\lambda-1)(z-x)(x-2y+z)$$
$$k-k_3\equiv(\lambda-1)(x-y)^2 \qquad k_1-k_2\equiv(\lambda-1)(x-y)(x+y-2z)$$

woraus man ganz deutlich die gegenseitige Lage der vier Kegelschnitte sieht. Wenn man noch beachtet, dass die Tangente an Q vom gemeinschaftlichen Punkte (1, 1, 1) der Berührungssehnen von k und k_1, k und k_2, k und k_3 sind:

$$x+\alpha y+\alpha^2 z=0 \qquad x+\alpha^2 y+\alpha z=0$$

(α eine complexe dritte Einheitswurzel) kann man die Ergebnisse so aussprechen:

Die binäre kubische Form, die $=0$ gesetzt die drei Berührungssehnen ($y-z=0$, $z-x=0$, $x-y=0$) darstellt, hat die erzeugenden gemeinschaftlichen Sehnen von k_1, k_2, k_3 ($-2x+y+z=0$, $x-2y+z=0$, $x+y-2z=0$) zur kubischen Covariante, und die Tangenten zur Hesse'schen Covariante.

Wenn man aber diese Tangenten und die zugehörige Berührungssehne zu Coordinatenaxen wählt, werden die Gleichungen einfacher:

$$k \equiv \xi^2+2\eta\zeta=0 \qquad \text{oder} \qquad k\equiv\xi^2+2\eta\zeta=0$$
$$k_1\equiv\xi^2+2\eta\zeta+(\eta-\zeta)=0 \qquad k_1\equiv\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0$$
$$k_2\equiv\xi^2+2\eta\zeta+(\alpha^2\eta-\alpha\zeta)^2=0 \qquad k_2\equiv\xi^2+\alpha\eta^2+\alpha^2\zeta^2=0$$
$$k_3\equiv\xi^2+2\eta\zeta+(\alpha\eta-\alpha^2\zeta)^2=0 \qquad k_3\equiv\xi^2+\alpha^2\eta^2+\alpha\zeta^2=0$$

die Gleichungen erscheinen in reeller Form, wenn man statt η, ζ resp. mit $\eta+\zeta i$ und $-\eta+\zeta i$ proportionale Grössen einführt.

Der Punkt 1 kann auf der Geraden $\eta-\zeta=0$ beliebig gewählt werden, dadurch aber bestimmt sich 1 2 3 eindeutig so, dass die zugehörigen polarreciproken Dreiecke identisch werden.

3. Die Dreiecke sind in $(a_1 b_2 c_3)$ -, $(a_2 b_3 c_1)$ -, $(a_3 b_1 c_2)$-Collineationen, wenn $\lambda\mu\nu=1$ ist.

$k_1\equiv\lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2+2yz+2zx+2xy=0$ gehört zu $(a_1b_2c_3)$-Collineation
$k_2\equiv x^2+\mu y^2+\mu\nu z^2+2\mu\nu yz+2zx+2\mu xy=0$ „ „ $(a_2b_3c_1)$- „
$k_3\equiv x^2+\mu\nu y^2+\nu z^2+2\mu\nu yz+2\nu zx+2xy=0$ „ „ $(a_3b_1c_2)$- „

Diese Kegelschnittte berühren sich im Allgemeinen nicht. Beziehen wir die beiden ersten auf ihr gemeinschaftliches Poldreieck. Ihre Gleichungen seien:

Digitized by Google

Let $ABCD$ be the given quadrilateral.

To determine $\triangle ABC$ we have AB, BC, and $\angle ABC$.

To determine $\triangle ACD$ we have AC, AD, and $\angle CAD$.

To determine $\triangle ABC$ we have AB, BC, and $\angle ABC$.

To determine $\triangle ACD$ we have AC, AD, and $\angle CAD$.

Let $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $AD = d$, $\angle ABC = \theta$, $\angle CAD = \phi$.

Then $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab\sin\theta$, and $\triangle ACD = \frac{1}{2}cd\sin\phi$.

Hence $\square ABCD = \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{2}cd\sin\phi$.

But $\cos\theta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, and $\cos\phi = \frac{c^2+d^2-b^2}{2cd}$.

Hence $\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$, and $\sin\phi = \sqrt{1-\left(\frac{c^2+d^2-b^2}{2cd}\right)^2}$.

Hence $\square ABCD = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2} + \frac{1}{2}cd\sqrt{1-\left(\frac{c^2+d^2-b^2}{2cd}\right)^2}$.

Let $a+b+c+d = 2s$, and this may be written

$$\square ABCD = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{4c^2d^2-(c^2+d^2-b^2)^2}.$$

But $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2 = (2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)$

$= [(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$

$= 2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a) = 16s(s-c)(s-b)(s-a)$.

Similarly $4c^2d^2-(c^2+d^2-b^2)^2 = 16s(s-d)(s-b)(s-a)$.

Hence $\square ABCD = \sqrt{s(s-c)(s-b)(s-a)} + \sqrt{s(s-d)(s-b)(s-a)}$.

$$k_4 \equiv \xi^2 + 2\eta\zeta = 0, \quad k_5 \equiv \eta^2 + \zeta\xi = 0, \quad k_6 \equiv \zeta^2 + 2\xi\eta = 0$$

Die sechs Kegelschnitte endlich bilden ein System, in Bezug auf welches die Dreiecke 123 und abc:

$$\begin{aligned} \overline{23}: &\quad \alpha\xi + \eta + \zeta = 0 & \overline{bc}: &\quad \alpha^2\xi + \eta + \zeta = 0 \\ \overline{31}: &\quad \xi + \alpha\eta + \zeta = 0 & \overline{ca}: &\quad \xi + \alpha^2\eta + \zeta = 0 \\ \overline{12}: &\quad \xi + \eta + \alpha\zeta = 0 & \overline{ab}: &\quad \xi + \eta + \alpha^2\zeta = 0 \end{aligned}$$

sechsfach polorreciprok sind.

Unter den 6 Kegelschnitten giebt es höchstens vier reelle, die beiden Dreiecke sind immer imaginär.

Klausenburg (Ungarn) 1884 Februar.

J. Vályi.

2.

Ueber drei geometrische Kreisörter.

Bei der Construction von Dreiecken aus gegebenen Stücken spielt die Lehre von den geometrischen Oertern eine wichtige Rolle. Wenn ich im folgenden auf drei solche Oerter die Aufmerksamkeit lenke, so bin ich weit entfernt zu behaupten, dass dieselben nicht schon anderweitig bekannt seien; indessen habe ich sie in keinem der bekannteren Werke über elementare Geometrie angetroffen. Auch dürfte die analytische Ableitung derselben, wenigstens meines Wissens, mir eigentümlich sein. Ich gehe nun an die Formulirung der Aufgabe:

„Wenn bei constanter Basis und constantem Radius des umschriebenen Kreises eines Dreieckes der Scheitel des Dreieckes sich längs der Peripherie des Kreises bewegt, so ist die Frage nach den geometrischen Oertern, welche der Schwerpunkt des Dreieckes, der Durchschnittspunkt seiner Höhen und der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises beschreiben."

Das System rechtwinkliger Coordinaten werde für alle drei Fälle so gelegt, dass die X-Axe mit der Basis des Dreieckes zusammenfällt, während die Y-Axe den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises enthält. Der Punkt A der Basis habe die Coordinaten $(-p, 0)$, der Punkt B $(+p, 0)$. Der Scheitel des Dreieckes besitze die variablen Coordinaten (x_1, y_1); endlich sei die Gleichung des Kreises:

Let $\mathcal{A}$ be a set of subsets of $\mathbb{R}$ and $\mathcal{B}$ a set of subsets of $\mathbb{R}^2$ such that

$$\mathcal{B} = \{A \times A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Then $\mathcal{A}$ is a σ-algebra if and only if $\mathcal{B}$ is a σ-algebra.

Proof. Suppose $\mathcal{A}$ is a σ-algebra. Then $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$, so $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}$. If $A \times A \in \mathcal{B}$, then $A \in \mathcal{A}$, so $A^c \in \mathcal{A}$, and hence $(A \times A)^c = (A^c \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times A^c)$ is not in $\mathcal{B}$ in general. Instead, we have

$$(A \times A)^c = (A^c \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times A^c) = (A^c \times A^c)^c \cup \text{[illegible]}$$

Let $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$. Then

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times A_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \times \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathcal{B}.$$

Conversely, suppose $\mathcal{B}$ is a σ-algebra. Then $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}$, so $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. If $A \in \mathcal{A}$, then $A \times A \in \mathcal{B}$, so $(A \times A)^c \in \mathcal{B}$. Thus $A^c \in \mathcal{A}$. Finally, if $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, then $\bigcup_n (A_n \times A_n) \in \mathcal{B}$, so $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$. $\square$

Lemma 2. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be measurable. Then the function $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ defined by $g(x, y) = f(x)$ is measurable.

Proof. For $a \in \mathbb{R}$,

$$g^{-1}((a, \infty)) = \{(x, y) : f(x) > a\} = f^{-1}((a, \infty)) \times \mathbb{R}.$$

Since f is measurable, $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{A}$, so $g^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{B}$. Hence g is measurable. $\square$

Lemma 3. Let $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be measurable. Then $h(x, y) = f(x) + g(y)$ is measurable.

Proof. Write $h = f \circ \pi_1 + g \circ \pi_2$ where $\pi_1(x, y) = x$ and $\pi_2(x, y) = y$. Each π_i is measurable, and the sum of measurable functions is measurable. $\square$

Aus der bekannten Gleichung für die Grösse des Radius des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises folgt für $\omega\tau = \eta$ der Wert

$$\eta = \frac{2p \cdot y_1}{2p + \sqrt{y_1^2 + (x_1 - p)^2} + \sqrt{y_1^2 + (x_1 + p)^2}}$$

Schafft man die Wurzelzeichen weg, und drückt mit Hilfe der Gleichung (1) alle x_1 durch y_1 aus, so resultirt folgende Bedingungsgleichung:

$$\alpha) \quad y_1 = \frac{\eta^2 + 2(r-q)\eta}{r-q}$$

Andrerseits muss der Punkt ω aus leicht einzusehenden Gründen immer auf der Geraden CO' liegen, deren Gleichung lautet:

$$\beta) \quad y = \frac{y_1 + r - q}{x_1} x + q - r$$

Eliminirt man mit Hilfe von (1) aus (β) die Grösse x_1, setzt ferner $x = \xi$ und $y = \eta$ aus der Gleichung (α), so wird

$$\frac{-p^2 \pm p\sqrt{r^2 - q^2 + y_1(r+q)}}{r+q} + r - q = \frac{y_1 + r - q}{\sqrt{r^2 - (y_1 - q)^2}} \xi$$

nach gehöriger Reduction folgt hieraus

$$\frac{p^2}{q+r} = \frac{\xi^2}{r+q+y_1}$$

Ersetzt man hierin den Wert y_1 durch η gemäss (α), so findet sich als Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\xi^2 + (\eta + r - q)^2 = 2r(r-q)$$

d. i. ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem unteren Durchschnitt des umschriebenen Kreises mit der Ordinatenaxe liegt (O'), und dessen Radius gleich ist AO'.

Der Beweis für den letzteren Ort lässt sich auch unschwer synthetisch führen. Bezeichnet man nämlich die Dreieckswinkel in gewohnter Weise mit α, β, γ, so ist

$$VAO' = \frac{\gamma}{2}$$

Nennt man einen Basiswinkel des gleichschenkligen Dreieckes $A\omega O'$ ψ, so ist wegen

$$\text{Wkl. } AO'C = \beta$$

$$\psi = 90^0 - \frac{\beta}{2}$$

und daher

$$\text{Wkl. } \omega AV = \psi - \frac{\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{w. z. } b. \text{ w.}$$

Es würde mich zu weit führen alle Fälle anzuführen, in denen vorstehende Oerter sehr einfache und elegante Dreiecksconstructionen erlauben; es genüge nur für den letzten Fall drei Aufgaben dieser Art anzuführen:

Von einem Dreiecke seien die Radien des um- und eingeschriebenen Kreises und die Basis oder ihr Gegenwinkel gegeben; oder: von einem Dreiecke sei die Basis, die Summe der Scheitelseiten und der Radius des eingeschriebenen Kreises gegeben. In diesen Fällen erlaubt der letzte geometrische Ort eine weit einfachere Construction als dies mit Hilfe der Rechnung und nachheriger Construction der berechneten Formel geschehen kann.

Karl Zelbr,
Assistent der k. k. Sternwarte zu Wien.

3.

Ueber die vollkommenen Zahlen, insbesondere über die bis jetzt zweifelhaften Fälle $2^{40}.(2^{41}-1)$, $2^{46}.(2^{47}-1)$ und $2^{52}.(2^{53}-1)$.

In einem Aufsatze von Krafft über die numeri perfecti (Comm. Petrop. T. VII. p. 7—14.) giebt dieser im Ganzen zehn solcher Zahlen an, als die einzigen bekannten. Die vollkommenen Zahlen (numeri perfecti) sind bekanntlich solche, für welche die Teilersumme der Zahl gleich dieser Zahl selbst ist. Die einfachste dieser Zahlen ist $6 = 1+2+3$; die allgemeine Formel ist $2^n(2^{n+1}-1) = N$ und zwar mit der Bedingung, dass der zweite Factor eine Primzahl ist. Bildet man nämlich unter dieser Voraussetzung die Divisorensumme von $2^n.(2^{n+1}-1)$, so erhält man für diese $(2^{n+1}-1).2^{n+1}$, mithin das Doppelte von N. Zieht man von der Divisorensumme N selbst ab, um die Summe der aliquoten Teiler zu erhalten, so ist letztere demnach gleich N.

Die von Krafft aufgeführten zehn numeri perfecti sind nun $2.(2^2-1)$, $2^2(2^3-1)$, $2^4(2^5-1)$, $2^6(2^7-1)$, $2^{12}(2^{13}-1)$, $2^{16}(2^{17}-1)$, $2^{18}(2^{19}-1)$, $2^{30}(2^{31}-1)$, $2^{40}(2^{41}-1)$ und $2^{46}(2^{47}-1)$.

Digitized by

Für die Zahlen 2^2-1 bis $2^{19}-1$ ist ihre Eigenschaft als Primzahlen sofort zu constatiren; $2^{31}-1 = 2147483647$ hat L. Euler als Primzahl erwiesen, und ich fand dies dadurch bestätigt, dass für die vier zusammengehörigen Formenclassen (1, 0, 13398); (22, 0, 609); (58, 0, 231); 42, 0, 319) nur eine einzige quadratische Darstellung möglich ist, nämlich $22.7001^2+609.1325^2$. Euler selbst hat den Nachweis dadurch geliefert, dass er die Zahl durch sämmtliche Primzahlen von den einzig möglichen Formen $248z+1$ und $248z+63$ bis zu der Quadratwurzel hin dividirte, ohne dass irgend einmal der Divisor aufging.

In Betreff der Zahlen $2^{41}-1$ und $2^{47}-1$ bemerkt Krafft, dass Euler in einer gelegentlichen Bemerkung diese für Primzahlen erklärt habe. Ich fand mich nun bewogen, nachdem ich schon vorher $2^{34}-1 = 223.616318177$ und $2^{43}-1 = 431.20408568497$ gefunden hatte[1]), auch jene beiden einer Prüfung zu unterwerfen. Es sei mir gestattet, das hierbei beobachtete Verfahren für eine der beiden, etwa $2^{47}-1$ kurz anzugeben.

Durch Ausziehung der Quadratwurzel aus $2^{47}-1 = 140737488355327$ findet man $2^{47}-1 = 11863283^2+4817238.1^2$.

Da nun jeder Prim-Divisor von 2^n-1, wenn n eine Primzahl ist, die Form $2nz+1$ haben muss, also für $2^{47}-1$ die Form $94z+1$, mit anderen Worten, da jeder Divisor $\equiv 1(47)$ ist, so muss auch -47 quadratischer Rest jedes Divisors sein. Es kam also darauf an, aus obiger quadratischen Darstellung, deren Determinante -4817238 ist, eine andere zu gewinnen, deren Determinante den Factor 47 enthielt. Setzt man zu dem Ende $(11863283-\alpha)^2$ statt 11863283^2, so hat man als Ausgleich zu dem zweiten Gliede $2.11863283\alpha-\alpha^2$ zu addiren. Für $\alpha = 12$ wird dann der neue Wert des zweiten Gliedes $\equiv 0(47)$ und die weiteren Werte für α, unter welchen diese Congruenz fortbesteht, sind durch die Form $47x+2$ bestimmt. So findet man unter anderen

$$2^{47}-1 = 11863081^2+2.3.43.47\,(629^2)$$

Behält man jetzt für die Determinante die Factoren $3.43.47$ bei, so muss von da an für α die Form $6063x+1643$ gebraucht werden, damit das zweite Glied $\equiv 0(3.43.47)$ bleibt. Es ergiebt sich dann ferner als Darstellung

$$2^{47}-1 = 11843249^2+2.3.43.47.17.37.73.853.$$

---

1) Zur Zeit war mir unbekannt, dass Krafft in dem citirten Aufsatze diese beiden Zerlegungen schon angiebt.

Digitized by Google

of the Act of 1911 (Schedule A), and the Act of 1912 (Schedule A), and the Act of 1913 (Schedule A), and the Act of 1914 (Schedule A), and the Act of 1915 (Schedule A), and the Act of

und in manchen Fällen auch noch darüber hinaus verdienen die von mir der Mehrzahl nach erst gefundenen cca 160 Determinanten, welche sämtlich für die entsprechenden Zahlengattungen nur Darstellungen in der Form (m, o, n) zulassen, bei weitem der Vorzug.

Die Methode besteht wesentlich darin, eine Anzahl von einfachst möglichen Determinanten auf leichte Weise zu gewinnen, vermöge deren sich die in Frage kommenden Primdivisoren je auf die Hälfte reduciren lassen, so dass also beispielsweise sich deren Anzahl bei 10 Determinanten bis auf den 1024ten Teil vermindert. Ich lege zu ihrer Auseinandersetzung eine bestimmte Zahl zu Grunde, um mich kurz fassen zu können; es sei dies

$$N = 2^{64} + 1 = 18 \cdot 446\,744 \cdot 073\,709 \cdot 551\,617.$$

Setzt man

$$N = (4\,294\,967\,296 - \alpha)^2 + (8\,589\,934\,592 - \alpha)\,\alpha + 1$$

und nennt das erste Glied rechts A, die beiden anderen zusammengenommen B, die beiden Teile B_1 und B_2, so handelt es sich darum, B als ein Product $m.n\ldots b^2$ darzustellen, wobei dann, jenachdem B positiv oder negativ ist, die gesuchte Determinante $\mp mn\ldots$ wird Die Primzahlen $m, n\ldots$ und ebenso die Functionen von b^2 können nur solche sein, für welche $\left(\frac{N}{m}\right), \left(\frac{N}{n}\right)$ u. s. w. $= +1$ ist. In unserem Falle ist dies zunächst 13. Man hat aber $B_1 \equiv 5\,(13)$. Setzt man daher $(5 - \alpha)\,\alpha \equiv -1\,(13)$, damit das ganze B durch 13 teilbar wird, oder auch statt 5 die congruente Zahl -8, so ist die Congruenz $\alpha^2 + 8\alpha \equiv 1\,(13)$ zu lösen. Es sei zu diesem Zwecke $\alpha = -4 + z$, so ergiebt sich $z^2 - 4 \equiv 0\,(13)$ und $z = \pm 2$, also $\alpha \equiv -4 \pm 2$ oder $= 13u + 7$ oder 11. Ferner hat man $B_1 \equiv 57\,(13^2)$. Setzt man wieder $(57 - \alpha)\,\alpha \equiv -1\,(13^2)$ oder $\alpha^2 + 112\alpha \equiv 1\,(13^2)$ und $\alpha = -56 + z$, so findet man $z^2 - 95 \equiv 0\,(13^2)$ und $z = \pm 67$, also $\alpha \equiv -56 \pm 67 = 13^2 u + 11$ oder 46.

Für $\alpha = 13u + 7$ oder 11 oder für $\alpha = 13^2 u + 11$ oder 46 wird also B stets den Factor 13, resp. 13^2 haben. Bestimmt man den Wert von α in gleicher Weise für die übrigen hierher gehörigen Primzahlen bis 100 oder 200, so lassen sich leicht Combinationen finden, um gleichzeitig eine Anzahl von bestimmten Factoren resp. von deren Quadraten in B einzuführen, so dass die neuen, sich noch ergebenden Factoren nicht zu gross werden. Diese selbst kann man dann, da sich die Wurzeln der betreffenden Congruenz sofort ergeben, selbst mit in die Reihe der übrigen aufnehmen. Jenachdem man nun den Wert für α positiv oder negativ gewählt hat, wird die Determinante negativ resp. positiv.

Da diejenigen Factoren m ausgeschlossen waren, für welche $\left(\frac{N}{m}\right) = -1$ ist, so setze man ferner

$$N = 2 = 2(3\,037\,000\,499 - \alpha)^2 + 2(6\,074\,000\,998 - \alpha)\alpha + 11\,857\,053\,615$$

und nenne wieder die Teile rechts A und B, resp. B_1 und B_2.

Jetzt treten die Primzahlen m ein, für welche $\left(\frac{2N}{m}\right) = +1$ ist. Die erste ist 3. Man hat $B_1 \equiv 1\,(3)$ und $B_2 \equiv 0\,(3)$, also ist die Congruenz $2(\alpha^2 + 2\alpha) \equiv 0\,(3)$ oder $\alpha^2 + 2\alpha \equiv 0\,(3)$ zu lösen. Zu dem Ende sei $\alpha = -1 + z$, dann ist $z = \pm 1$, woraus $\alpha = 3u + 0$ oder 1 folgt. Ferner $B_1 \equiv 7\,(3^2)$ und $B_2 \equiv 6\,(3^2)$, mithin $2(\alpha^2 + 2\alpha) \equiv 6\,(3^2)$ oder $\alpha^2 + 2\alpha \equiv 3\,(3^2)$. Man erhält $\alpha = 3^2u + 1$ oder 6 u. s. w.

Aehnlich kann man noch für

$$N = 3(24\,797\,000\,524 - \alpha)^2 + 3(4\,959\,401\,048 - \alpha)\alpha + 7\,531\,927\,889$$

u. s. w. verfahren, wobei jedesmal eine Anzahl der früheren Primzahlen austritt, um durch andere ersetzt zu werden. Es ist wol kaum nötig, zu bemerken, dass die rechte Seite der jedesmaligen Congruenz so umzuformen ist, dass sie sich zunächst durch den gewählten Factor a in $a.A$ teilen lässt.

Auf diese Weise erhielt ich für die vorliegende Zahl unter anderen folgende Determinanten, deren Vorzeichen weggelassen ist, weil die Zahl von der Form $4n+1$ ist.

3.11.67.157.673
3.13.31.599.1069
13.17.29.317.421
3.5.13.97.563.757
13.191.2777
41.97.1597
3.5.397.2113
3.7.19.421.3041
13.163.193.1091 u. s. w.

Aus dem Canon arithmeticus von C. G. J. Jacobi kann man ohne Weiteres für die Primzahlen bis 1000 die quadratischen Reste entnehmen und benutzt man die Determinanten mit grösseren Factoren erst gegen Ende hin, so machen auch diese keine besonderen Schwierigkeiten.

Digitized by Google

Dies ist in kurzen Umrissen die Methode, um die Determinanten zu finden; wie dieselbe benutzt wird, um die nicht geeigneten Primzahlen auszuschliessen, kann als bekannt vorausgesetzt werden.

Was nun den speciell vorliegenden Fall anderweit betrifft, so hatte ich schon früher festgestellt, dass $2^{64}+1$ keine Primzahl ist und ich vermutete ferner auf Grund einiger Untersuchungen, dass einer der Factoren nicht allzu hoch sein würde. Meine Prüfung erstreckte sich daher mit Hülfe obiger Determinanten auf die Zahlen bis 400000, und ich blieb zuletzt bei den Zahlen 211969, 267649 und 274177 stehen, deren letzte ein Divisor von $2^{64}+1$ ist. Man hat nämlich, wie bereits von M. Landry (Mondes 2. série LII.) gefunden:

$$18446744073709551617 = 274177 \cdot 67280421310721$$

Bis jetzt kennt man von den Zahlen $2^{2^n}+1$ vier als zusammengesetzte:

$2^{2^5}+1$ mit dem Factor 641. (L. Euler. Mémoires de Berlin. Année 1772).

$2^{2^{12}}+1$ mit dem Factor 114689
$2^{2^{23}}+1$ mit dem Factor 167772161
$2^{2^{26}}+1$ mit dem Factor 274177.
} Bulletin de l' Ac. des sciences St. Petersburg 1878 u. 1879. J. Pervouchine.

direct analysirt sind die erste und letzte.

Beiläufig erwähne ich noch die beiden Darstellungen als Summe zweier Quadrate.

$$2^{64}+1 = 4294967296^2+1$$
$$4046803256^2+1438793759^2.$$

Bremen, März 1885. P. Seelhoff.

5.

Bemerkungen über Gleichungsauflösung.

1.

Die Methoden, Gleichungen aufzulösen, wie sehr sie auch im Einzelnen von einander abweichen mögen, haben doch das Eine ge-

Digitized by Google

meinsam: Sie beruhen sämtlich in letzter Instanz auf irgend einem unendlichen Process, der zur Grenze führt. [Dass der Process in besondern Fällen auch abbrechen kann, ist bekannt.] Dieses gilt für die sogenannten exacten Methoden, welche in der Reduction der Gleichungen der vier ersten Grade auf Wurzelgrössen bestehen, ganz ebenso, wie bei dem Newton'schen Näherungsverfahren oder bei Lagrange's Entwicklung einer Wurzel der Gleichung in einen Kettenbruch.

Die folgende Bemerkung bezieht sich auf alle derartige Algorithmen und hat den Zweck, die überaus grosse Mannichfaltigkeit denkbarer Methoden der Gleichungsauflösung zu veranschaulichen.

Sei $f(x = 0$ die Gleichung, um deren Auflösung es sich handelt, so bringe man dieselbe auf irgend eine Weise auf die Form

$$x = \varphi(x),$$

[was sich auf unendlich viele Arten bewerkstelligen lässt.]

Alsdann wähle man einen beliebigen Anfangswert x_0 und bilde dann vermittelst der Function φ successive die Reihe von Werten:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0) \\ x_2 &= \varphi(x_1) \\ x_3 &= \varphi(x_2) \\ &\cdots\cdots \\ x_{n+1} &= \varphi(x_n) \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Erweist sich sich die gefundene Reihe als eine einem bestimmten Grenzwert zustrebende Zahlenfolge, so ist der Grenzwert eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Der Beweis dieser Behauptung folgt unmittelear aus den Prämissen.

2.

Die Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung kann entweder direct in Angriff genommen, also ein dazu dienlicher unendlicher Process aufgestellt werden, oder man reducirt die gegebene Gleichung zunächst auf eine andere, deren Auflösung bereits bekannt ist. Dieses letztere Verfahren, die Reduction, ist es nun, welches

Digitized by Google

vorzugsweise gemeint wird, wenn man von der Auflösung der Gleichungen spricht. Man weiss, auf wie mannichfaltige Weise sich die Reduction der Gleichungen der vier ersten Grade auf Wurzelgrössen, also auf die binomische Gleichung $x^n = w$, bewerkstelligen lässt.

Das hohe Interesse dieser Reductionen (Auflösungen) für den Mathematiker ist wohl vornehmlich in dem Umstande begründet, dass die Function $\sqrt[n]{w}$ nur von der einzigen Variabeln w abhängt, falls man nämlich den Wurzelexponenten n nicht ebenfalls als einen Paramater des Problems ansehen will.

Man kann aber auch, wie seit Jerrard's Entdeckung betreffs der Gleichung fünften Grades bekannt ist, die Gleichungen der fünf ersten Grade auf Functionen von nur einer Variabeln zurückführen, nämlich auf die trinomischen Gleichungen $z^n - z = w$.

Allerdings darf nicht übersehen werden, dass die Auffassung der Wurzeln der Gleichung $z^n - z = w$ als Functionen nur eines Parameters als eine künstliche, eigentlich nicht ganz zutreffende angesehen werden muss; denn w ist im Allgemeinen eine complexe Grösse, und eine Function $f(u+iv)$ einer complexen Veränderlichen $u+iv$ wird, wenn man die Berechnung durchführt, in den meisten Fällen (nicht immer) doch schliesslich von Functionen zweier Argumente abhängig.

Die Function $\sqrt[n]{w}$ dagegen lässt sich, wie man weiss, auf die Form bringen:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{u^2+v^2} \cdot e^{\frac{i}{n}\left(2k\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}\right)},$$

also das Product zweier Functionen je eines linearen Arguments darstellen, und hierin allein beruht meines Erachtens der theoretische Vorzug der Reduction einer Gleichung auf Wurzelgrössen vor der Reduction auf beliebige andere Functionen nur eines complexen Arguments, wie beispielsweise auf die Wurzeln der Gleichung $z^n - z = w$.

3.

Der folgende Algorithmus, welcher zur Berechnung der Wurzeln der Gleichung $z^n - z = w$ dient, scheint mir aus mehreren Gründen bemerkenswert.

Berechnet man vermittelst der Formel

$$z_{k+1} = \sqrt[n]{w + z_k}$$

indem man von einem beliebigen Anfangswerte z_0 ausgeht und einen beliebigen von den n Wurzelwerten $\sqrt[n]{\ }$, aber stets denselben, benutzt, successive die Reihe $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, \ldots$, so convergirt dieselbe zu einem bestimmten Grenzwert, und dieser ist eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Da ich im Besitz eines allgemeinen und stringenten Beweises dieser Behauptung noch nicht bin, so wäre es nicht undenkbar (wiewol mir unwahrscheinlich), dass dieselbe noch eingeschränkt werden müsste.

Vielleicht genügt Folgendes zur Verification derselben.

a) Für $w = 0$ ist der Satz richtig. Sei nämlich $z_0 = \varrho_0 e^{i\vartheta_0}$ der beliebige Anfangswert, so folgt leicht, wenn man jedesmal den νten der n Wurzelwerte wählt,

$$z_h = e^{i\left(\frac{2\nu\pi}{n} + \frac{2\nu\pi}{n^2} + \frac{2\nu\pi}{n^3} + \ldots + \frac{2\nu\pi}{n^h} + \frac{\vartheta_0}{n^h}\right)} \sqrt[n^\nu]{\varrho_0}$$

$$\text{also für } h = \infty,\ z_\infty = z = e^{i\frac{2\nu\pi}{n-1}}.$$

Das giebt für $\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1$ in der Tat $n-1$ der n Wurzeln der Gleichung $z^n - z = 0$. Die Wurzel $z = 0$ folgt freilich hieraus nicht und bleibt demnach auf diesem Wege unerreichbar.

b) Es ist leicht für einen beliebigen positiven reellen Wert w die reelle Wurzel der Gleichung auf diesem Wege numerisch zu berechnen.

Beispiel. $z^5 - z = 100$, also $z = \sqrt[5]{100 + z}$.

Ich setze willkürlich $z_0 = 1000$, so folgt:

$$z_1 = 4{,}0576$$
$$z_2 = 2{,}5320$$
$$z_3 = 2{,}5245$$
$$z_4 = 2{,}5244.$$

Also ist eine reelle Wurzel der Gleichung so genau, als es sich vermittelst fünfstelliger Logarithmen ausführen lässt, gefunden.

Anmerkung. Für complexe Grössen verliert dieser Algorithmus viel von seiner Einfachheit, weil die jedesmalige Separation des Reellen und Imaginären Umstände macht. Man könnte demselben aber seine Einfachheit erhalten, wenn man im Besitz einer

Digitized by Google

Tafel wäre, in welcher die Logorithmen complexer Zahlen (für die Basis 10) zusammengestellt sind. Die Aufgabe, eine derartige Tafel zu construiren ist, wenn man sich auf eine geringe Anzahl von Decimalstellen beschränkt, ganz gut durchführbar, und würden solche Tafeln bei der steigenden Wichtigkeit der Theorie der conformen Abbildungen für die Physik auch sonst von Nutzen sein.

4.

Der soeben betrachtete Algorithmus kann mit Leichtigkeit auf jede beliebige Gleichung ausgedehnt werden, indem man sie auf die Form bringt:

$$z = \sqrt[n]{a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n};$$

derselbe ist aber nur einer unter vielen, welcher freilich durch den Umstand, dass er n-deutig ist und daher (falls er convergirt) sämtliche Wurzeln der Gleichung geben kann, einen Vorzug vor andern zu haben scheint.

Um zu zeigen, dass auch andere Formeln zur Grenze führen können, möge das Beispiel

$$z^2 - 2z - 35 = 0$$

betrachtet werden. Hieraus folgt unter Andern:

$$z = 2 + \frac{35}{z}.$$

Die Benutzung dieser Formel liefert für den willkürlichen Anfangswert $z_0 = \infty$:

$z_0 = \infty$, $z_2 = 19{,}5$, $z_4 = 11{,}4$, $z_6 = 7{,}8$, $z_{10} = 7{,}4$, $z_{12} = 7{,}2$, $z_{14} = 7{,}1$

$z_1 = 2$, $z_3 = 3{,}7$, $z_5 = 5$, $z_9 = 6{,}5$, $z_{11} = 6{,}7$, $z_{13} = 6{,}9$, $z_{15} = 6{,}93$

Also nähert sich diese Folge von Werten der Wurzel $z = 7$.

Benutzt man dagegen die Formel $z = \frac{z^2 - 35}{2}$ beispielsweise mit $z_0 = 7{,}1$, so divergirt der Algorithmus.

Die Frage, wann derartige Algorithmen convergiren und wann sie divergiren involvirt meines Erachtens ein höchst interesstantes Problem [falls dasselbe noch nicht gelöst sein sollte].

Königsberg, Sept. 1884. Th. Sanio.

XVI.

Die Cono-Cunei.

Von

Carl Pabst.

Fortsetzung von Nr. XIV.

IV. Abschnitt.

Der elliptische und die hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei.

§ 21.

Bevor wir in der Betrachtung der geraden Cono-Cunei fortfahren und zum geraden parabolischen Cono-Cuneus übergehen, wollen wir uns zu den elliptischen und den hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei wenden.

Was zunächst den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus betrifft, so nehmen wir hierbei als Gleichungen der Leitellipse:

$$(75) \qquad \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

die XZ-Ebene demnach als Directorebene und als singuläre Kante die Y-Axe. Die erzeugenden Geraden müssen mithin den Gleichungen genügen:

$$x = u.z; \quad y = v,$$

wodurch man als Gleichung des in Rede stehenden Cono-Cuneus erhält:

Digitized by Google

$$\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{76}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die vorgelegte Fläche ebenso wie der gerade elliptische Cono-Cuneus vom vierten Grade ist. Ferner stimmen die beiden elliptischen Cono-Cunei darin überein, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene aus ihnen eine Ellipse ausschneidet, deren eine Axe für alle ausgeschnittenen Ellipsen constant ist, und deren andere Axe proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante wächst. Ein Kreis wird aus dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) für $z=\frac{bc}{a}$ ausgeschnitten.

Diejenigen Ellipsen des vorgelegten Cono-Cuneus (76), deren Entfernung von der singulären Kante absolute kleiner als $\frac{bc}{a}$ ist, haben ihre grossen Axen $=2b$ in einer Ebene, welche durch die singuläre Kante geht und mit der Ellipsenebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{c}{a}$ ist, ihre kleinen Axen $=2\frac{a}{c}z$ in der XZ-Ebene; diejenigen dagegen, deren Abstand von der singulären Kante absolute grösser als $\frac{bc}{a}$ ist, haben ihre grossen Axen $=2\frac{a}{c}z$ in der XZ-Ebene, und ihre kleinen in der eben beschriebenen, durch die singuläre Kante gehenden Ebene.

Daraus geht hervor, dass der gerade elliptische Cono-Cuneus und der elliptische Scheitel-Cono-Cuneus sich darin unterscheiden, dass bei jenem die Mittelpunkte der ausgeschnittenen Ellipsen auf einer Geraden liegen, die auf der Ellipsenebene senkrecht steht, während bei diesem der geometrische Ort der Mittelpunkte der Ellipsen eine Gerade ist, welche mit der Ellipsenebene einen schiefen Winkel bildet. Bei beiden Cono-Cuneis gehen diese Geraden durch die singuläre Kante und stehen auf derselben senkrecht.

Ferner ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve der Ebene $x=k$ mit der vorgelegten Fläche auf die YZ-Ebene:

$$y^2=\left(\frac{bc}{ac}\right)^2 k\left(2\frac{a}{c}z-k\right) \tag{77}$$

Ist $k > 0$, so giebt es demnach nur reelle Werte von y, wenn $z > 0$ ist, und umgekehrt ist $k < 0$, so giebt es nur reelle Werte von y, wenn $z < 0$ ist. D. h. die Durchschnittscurve liegt entweder auf der positiven oder auf der negativen Seite der z-Axe, nicht aber auf beiden zugleich. Sie schneidet die z-Axe im Punkte $y = 0$, $z = \frac{ck}{2a}$. Ist $z < \frac{ck}{2a}$, wenn $k > 0$ ist, so giebt es keine reellen Werte für y, Die Curve liegt symmetrisch zur z-Axe und erstreckt sich von $z = \frac{ck}{2a}$ bis $z = \infty$. Sie ist in allen ihren Punkten convex nach der Y-Axe hin; in ihrem Durchschnittspunkte mit der z-Axe ist ihre Tangente der Y-Axe parallel.

Daraus geht hervor, dass der elliptische Scheitel-Cono-Cuneus (76) nur in 4 Octanten liegt, während der gerade elliptische Cono-Cuneus (17) sich in allen 8 Octanten erstreckt.

Die auf der singulären Kante senkrecht stehende Ebene $y = h$ schneidet aus dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) die beiden Erzeugenden aus, deren Projectionen auf die XZ-Ebene der Gleichung genügen:

$$x = \frac{a(b \pm \sqrt{b^2 - h^2})}{bc} z \tag{78}$$

§ 22.

Wir haben im vorigen § gesehen, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene aus dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) eine Ellipse ausschneidet. Betrachten wir die beiden Ellipsen in den Entfernungen h_1 und h_2 von der singulären Kante, so ergiebt sich, wenn $h_1 > \frac{bc}{a}$ ist, für das Axenverhältniss der zu h_1 zugehörigen Ellipse $\frac{ah_1}{bc}$, und wenn $h_2 < \frac{bc}{a}$ ist, für das Axenverhältniss der zu h_2 zugehörigen Ellipse: $\frac{bc}{ah_2}$. Sollen diese beiden Verhältnisse einander gleich sein, so erhält man demnach die Relation:

$$h_1 . h_2 = \left(\frac{bc}{a}\right)^2$$

Nun war $\frac{bc}{a}$ die Entfernung des Kreisschnittes von der singulären Kante des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76). Mithin resultirt der Satz: Diejenigen beiden Ellipsen des elliptischen Scheitel-

Digitized by Google

Cono-Cuneus, welche so auf dieser Fläche liegen, dass das Product ihrer Abstände von der singulären Kante gleich dem Quadrat der Entfernung des Kreisschnittes von derselben Kante ist, haben dasselbe Axenverhältniss.

Es ist dies derselbe Satz, den wir beim geraden elliptischen Cono-Cuneus in § 10 nachgewiesen haben. Hieraus ergeben sich auch dieselben Beziehungen in Bezug auf die Entfernungen der beiden Ellipsen von dem Kreisschnitte wie dort.

Betrachtet man ferner die Brennpunkte der ausgeschnittenen Ellipsen, so geht aus dem vorigen § hervor, dass die Brennpunkte derjenigen Ellipsen, deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder kleiner als $\frac{bc}{a}$ ist, in einer durch die singuläre Kante gehenden Ebene liegen, welche mit der Z-Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{a}{c}$ ist. Der Abstand eines solchen Brennpunktes von der XZ-Ebene ist $\sqrt{b^2 - \left(\frac{az}{c}\right)^2}$.

Für den geometrischen Ort dieser Brennpunkte ergiebt sich demnach die Ellipse:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{a^2 z^2}{b^2 c^2} = 1 \tag{79}$$

Vergleichen wir hiermit das Resultat (21) in § 10., so folgt der Satz: Sind der gerade elliptische Cono-Cuneus und der elliptische Scheitel-Cono-Cuneus, deren singuläre Kanten in einer Ebene liegen und auf einander senkrecht stehen, so beschaffen, dass eine und dieselbe Ebene aus jedem einen Kreis mit dem Radius a ausschneidet, so ist der geometrische Ort der Brennpunkte der Ellipsen des geraden Cono-Cuneus, deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder kleiner als der des Kreises derselben Fläche ist, gleich dem geometrischen Ort der Brennpunkte der entsprechenden Ellipsen des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus.

Auf analoge Weise erhält man für den geometrischen Ort der Brennpunkte derjenigen Ellipsen des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76), deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich oder grösser als $\frac{bc}{a}$ ist:

$$x^2 - 2\frac{axz}{c} + b^2 = 0 \tag{80}$$

d. h. die in Rede stehenden Brennpunkte liegen in der XZ-Ebene

Digitized by Google

auf einer Hyperbel, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang, deren reelle Axe $= 2b\sqrt{\frac{2c}{\sqrt{4a^2+c^2}-c}}$ und deren imaginäre Axe $= 2b\sqrt{\frac{2c}{\sqrt{4a^2+c^2}+c}}$ ist.

§ 23.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Tangentialebene im Punkte xyz des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) über, so erhalten wir als deren Gleichung, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$\left(x-\frac{az}{c}\right)(\xi-x)+\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{az}{c}\right)-\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right\}(\zeta-z)=0$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (76):

$$\left(x-\frac{az}{c}\right)\xi+\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{az}{c}\right)-\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right\}\zeta=0 \tag{81}$$

Für $x=0$ erhält man hieraus: $\xi=0$, d. h. der vorgelegte Cono-Cuneus berührt die YZ-Ebene. Ferner ergiebt sich für $z=0$:

$$\xi=\frac{a(b\pm\sqrt{b^2-y^2})}{bc}\zeta$$

d. h. In den Punkten der singulären Kante giebt es je zwei Tangentialebenen an den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus, welche sich in der singulären Kante schneiden. Diese Tangentialebenen schneiden im Allgemeinen, ebenso wie beim geraden elliptischen Cono-Cuneus, je zwei erzeugende Geraden aus der Fläche aus.

Diejenigen Tangentialebenen, welche die vorgelegte Fläche längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden berühren, haben ihre Berührungspunkte auf den Geraden, welche den Coordinaten genügen: einerseits $y=\pm b$, andererseits $x=0$ und $x=2\frac{a}{c}z$. Es giebt demnach, ebenso wie beim geraden elliptischen Cono-Cuneus, auch hier 4 Erzeugende, in welchen die Tangentialebenen den elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus längs der ganzen Erzeugenden berühren. Die ersteren dieser Tangentialebenen haben,

Digitized by Google

wie sich nach kurzer Ueberlegung zeigt, die Eigenschaft, dass sie aus dem vorgelegten Cono-Cuneus nur die betreffenden Erzeugenden schneiden, während die Durchschnittscurve der anderen mit der Fläche (76) aus der Erzeugenden und der singulären Kante besteht.

Schliesslich erhält man für das Volumen V zwischen den Ebenen $y = 0$, $y = y_0$, $z = z_0$ und dem zugehörigen Teil des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76):

$$V = \int_0^{y_0} \int_0^{z_0} (x_1 - x_2)\, dy\, dz$$

Aus der Gleichung (76) ergiebt sich:

$$x_{1,2} = \frac{az}{c} \pm \frac{az}{bc} \sqrt{b^2 - y^2}$$

folglich:

$$x_1 - x_2 = 2 \frac{az}{bc} \sqrt{b^2 - y^2}$$

Demnach resultirt:

$$V = 2 \frac{a}{bc} \int_0^{y_0} dy \sqrt{b^2 - y^2} \int_0^{z_0} z\, dz$$

$$(82) \qquad V = \frac{az_0}{bc} \left\{ \tfrac{1}{2} y_0 \sqrt{b^2 - y_0^2} + \tfrac{1}{2} b^2 \arcsin\left(\frac{y_0}{b}\right) \right\}$$

Von diesen Volumen gelten dieselben Sätze wie von demjenigen des geraden elliptischen Cono-Cuneus.

§ 24.

Um jetzt die Gleichung des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus abzuleiten, nehmen wir als Gleichungen der Leithyperbel:

$$(83) \qquad \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

Nach der Definition des § 3. muss dann die Y-Axe singuläre Kante, die XZ-Ebene Directorebene werden, so dass man als Gleichung des betreffenden Cono-Cuneus erhält:

$$(84) \qquad \frac{\left(x - \frac{a}{c} z\right)^2}{\left(\frac{a}{c} z\right)^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Digitized by Google

Aus dieser Gleichung geht zunächst hervor, dass die Fläche vierten Grades nur symmetrisch zur *XZ*-Ebene liegt. Ausserdem ist ersichtlich, dass x, y und z alle beliebigen Werte annehmen können.

Jede zur *XY*-Ebene parallele Ebene schneidet ferner aus dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) im Allgemeinen eine Hyperbel mit den Halbaxen $\frac{a}{c}z$ und b aus. Die reellen Axen dieser Hyperbeln liegen in der *XZ*-Ebene und wachsen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante; die imaginären Axen dagegen sind für alle ausgeschnittenen Hyperbeln $= 2b$ und liegen in einer durch die singuläre Kante gehenden Ebene, welche mit der *Z*-Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{a}{c}$ ist.

Daraus folgt, dass die Mittelpunkte der Hyperbeln des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) in der *XZ*-Ebene liegen und zwar auf einer Geraden, welche durch den Coordinatenanfang geht und mit der Hyperbelebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{c}{a}$ ist.

Während also bei den geraden hyperbolischen Cono-Cuneis der geometrische Ort der Mittelpunkte ihrer Hyperbeln eine Gerade ist, welche durch die singuläre Kante geht und auf der Hyperbelebene senkrecht steht, schneidet die Gerade, auf welcher die Mittelpunkte der Hyperbeln des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus liegen, zwar die singuläre Kante dieser Fläche rechtwinklig, bildet aber mit der Hyperbelebene einen schiefen Winkel.

Ferner folgt aus diesen Erörterungen, dass die Scheitel der aus der vorgelegten Fläche ausgeschnittenen Hyperbeln sich von $z = \infty$ bis $z = 0$ einander nähern, bis sie für $z = 0$ zusammenfallen. Diese Eigenschaft hat der vorgelegte Cono-Cuneus mit dem geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus gemein. Während aber bei diesem die Scheitel auf zwei Geraden liegen, welche durch die singuläre Kante gehen und mit der Hyperbelebene gleiche, schiefe Winkel bilden, liegen bei dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus die Scheitel auf zwei Geraden, welche sich zwar in der singulären Kante schneiden und auf derselben senkrecht stehen, von denen aber die eine einen rechten, die andere einen schiefen Winkel mit der Hyperbelebene bildet.

Aus der Gleichung (84) ergiebt sich ausserdem, dass die zur *XY*-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante

Digitized by Google

absolute gleich $\frac{bc}{a}$ ist, eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter b aus dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) ausschneidet.

Ziehen wir nun die Brennpunkte der ausgeschnittenen Hyperbeln in Betracht, so resultirt aus dem Gesagten, dass sie sämmtlich in der XZ-Ebene liegen. Die Entfernung eines solchen Brennpunktes von der Z-Axe ist: $\frac{a}{c}z \pm \sqrt{\left(\frac{a}{c}z\right)^2 + b^2}$. Für den geometrischen Ort derselben erhält man demnach:

$$x^2 - 2\frac{a}{c}xz - b^2 = 0 \tag{85}$$

d. h. in Worten: Der geometriche Ort der Brennpunkte aller Hyperbeln, welche durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) ausgeschnitten werden, ist eine Hyperbel in der XZ-Ebene, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist.

Was schliesslich die Asymptoten einer solchen ausgeschnittenen Hyperbel betrifft, so genügen dieselben der Gleichung:

$$y = \pm \frac{bc}{az}\left(x - \frac{a}{c}z\right)$$

Sie liegen mithin auf den beiden hyperbolischen Paraboloiden:

$$\begin{cases} ayz - b(cx - az) = 0 \\ ayz + b(cx - az) = 0 \end{cases} \tag{86}$$

§. 25.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Tangentialebene im Punkte xyz des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84). Als Gleichung derselben resultirt:

$$\left(x - \frac{a}{c}z\right)(\xi - x) - \left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta - y) - \left\{\frac{a}{c}\left(x - \frac{a}{c}z\right) + \frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2 + b^2)\right\}(\zeta - z) = 0$$

oder:

$$(87)\quad \left(x-\frac{a}{c}z\right)\xi-\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2+c^2)\right\}\zeta=0$$

Für $z=0$ ergiebt sich hieraus mit Berücksichtigung der Gleichung (84):

$$\xi=\frac{a(b\pm\sqrt{y^2+b^2})}{bc}\zeta$$

d. h. In jedem Punkte der singulären Kante giebt es je zwei Tangentialebenen an die vorgelegte Fläche, welche durch die singuläre Kante gehen. Es gilt demnach auch von dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus der Satz, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene im Allgemeinen eine Tangentialebene ist.

Diejenigen Punkte, in denen die Tangentialebene den einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden berührt, gehören zu $y=0$, d. h. sie liegen auf den Durchschnittslinien der Fläche mit der XZ-Ebene. Dafür ergiebt sich nun:

$$\xi=0$$
$$\xi=2\frac{a}{c}z$$

Es folgt daraus, dass die YZ-Ebene hier ebenso wie beim elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) eine Tangentialebene ist.

Schneidet man schliesslich den einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) durch die Ebenen $y=y_0$, $z=z_0$, so ergiebt sich für das Volumen zwischen den Ebenen $y=0$, $y=y_0$, $z=z_0$ und dem zugehörigen Teil der Fläche einerseits:

$$V_1=\int_0^{y_0}\int_0^{z_0} x_1\,dy\,dz$$

andererseits:

$$V_2=\int_0^{y_0}\int_0^{z_0} x_2\,dy\,dz,$$

wobei, wie aus der Gleichung (84) folgt:

$$x_1=\frac{az}{bc}(\sqrt{y^2+b^2}+b)$$
$$x_2=\frac{az}{bc}(\sqrt{y^2+b^2}-b)$$

Mithin erhält man:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2a}{bc}\int_0^{y_0} dy\,\sqrt{y^2+b^2}\int_0^{z_0} z\,dz$$

$$(88)\qquad V = \frac{az_0^{\,2}}{bc}\left\{\tfrac{1}{2}y_0\sqrt{y_0^{\,2}+b^2} + \tfrac{1}{2}b^2\lg\left(\frac{y_0+\sqrt{y_0^{\,2}+b^2}}{b}\right)\right\}.$$

§ 26.

Zur Untersuchung des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus nehmen wir an, die Leithyperbel werde durch die Gleichungen dargestellt:

$$(89)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{(y-b)^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

Alsdann muss gemäss den Erörterungen des § 3. die YZ-Ebene Directorebene und die X-Axe singuläre Kante werden, so dass man als Gleichung des betreffenden Cono-Cuneus erhält:

$$(90)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(y-\frac{b}{c}z\right)^2}{\left(\frac{b}{c}z\right)^2} = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der geteilte hyperbolische Scheitel-Cono-Cuneus (90) vom vierten Grade ist und symmetrisch zur YZ-Ebene liegt. Für val. abs. $x < a$ giebt es keine reellen Werte für y und z. Die vorgelegte Fläche besteht demnach aus zwei, auf beiden Seiten der YZ-Ebene liegenden, von einander getrennten Teilen, woher die Bezeichnung „geteilt" entnommen ist.

Ferner geht aus der Gleichung (90) hervor, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene die vorgelegte Fläche in einer Hyperbel schneidet, deren reelle Axe $= 2a$, deren imaginäre Axe $= 2\frac{b}{c}z$ ist. Eine gleichseitige Hyperbel wird demnach aus dem geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) durch eine Ebene parallel der XY-Ebene ausgeschnitten, deren Abstand von der singulären Kante absolute gleich $\frac{ac}{b}$ ist.

Die imaginären Axen der ausgeschnittenen Hyperbeln liegen in der YZ-Ebene und wachsen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante; die reellen dagegen sind

Digitized by

für alle ausgeschnittenen Hyperbeln gleich $2a$ und liegen in einer Ebene, welche durch die singuläre Kante geht, und welche mit der Hyperbelebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{b}{c}$ ist.

Auch hierbei ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der ausgeschnittenen Hyperbeln, wie sich aus dem Gesagten ergibt, eine gerade Linie, welche durch die singuläre Kante geht, auf derselben senkrecht steht, mit der Hyperbelebene aber einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{c}{b}$ ist. Es ist dies eine analoge Beziehung, wie wir sie bei dem einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus nachgewiesen haben. Da dieselbe Relation auch von dem elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus gilt, so bezeichnet dieselbe ein durchgreifendes Unterscheidungsmerkmal zwischen den geraden und den Scheitel-Cono-Cuneis, vorausgesetzt, dass der Leitkegelschnitt einen Mittelpunkt hat.

Weil die reellen Axen der aus dem geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) ausgeschnittenen Hyperbeln in einer durch die singuläre Kante gehenden Ebene liegen, welche mit der Z-Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{b}{c}$ ist, so liegen auch die Brennpunkte der Hyperbeln in dieser Ebene. Für die Entfernung eines solchen Brennpunkts von der YZ-Ebene erhält man aus der Gleichung (90): $\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{c}z\right)^2}$. Die Brennpunkte liegen demnach in der beschriebenen Ebene auf der Curve:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2 z^2}{a^2 c^2} = 1 \tag{91}$$

d. h. Der geometrische Ort der Brennpunkte der durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) ausgeschnittenen Hyperbeln ist eine Hyperbel mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren reelle Axe $= 2a$ und deren imaginäre Axe $= 2\frac{ac}{b}$ ist.

Aus der Vergleichung von (90) und (91) folgt, wenn man $\frac{b}{c}z = \frac{ac}{b}$ setzt:

$$z = \frac{ac^2}{b^2} \tag{92}$$

Bezeichnen wir $\frac{ac}{b}$ mit c', wobei c', wie aus dem Obigen hervorgeht, die Entfernung der gleichseitigen Hyperbel des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) von seiner singulären Kante bedeutet, so geht die Gleichung (92) über in:

$$z = \frac{c'^2}{a}$$

Daraus fliesst der Satz: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu dem halben Parameter und dem Abstande der gleichseitigen Hyperbel des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus von dessen singulärer Kante ist, schneidet aus dieser Fläche eine Hyperbel aus, welche gleich ist dem geometrischen Orte der Brennpunkte aller durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dieser Fläche ausgeschnittenen Hyperbeln.

Diese Eigenschaft hat der vorgelegte Cono-Cuneus mit dem geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus gemeinsam.

Die Asymptoten einer Hyperbel des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) genügen der Gleichung:

$$y - \frac{b}{c}z = \pm\frac{bz}{ac}x$$

Die Asymptoten aller Hyperbeln der vorgelegten Fläche liegen demnach auf den beiden hyperbolischen Paraboloiden:

$$(93) \qquad \begin{cases} bxz - a(cy - bz) = 0 \\ bxz + a(cy - bz) = 0 \end{cases}$$

Dreht man den vorgelegten Cono-Cuneus um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so dass die positive X-Axe in die negative Y-Axe fällt, dann hat man nur y mit x zu vertauschen; alles Uebrige bleibt ungeändert. Führen wir diese Vertauschung in den Gleichungen (93) aus, so gehen dieselben über in:

$$byz - a(cx - bz) = 0$$
$$byz + a(cx - bz) = 0$$

Beachten wir hierbei die Gleichungen (86) im § 24., so resultirt der Satz: Haben der einfache und der geteilte hyperbolische Scheitel-Cono-Cuneus dieselbe singuläre Kante und dieselbe Directorebene und sind sie so beschaffen, dass eine und dieselbe Ebene aus den beiden Flächen je eine gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a

Digitized by

ausschneidet, so liegen die Asymptoten der aus beiden Flächen ausgeschnittenen Hyperbeln auf denselben beiden hyperbolischen Paraboloiden.

Es ist dies ein analoger Satz, wie wir ihn von den beiden geraden hyperbolischen Cono-Cuneis im § 19. nachgewiesen haben.

Zugleich ergiebt sich hieraus, dass die geraden hyperbolischen Cono-Cunei und die hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei das mit einander gemeinsam haben, dass die Asymptoten der aus ihnen ausgeschnittenen Hyperbeln auf je zwei hyperbolischen Paraboloiden liegen.

§ 27.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus erhält man:

$$\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x(\xi - x) - \left(y - \frac{b}{c}z\right)(\eta - y) + \left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2 - a^2) + \frac{b}{c}\left(y - \frac{b}{c}z\right)\right](\zeta - z) = 0$$

oder:

$$\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x(\xi - x) - \left(y - \frac{b}{c}z\right)\eta + \left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2 - a^2) + \frac{b}{c}\left(y - \frac{b}{c}z\right)\right]\zeta = 0 \tag{94}$$

Für $z = 0$ geht diese Gleichung über, wenn man für $y - \frac{b}{c}z$ seinen Wert aus (90) setzt, in

$$\eta = \frac{c(a \pm \sqrt{x^2 - a^2})}{ac}\zeta$$

d. h. in den Punkten der singulären Kante giebt es je zwei Tangentialebenen an die vorgelegte Fläche.

Diese Eigenschaft haben mithin die geraden elliptischen und hyperbolischen Cono-Cunei mit den elliptischen und den hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneis gemeinsam.

Ferner ergiebt sich, dass die beiden Ebenen $\xi = \pm a$ den geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) längs einer ganzen Erzeugenden berühren.

Aus der Gleichung (90) folgt:

$$y_{1,2} = \frac{bz}{ac}\left(a \pm \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

Demnach erhält man für das Volumen V zwischen den Ebenen $x = x_0$, $z = z_0$ und dem zugehörigen Teil des vorgelegten Cono-Cuneus:

$$V = \frac{2b}{ac}\int_0^{x_0} dx\,\sqrt{x^2-a^2}\int_0^{z_0} z\,dz$$

$$(95)\qquad V = \frac{bz_0^2}{ac}\left\{\tfrac{1}{2}x_0\sqrt{x_0^2-a^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right)\right\}$$

Nun ist aber, wie sich aus (90) ergiebt;

$$\sqrt{x_0^2-a^2} = \frac{ac}{bz_0}\left(x_0 - \frac{b}{c}z_0\right).$$

Demnach geht die Gleichung (95) über in:

$$(96)\qquad V = \frac{bz_0^2}{c}\left\{\tfrac{1}{2}\cdot\frac{cx_0}{bz_0}\left(y_0 - \frac{b}{c}z_0\right) - \tfrac{1}{2}a\log\left(\frac{bx_0z_0 + ac\left(y_0 - \frac{b}{c}z_0\right)}{abz_0}\right)\right\}$$

Ferner folgt aus der Gleichung (88) des § 25., wenn man darin für $\sqrt{y_0^2+b^2}$ den aus (84) sich ergebenden Wert: $\frac{bc}{az_0}\left(x_0 - \frac{a}{c}z_0\right)$ setzt:

$$(97)\qquad V' = \frac{az_0^2}{c}\left\{\tfrac{1}{2}\cdot\frac{cy_0}{az_0}\left(x_0 - \frac{a}{c}z_0\right) + \tfrac{1}{2}b\lg\left(\frac{ay_0z_0 + bc\left(x_0 - \frac{a}{c}z_0\right)}{abz_0}\right)\right\}$$

Vertauscht man in der letzteren Gleichung x mit y und setzt in (96) und (97) $a = b$, so resultirt:

$$V + V' = x_0z_0\left(y_0 - \frac{b}{c}z_0\right)$$

Eine analoge Beziehung hat sich für die beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei im § 20. ergeben.

Digitized by Google

V. Abschnitt.

Die beiden parabolischen Cono-Cunei.

§ 28.

In diesem Abschnitte wollen wir den geraden parabolischen Cono-Cuneus und den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus betrachten. Da diese beiden Flächen von Hochheim ausführlich behandelt worden sind (Grunerts Archiv T. 53. pag. 350—363 und T. 55. pag. 35—48), so wollen wir hier nur die hauptsächlichsten Eigenschaften derselben kurz ableiten. Was zunächst den geraden parabolischen Cono-Cuneus betrifft, so nehmen wir als Gleichungen der Leitparabel:

$$\text{(98)} \qquad \begin{cases} y^2 = 2px \\ z = c \end{cases}$$

Alsdann ist, wie sich aus den Erläuterungen der Einleitung ergiebt, die X-Axe singuläre Kante, die YZ-Ebene Directorebene, so dass man als Gleichung des betreffenden Cono-Cuneus erhält:

$$\text{(99)} \qquad c^2y^2 = 2px z^2$$

Hieraus geht zunächst hervor, dass dieser Cono-Cuneus im Gegensatz zu den bisher behandelten vom dritten Grade ist. Ferner folgt aus der Gleichung (99), dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene die vorgelegte Fläche in einer Parabel schneidet, deren Parameter gleich $2\frac{pz^2}{c^2}$ ist, d. h. die Parameter der ausgeschnittenen Parabeln wachsen proportional dem Quadrate des Abstandes der schneidenden Ebene von der singulären Kante.

Ziehen wir die Brennpunkte der ausgeschnittenen Parabeln in Betracht, so ergiebt sich zunächst, dass dieselben in der XZ-Ebene liegen. Die Entfernung eines solchen Brennpunktes von der Z-Axe ist $\frac{pz^2}{2c^2}$. Für den geometrischen Ort aller dieser Brennpunkte erhält man demnach:

$$\text{(100)} \qquad z^2 = 2\frac{c^2}{p}x$$

d. h. in Worten: Der geometrische Ort der Brennpunkte aller Parabeln, welche durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) ausgeschnitten werden, ist eine Parabel in der XZ-Ebene, deren Scheitel der Coordinatenanfang ist,

und deren Axe in die singuläre Kante des Cono-Cuneus fällt. Der halbe Parameter dieser Parabel ist die vierte Proportionale zu p und c.

Aus der Vergleichung von (99) und (100) folgt, wenn man $\frac{c^2}{p} = \frac{p z^2}{c^2}$ setzt:

$$z = \frac{c^2}{p}$$

Daraus fliesst der Satz: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu p und c ist, schneidet aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) eine Parabel aus, welche gleich ist der Parabel, auf welcher die Brennpunkte aller durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus diesem Cono-Cuneus ausgeschnittenen Parabeln liegen.

Beachtet man hierbei, dass $2\frac{c^2}{p}$ der Parameter der betreffenden Parabel ist, so kann man diese Relationen auch so deuten: Diejenige zur XY-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der singulären Kante die vierte Proportionale zu p und c ist, schneidet aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) eine Parabel aus, deren Parameter gleich dem doppelten Abstande der Parabel von der singulären Kante ist.

Als Projection der Durchschnittscurve der Ebene $x = h$ mit der vorgelegten Fläche auf die YZ-Ebene ergiebt sich:

$$z = \pm \frac{c}{\sqrt{2ph}} y. \tag{101}$$

Daraus folgt, dass jede der Directorebene parallele Ebene im Allgemeinen aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus zwei Erzeugende ausschneidet, welche durch die singuläre Kante gehen und mit der XZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Für $h = 0$ fallen diese beiden Geraden in eine eine einzige zusammen.

Erwähnt sei hier noch, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene den vorgelegten Cono-Cuneus in einer Geraden schneidet, denn man erhält für

$$y = az:$$

$$c^2 a^2 = 2px \tag{102}$$

Hierin unterscheidet sich der gerade parabolische Cono-Cuneus von den bisher betrachteten Flächen und, wie sich später zeigen

Digitized by Google

wird, auch von dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus, denn aus diesen schneidet jede durch die singuläre Kante gehende Ebene im Allgemeinen zwei gerade Linien.

Um schliesslich die Durchschnittscurve des vorgelegten Cono-Cuneus mit einer durch die Z-Axe gehenden Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel φ bildet, zu untersuchen, wenden wir die Coordinatentransformation an:

$$\text{(103)} \qquad \begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \\ z = z' \end{cases}$$

Setzen wir dann $y' = 0$, so ergiebt sich als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$\text{(104)} \qquad z'^2 = \frac{c^2 \sin^2\varphi}{2p \cos\varphi} . x'$$

Jede durch die Z-Axe gehende Ebene schneidet demnach den geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) in einer Parabel, deren Scheitel der Coordinatenanfang ist, und deren Axe in der XY-Ebene liegt. Die Brennweite einer solchen Parabel ist: $\frac{c^2 \sin^2\varphi}{8p \cos\varphi}$. Mithin erhält man für den geometrischen Ort der Brennpunkte dieser Parabeln in Polarcoordinaten:

$$r = \frac{c^2 \sin^2\varphi}{8p \cos\varphi}$$

oder in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten:

$$y^2 = \frac{8px^3}{c^2 - 8px}$$

Diese Gleichung stellt eine Cissoide dar, welche die X-Axe im Coordinatenanfang berührt und welche sich auf der positiven und auf der negativen Seite der Y-Axe der Geraden $x = \frac{c^2}{8p}$ asymptotisch nähert.

§ 29.

Als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) erhält man, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$pz^2(\xi - x) - c^2 y(\eta - y) + 2pxz(\zeta - z) = 0$$

oder:

$$\text{(105)} \qquad pz^2(\xi - x) - c^2 y\eta + 2pxz\zeta = 0$$

Daraus folgt für $x = 0 : \xi = 0$; d. h. die Directorebene berührt den geraden parabolischen Cono-Cuneus (99).

Ferner erhält man für $z = 0$:

$$\eta = \pm \frac{\sqrt{2px}}{c} \zeta$$

d. h. In den Punkten der singulären Kante giebt es je zwei Tangentialebenen an den vorgelegten Cono-Cuneus, welche sich in der singulären Kante schneiden und mit der XZ-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Es sind dies die in (102) des vorigen § betrachteten Ebenen. Diese Tangentialebenen schneiden mithin aus dem geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) die singuläre Kante und eine Erzeugende desselben.

Im Allgemeinen besteht die Durchschnittscurve der Tangentialebene mit dem vorgelegten Cono-Cuneus aus der durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden desselben und aus einer Parabel, deren Projection auf die XZ-Ebene als Parameter die vierte Proportionale zu $4x$ und z hat, wenn x, y, z die Coordinaten des Berührungspunktes sind.

Schneiden wir nun den geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) durch die Ebenen $x = x_0$, $z = z_0$, so erhält man für das Volumen V zwischen diesen Ebenen, der XZ-Ebene und dem zugehörigen Teile desselben

$$V = \int_0^{x_0} \int_0^{z_0} y \, dx \, dz = \frac{\sqrt{2p}}{c} \int_0^{x_0} \sqrt{x} \, . \, dx \int_0^{z_0} z \, dz$$

$$V = \frac{x_0 z_0^2 \sqrt{2px_0}}{3c} = \tfrac{1}{3} x_0 y_0 z_0 \tag{106}$$

Das Volumen zwischen den Ebenen $x = x_0$, $y = 0$, $z = z_0$ und dem zugehörigen Teile des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) ist demnach gleich dem dritten Teil eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

Nun ist: $\frac{2}{3} x_0 \, . \, y_0 = F$, wenn F den zugehörigen Teil der begrenzenden Parabel bedeutet; also:

$$V = \tfrac{1}{2} F \, . \, z_0, \tag{107}$$

welchen Satz wir schon in der Einleitung bewiesen haben.

Digitized by Google

§ 30.

Wir kommen jetzt zur Betrachtung des letzten in der Einleitung definirten Cono-Cuneus, des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus. Nehmen wir hierbei als Leitparabel dieselbe wie beim geraden parabolischen Cono-Cuneus, nämlich:

$$y^2 = 2px$$
$$z = c$$

als Directorebene demnach die XZ-Ebene, als singuläre Kante die Y-Axe, so erhält man als Gleichung der vorgelegten Fläche:

$$y^2 z = 2cpx \tag{108}$$

Der parabolische Scheitel-Cono-Cuneus ist mithin ebenso wie der gerade parabolische Cono-Cuneus eine Fläche dritten Grades.

Ferner fogt aus der Gleichung (108), dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene den vorgelegten Cono-Cuneus in einer Parabel schneidet, deren Axe in der XZ-Ebene und deren Scheitel auf der Z-Axe liegt. Der Parameter einer solchen Parabel ist gleich $2\frac{cp}{z}$, d. h. er ist umgekehrt proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der singulären Kante. Hierin unterscheidet sich der parabolische Scheitel-Cono-Cuneus von dem geraden parabolischen Cono-Cuneus.

Für den geometrischen Ort der Brennpunkte der aus der vorgelegten Fläche ausgeschnittenen Parabeln erhält man demnach:

$$xz = \frac{pc}{2} \tag{109}$$

d. h. der geometrische Ort der Brennpunkte aller Parabeln, welche durch Ebenen parallel der XY-Ebene aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) ausgeschnitten werden, ist eine gleichseitige Hyperbel in der XZ-Ebene, deren Asymptoten die Axen der x und der z sind, und deren Excentricität die mittlere Proportionale zu $2p$ und c ist.

Ferner wird durch die Ebene $y = h$ aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) eine Curve ausgeschnitten, als deren Projection auf die XZ-Ebene man erhält:

$$z = \frac{2pc}{h^2} x \tag{110}$$

Daraus folgt, dass jede zur Directorebene parallele Ebene aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus eine erzeugende Gerade ausschneidet. Hierin unterscheidet sich dieser Cono-Cuneus von allen bisher betrachteten, aus denen jede der Directorebene parallele Ebene im Allgemeinen zwei Erzeugenden der betreffenden Fläche ausschneidet.

Der vorgelegte Cono-Cuneus unterscheidet sich von dem geraden parabolischen Cono-Cuneus auch dadurch, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene im Allgemeinen zwei erzeugende Geraden desselben ausschneidet. Denn es ergiebt sich als Projection der Durchschnittscurve der Ebene $z = ax$ mit der Fläche (108) auf die YZ-Ebene:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2pc}{a}} \tag{111}$$

Diese Eigenschaft hat der parabolische Scheitel-Cono-Cuneus, wie schon im § 28. angedeutet worden ist, mit den elliptischen und den hyperbolischen Cono-Cuneis gemeinsam.

Ein Hauptunterschied zwischen dem geraden parabolischen Cono-Cuneus und dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus besteht darin, dass durch gewisse Ebenen aus dem letzteren Hyperbeln ausgeschnitten werden, was bei dem ersteren nicht der Fall ist. Zu diesen gehören die durch die Z-Axe gehenden Ebenen. Um die betreffenden Durchschnittscurven näher zu untersuchen, wenden wir die Coordinatentransformation (103) an und setzen $y' = 0$. Alsdann erhält man als Gleichung einer Durchschnittscurve:

$$x'z' = \frac{2pc\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \tag{112}$$

Diese Durchschnittscurve ist demnach eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Axen der x' und der z' sind, und deren Quadrat der Excentricität gleich $\frac{8pc\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ ist.

§ 31.

Gehen wir nun zur Tangentialebene im Punkte xyz des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) über, so erhalten wir als Gleichung derselben:

$$2pc(\xi - x) - 2yz(\eta - y) - y^2(\zeta - z) = 0$$

oder:

$$2pc.\,\xi - 2yz(\eta - y) - y^2\zeta = 0. \tag{113}$$

Digitized by Google

Daraus folgt für $y = 0$: $\xi = 0$; d. h. der parabolische Scheitel-Cono-Cuneus (108) berührt die YZ-Ebene.

Ferner ergiebt sich für $z = 0$ aus der Gleichung (113):

$$\xi = \frac{y^2}{2pc}\zeta$$

Die Tangentialebene in einem Punkte der singulären Kante geht demnach durch diese Kante. Es giebt aber, wie man hieraus ersieht, in einem Punkte der singulären Kante nur eine Tangentialebene an den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus und auch hierdurch unterscheidet sich derselbe von den übrigen betrachteten Cono-Cuneis.

Diese Tangentialebenen sind die unter (111) des vorigen § betrachteten Ebenen. Sie schneiden also aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus die singuläre Kante und zwei erzeugende Geraden desselben aus.

Allgemein erhält man für die Projection der Durchschnittscurve der Tangentialebene mit der vorgelegten Fläche auf die YZ-Ebene, wenn man ξ aus der Gleichung (113) und der Gleichung $\eta^2\zeta = 2pc\xi$ eliminirt:

$$(114) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \eta - y = 0 \\ (\eta + y)\zeta - 2yz = 0 \end{array} \right.$$

Daraus geht hervor, dass die Tangentialebene aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus im Allgemeinen die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende desselben und eine gleichseitige Hyperbel ausschneidet, deren Projection auf die YZ-Ebene die Excentricität $\sqrt{2y.z}$ hat. Auch die Tangentialebenen gehören daher zu den oben erwähnten Ebenen, welche aus dem parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus Hyperbeln ausschneiden.

Zugleich ist ersichtlich, dass die Tangentialebene die Fläche im Allgemeinen nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben berührt. Eine Ausnahme findet nur für $y = 0$ statt; d. h. die YZ-Ebene berührt den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) längs der ganzen in ihr liegenden Erzeugenden desselben.

Schliesslich erhalten wir für das Volumen V zwischen den Ebenen $y = y_0$, $z = z_0$, $x = 0$ und dem zugehörigen Teile der vorgelegten Fläche:

$$V = \int_0^{y_0} \int_0^{z_0} x\,dy\,dz = \frac{1}{2pc} \int_0^{y_0} y^2\,dy \int_0^{z_0} z\,dz$$

$$V = \frac{y_0^3 \cdot z_0^2}{12\,pc} = \tfrac{1}{6}\,x_0\,y_0\,z_0 \tag{115}$$

d. h. Das Volumen mit der vorgeschriebenen Begrenzung ist gleich dem sechsten Teile eines rechtwinkligen Parallepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

Wir haben beim geraden parabolischen Cono-Cuneus erhalten:

$$V' = \tfrac{1}{3}\,x_0\,y_0\,z_0$$

Daraus folgt:

$$V + V' = \tfrac{1}{2}\,x_0\,y_0\,z_0$$

d. h. in Worten: Die Summe der Volumina, welche von den beiden parabolischen Cono-Cuneis begrenzt werden, und zu den Coordinaten x_0, y_0, z_0 gehören, ist gleich der Hälfte des rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

VI. Abschnitt.

Die Fusspunktenflächen der betrachteten Cono-Cunei für den Coordinatenanfang als Pol.

§ 32.

Wenn man von einem gegebenen Punkte die Senkrechten auf die Tangentialebenen einer gegebenen Fläche fällt, so bilden die Fusspunkte dieser Senkrechten eine neue Fläche, welche die Fusspunktenfläche der gegebenen Fläche für den gegebenen Punkt als Pol genannt wird. Wir wollen nun in diesem Abschnitte die Fusspunktenflächen der behandelten Cono-Cunei für den Coordinatenanfang als Pol einer kurzen Betrachtung unterwerfen.

Was zunächst den geraden elliptischen Cono-Cuneus (17)

$$c^2 y^2 = z^2(a^2 - x^2)$$

betrifft, so hatten wir als Gleichung der Tangentialebene desselben erhalten [§ 12. Gl. 27]:

$$x z^2(\xi - x) + cy \cdot c\eta - z(a^2 - x^2)\zeta = 0$$

Demnach ergiebt sich für die Gleichungen der Geraden, welche durch den Coordinatenanfang geht und auf dieser Tangentialebene senkrecht steht, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$(116)\qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{xz^2}{z(a^2-x^2)}\,\zeta \\ \eta = -\dfrac{c^2y}{z(a^2-x^2)}\,\zeta \end{cases}$$

Die Coordinaten der Fusspunkte dieser Senkrechten müssen den Gleichungen (116) und der Gleichung der betreffenden Tangentialebene genügen. Demnach folgt für dieselben:

$$\xi = \frac{x^2z^4}{x^2z^4+c^4y^2+z^2(a^2-x^2)^2}$$

$$\eta = \frac{c^2x^2yz^2}{x^2z^4+c^4y^2+z^2(a^2-x^2)^2}$$

$$\zeta = -\frac{x^2z^2(a^2-x^2)}{x^2z^4+c^4y^2+z^2(a^2-x^2)^2}$$

Durch Elimination von x, y, z aus diesen drei Gleichungen mit Hilfe der Gleichung (17) resultirt die Gleichung der gesuchten Fusspunktenfläche:

$$(117)\qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{\xi^2(a^2\eta^2-c^2\zeta^2)}{\eta^2}$$

Die Fusspunktenfläche des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) für den Coordinatenanfang als Pol ist demnach eine Fläche 6ten Grades.

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den geteilten geraden hyperbolischen Cono-Cuneus (37):

$$c^2y^2 = z^2(x^2-a^2),$$

als dessen Fusspunktenfläche für den Coordinatenanfang als Pol man erhält:

$$118)\qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{\xi^2(a^2\eta^2+c^2\zeta^2)}{\eta^2}$$

Die beiden Gleichungen (117) und (118) gehen für $\zeta = 0$ über in:

$$(119)\qquad \xi^2+\eta^2 = \pm a\xi$$

Daraus folgt der Satz: Die beiden Fusspunktenflächen (117) und (118) und der Cylinder (119) schneiden sich in einer und derselben Curve, und zwar in einer ebenen Curve.

Diese Relation kann man auch so deuten: Sind der gerade elliptische und der gerade geteilte hyperbolische Cono-Cuneus, welche

dieselbe singuläre Kante haben, so beschaffen, dass eine und dieselbe Ebene aus dem elliptischen einen Kreis, aus dem hyperbolischen eine gleichseitige Hyperbel ausschneidet, deren halber Parameter gleich dem Radius des Kreises des elliptischen Cono-Cuneus ist, so schneiden sich die beiden zugehörigen Fusspunktenflächen für den Coordinatenanfang als Pol in einer ebenen Curve, und zwar in zwei Kreisen in der XY-Ebene mit dem Radius $\frac{1}{2}a$, welche sich im Coordinatenanfang berühren und deren Mittelpunkte auf der singulären Kante der beiden zugehörigen Cono-Cunei liegen:

Ferner ist die Gleichung der Tangentialebene des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus:

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1:$$

$$c^2x\xi - yz^2(\eta - y) - z(y^2 + a^2)\zeta = 0$$

Demnach erhält man als Gleichungen der vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällten Senkrechten:

$$\xi = -\frac{c^2x}{z(y^2+a^2)}\zeta$$

$$\eta = \frac{yz^2}{z(y^2+a^2)}\zeta$$

Für die Coordinaten des Fusspunktes dieser Senkrechten resultirt mithin:

$$\xi = -\frac{c^2xy^2z^2}{c^4x^2+y^2z^4+z^2(y^2+a^2)}$$

$$\eta = \frac{y^3z^4}{c^4x^2+y^2z^4+z^2(y^2+a^2)}$$

$$\zeta = \frac{y^2z^3(y^2+a^2)}{c^4x^2+y^2z^4+z^2(y^2+a^2)}$$

Eliminirt man x, y, z aus diesen drei Gleichungen mit Hilfe der Gleichung des zugehörigen Cono-Cuneus, so erhält man als Gleichung der betreffenden Fusspunktenfläche des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus:

$$(120) \qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{\eta^2(c^2\zeta^2 - a^2\xi^2)}{\xi^2}$$

Auch diese Fläche ist wie die beiden vorhergehenden vom 6ten Grade.

Untersuchen wir nun die Durchschnittscurven der drei abgeleiteten Fusspunktenflächen mit Ebenen, welche durch die singuläre Kante des zugehörigen Cono-Cuneus gehen. Zu dem Zwecke setzen wir in den beiden Gleichungen (117) und (118):

$$c\xi = m a \eta,$$

denn diese Gleichung stellt eine Ebene dar, welche durch die X-Axe, also durch die singuläre Kante des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) und des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37) geht. Dadurch gehen die betreffenden beiden Gleichungen über in:

$$\xi^2 + \frac{m^2 a^2 + c^2}{c^2} \eta^2 = \pm a \xi \sqrt{1 - m^2} \tag{121}$$

$$\xi^2 + \frac{m^2 a^2 + c^2}{c^2} \eta^2 = \pm a \xi \sqrt{1 + m^2} \tag{122}$$

Diese beiden Gleichungen stellen im Allgemeinen je zwei Ellipsen dar, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittelpunkte auf der X-Axe liegen. In der Gleichung (121) ist diese Möglichkeit an die Bedingung geknüpft, dass $m^2 < 1$ ist, während der Satz für die andere Gleichung für jeden Wert von m gilt.

Eine analoge Beziehung ergiebt sich für die Fusspunktenfläche (120) des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus. Da dieser Cono-Cuneus die Y-Axe zur singulären Kante hat, so stellt die Gleichung

$$c\xi = m a \xi$$

eine Ebene dar, welche durch diese singuläre Kante geht. Dafür erhält man aus der Gleichung (120):

$$\frac{m^2 a^2 + c^2}{c^2} \xi^2 + \eta^2 = \pm a \eta \sqrt{m^2 - 1} \tag{123}$$

Diese Gleichung stellt, wenn $m^2 > 1$ ist, zwei Ellipsen dar, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittelpunkte auf der Y-Axe liegen.

Aus diesen Erörterungen folgt der Satz:

Jede durch die singuläre Kante eines geraden elliptischen oder hyperbolischen Cono-Cuneus gehende Ebene schneidet im Allgemeinen aus der Fusspunktenfläche des betreffenden Cono-Cuneus für den Coordinatenanfang als Pol zwei unter sich gleiche Ellipsen aus, welche sich im Pol der Fläche berühren.

Digitized by Google

§ 33.

Was ferner die Fusspunktenfläche des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76)

$$\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

für den Coordinatenanfang als Pol betrifft, so hatten wir als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz desselben erhalten [§ 23. Gl. 81]:

$$\left(x-\frac{a}{c}z\right)\xi+\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y(\eta-y)-\left\{\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)-\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right\}\zeta=0$$

Die Gleichungen der vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällten Senkrechten sind demnach:

$$\xi=\frac{x-\frac{a}{c}z}{-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)}\zeta$$

$$\eta=\frac{\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y}{-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)}\zeta$$

Daraus folgen für die Coordinaten des Fusspunktes dieser Senkrechten die Gleichungen:

$$\xi=\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y^2}{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2+\left(\frac{az}{bc}\right)^4 y^2+\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]^2}$$

$$\eta=\frac{\left(\frac{az}{bc}\right)^4 y^3}{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2+\left(\frac{az}{bc}\right)^4 y^2+\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]^2}$$

$$\zeta=\frac{\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]\left(\frac{az}{bc}\right)^2 y^2}{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2+\left(\frac{az}{bc}\right)^4 y^2+\left[-\frac{a}{c}\left(x-\frac{a}{c}z\right)+\frac{a^2z}{b^2c^2}(y^2-b^2)\right]^2}$$

Digitized by Google

Durch Elimination von x, y, z mit Hilfe der Gleichung (76) folgt hieraus die Gleichung der gesuchten Fusspunktenfläche:

$$(124) \qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{b^2\eta^2}{a^2\xi^2}[a^2\xi^2-(c\zeta+a\xi)^2]$$

Zunächst geht hieraus hervor, dass die Fusspunktenfläche ebenso wie die im vorigen § betrachteten vom 6ten Grade ist. Ferner ergiebt sich aus der Gleichung (124) für:

$$c\zeta+a\xi=0:$$

$$\frac{a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2 = \pm b\eta$$

Daraus folgt der Satz: Die durch die singuläre Kante des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) gehende Ebene $c\zeta+a\xi=0$ schneidet aus der zugehörigen Fusspunktenfläche (124) zwei Ellipsen aus, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Projectionen auf die XY-Ebene die Halbaxen $\frac{bc}{2\sqrt{a^2+c^2}}$ und $\frac{b}{2}$ haben.

Auf analoge Weise erhält man für die Fusspunktenfläche des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84):

$$\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

für den Coordinatenanfang als Pol die Gleichung:

$$(125) \qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{b^2\eta^2}{a^2\xi^2}[(c\zeta-a\xi)^2-a^2\xi^2]$$

Ferner war die Tangentialebene des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84):

$$\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x(\xi-x)-\left(y-\frac{b}{c}z\right)\eta+\left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)\right]\zeta=0$$

Daraus folgen die Gleichungen der durch den Coordinatenanfang gehenden, auf dieser Ebene senkrecht stehenden Geraden:

$$\xi = \frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x}{\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)}\zeta$$

Digitized by Google

$$\eta = -\frac{y-\frac{b}{c}z}{\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)}\zeta$$

Mithin genügen die Coordinaten des Fusspunktes dieser Senkrechten den Gleichungen:

$$\xi = \frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^3}{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^2+\left(y-\frac{b}{c}z\right)^2+\left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)\right]^2}$$

$$\eta = \frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x^2\left(y-\frac{b}{c}z\right)}{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^2+\left(y-\frac{b}{c}z\right)^2+\left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)\right]^2}$$

$$\zeta = \frac{\left(\frac{bz}{ac}\right)^2 x^2\left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)\right]}{\left(\frac{bz}{ac}\right)^4 x^2+\left(y-\frac{b}{c}z\right)^2+\left[\frac{b^2z}{a^2c^2}(x^2-a^2)+\frac{b}{c}\left(y-\frac{b}{c}z\right)\right]^2}$$

Hieraus folgt die Gleichung der Fusspunktenfläche des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (90) für den Coordinatenanfang als Pol:

$$(126)\qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{a^2\xi^2}{b^2\eta^2}[(c\zeta+b\eta)^2+b^2\eta^2].$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für $\zeta = 0$:

$$\xi^2+\eta^2 = \pm a\xi\sqrt{2}$$

d. h. in Worten: Die Fusspunktenfläche (126) schneidet die XY-Ebene in zwei Kreisen mit den Radien $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittelpunkte auf der X-Axe liegen.

Dreht man die Fläche (126) um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so dass die positive X-Axe in die negative Y-Axe fällt, dann geht die Gleichung derselben über in:

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \frac{a^2\eta^2}{b^2\xi^2}[(c\zeta+b\xi)^2+b^2\xi^2]$$

Berücksichtigt man hierbei die Gleichung (124) der Fusspunktenfläche des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) und beachtet, dass, wenn man $a = b$ setzt, die beiden Gleichungen für $c\zeta+a\xi = 0$ übergehen in

Digitized by Google

$$\frac{a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2=\pm a\eta,$$

so resultirt der Satz: Sind der elliptische und der geteilte hyperbolische Scheitel-Cono-Cuneus, deren singuläre Kanten auf einander senkrecht stehen und in einer Ebene liegen, so beschaffen, dass die Ebene in der Entfernung c von den singulären Kanten aus dem elliptischen den Kreis mit dem Radius a, aus dem hyperbolischen die gleichseitige Hyperbel mit dem halben Parameter a ausschneidet, so besteht die Durchschnittscurve der Fusspunktenfläche des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus für den Coordinatenanfang als Pol mit der um $\frac{\pi}{2}$ um die Z-Axe gedrehten betreffenden Fusspunktenfläche des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus aus zwei Ellipsen, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Projectionen auf die XY-Ebene die Halbaxen $\frac{ac}{2\sqrt{a^2+c^2}}$ und $\frac{a}{2}$ haben.

Wir wollen nun noch ähnlich wie im vorigen § die Durchschnittscurven der drei abgeleiteten Fusspunktenflächen mit Ebenen, welche durch die singuläre Kante des zugehörigen Cono-Cuneus gehen, untersuchen. Da der elliptische und der einfache hyperbolische Scheitel-Cono-Cuneus die Y-Axe zur singulären Kante haben, so ist

$$c\zeta = m a \xi$$

eine Ebene, welche durch diese singuläre Kante geht. Setzen wir diesen Wert von ζ in die Gleichungen (124) und (125) ein, so gehen dieselben über in:

$$\frac{m^2a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2=\pm b\eta\sqrt{1-(m+1)^2} \tag{127}$$

$$\frac{m^2a^2+c^2}{c^2}\xi^2+\eta^2=\pm b\eta\sqrt{(m-1)^2-1} \tag{128}$$

Diese beiden Gleichungen stellen im Allgemeinen je zwei Ellipsen dar, welche sich im Coordinatenanfang berühren, und deren Mittelpunkte auf der Y-Axe liegen. Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für die Fusspunktenfläche (126) des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus. Dieser Cono-Cuneus hat die X-Axe zur singulären Kante. Folglich stellt die Gleichung

$$c\zeta = m b \eta$$

eine Ebene dar, welche durch diese singuläre Kante geht. Dadurch erhält man aus der Gleichung (126):

Digitized by Google

$$(129) \quad \xi^2 + \frac{m^2b^2 + c^2}{c^2}\eta^2 = \pm a\xi\sqrt{(m+1)^2+1}$$

Zugleich ist hieraus ersichtlich, dass aus der Fusspunktenfläche (126) jede durch die singuläre Kante des zugehörigen geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus gehende Ebene zwei Ellipsen ausschneidet, während bei den beiden vorhergehenden die Ebenen noch gewissen Beschränkungen unterworfen sind.

Diese Resultate können wir in den Satz zusammenfassen: Jede durch die singuläre Kante eines elliptischen oder eines hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus gehende Ebene schneidet im Allgemeinen aus der Fusspunktenfläche des betreffenden Cono-Cuneus für den Coornatenanfang als Pol zwei sich gleiche Ellipsen aus, welche sich im Pol der Fläche berühren.

§ 34.

Um schliesslich die betreffenden Fusspunktenflächen der beiden betrachteten parabolischen Cono-Cunei zu untersuchen, so haben wir im § 29. als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des geraden parabolischen Cono-Cuneus erhalten:

$$pz^2(\xi - x) - c^2y\eta + 2pxz\zeta = 0$$

Demnach sind die Gleichungen der vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällten Senkrechten:

$$\xi = \frac{pz^2}{2pxz}\zeta$$

$$\eta = -\frac{c^2y}{2pxz}\zeta,$$

so dass man für den Fusspunkt dieser Senkrechten erhält:

$$\xi = \frac{p^2xz^4}{p^2z^4 + c^4y^2 + 4p^2x^2z^2}$$

$$\eta = -\frac{c^2pxyz^2}{p^2z^4 + c^4y^2 + 4p^2x^2z^2}$$

$$\zeta = \frac{2p^2x^2z^3}{p^2z^4 + c^4y^2 + 4p^2x^2z^2}$$

Daraus folgt als Gleichung der Fusspunktenfläche des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) für den Coordinatenanfang als Pol:

$$(130) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{c^2\xi\zeta^2}{2p\eta^2}.$$

Digitized by Google

Diese Fusspunktenfläche ist demnach vom vierten Grade, während die bisher betrachteten vom 6ten Grade sind.

Ferner ergiebt sich aus der Gleichung des geraden parabolischen Cono-Cuneus:

$$c^2\eta^2 = 2p\xi\zeta^2:$$

$$\frac{\xi\zeta^2}{\eta^2} = \frac{c^2}{2p}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (130) ein, so geht dieselbe über in

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{c^4}{4p^2} \tag{131}$$

Daraus folgt der Satz: Der gerade parabolische Cono-Cuneus (99), die zugehörige Fusspunktenfläche (130) und die Kugel (131) schneiden sich in einer und derselben Curve.

Oder m. a. W. Die Durchschnittscurve des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) mit der zugehörigen Fusspunktenfläche für den Coordinatenanfang als Pol liegt auf einer Kugel mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren Radius die vierte Proportionale zu $2p$ und c ist.

Ein ähnliches Resultat erhält man für den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108). Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz desselben ist [§ 31. Gl. 113].

$$2pc\xi - 2yz(\eta - y) - y^2\zeta = 0$$

Die vom Coordinatenanfang auf diese Ebene gefällte Senkrechte hat demnach die Gleichungen:

$$\xi = -\frac{2pc}{y^2}\zeta$$

$$\eta = \frac{2yz}{y^2}\zeta,$$

wodurch man für den Fusspunkt dieser Senkrechten erhält:

$$\xi = -\frac{4pcy^2z}{4p^2c^2 + 4y^2z^2 + y^4}$$

$$\eta = \frac{4y^3z^2}{4p^2c^2 + 4y^2z^2 + y^4}$$

$$\zeta = \frac{2y^4z}{4p^2c^2 + 4y^2z^2 + y^4}$$

by Google

Daraus folgt als Gleichung der gesuchten Fusspunktenfläche:

$$(132) \qquad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2+\frac{2pc\eta^2\zeta}{\xi}=0$$

Das ist eine Gleichung fünften Grades.

Dreht man nun den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) um die Z-Axe um π, so ist die Gleichung desselben:

$$\eta^2\zeta=-2pc\xi.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\eta^2\zeta}{\xi}=-2pc.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (132) ein, so geht dieselbe über in

$$(133) \qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=2pc$$

d. h. in Worten: Der um π um die Z-Axe gedrehte parabolische Scheitel-Cono-Cuneus (108), die zugehörige Fusspunktenfläche (132) und die Kugel (133) schneiden sich in einer und derselben Curve.

Oder: Die Durchschnittscurve des um π um die Z-Axe gedrehten parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) mit der zugehörigen Fusspunktenfläche (132) liegt auf einer Kugel um den Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren Radius die mittlere Proportionale zu $2p$ und c ist.

Setzt man ferner

$$2pc=\frac{c^4}{4p^2},$$

so folgt:

$$c=2p.$$

Daraus folgt der Satz: Schneiden sich die beiden parabolischen Cono-Cunei, deren singuläre Kanten auf einander senkrecht stehen und in einer Ebene liegen, in einer Parabel, deren Parameter gleich ihrem Abstande von den singulären Kanten ist, so liegt die Durchschnittscurve des geraden parabolischen Cono-Cuneus mit der zugehörigen Fusspunktenfläche und die Durchschnittscurve der Fusspunktenfläche des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus mit dem um π um die Z-Axe gedrehten parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus auf einer und derselben Kugel um den Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren Radius gleich dem Parameter der Durchschnittsparabel der beiden Cono-Cunei ist.

Digitized by Google

Schliesslich wollen wir noch die Durchschnittscurven der beiden Fusspunktenflächen (130) und (132) mit Ebenen, welche durch die singuläre Kante des betreffenden Cono-Cuneus gehen, untersuchen.

Schneiden wir zu dem Ende die Fläche (130) durch die Ebene:

$$\zeta = \mu\eta,$$

welche durch die X-Axe, also durch die singuläre Kante des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) geht, so erhält man für die Projection der betreffenden Durchschnittscurve auf die XY-Ebene:

$$\xi^2 + (\mu^2+1)\eta^2 = \frac{\mu^2 c^2}{2p}\xi \tag{134}$$

Hieraus folgt, dass jede durch die singuläre Kante des geraden parabolischen Cono-Cuneus gehende Ebene die zugehörige Fusspunktenfläche in einer Ellipse schneidet, welche durch den Pol der Fusspunktenfläche geht. Hierin unterscheidet sich also die Fusspunktenfläche des geraden parabolischen Cono-Cuneus von den bisher betrachteten und, wie wir sogleich sehen werden, auch von derjenigen des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus, aus denen jede durch die singuläre Kante des betreffenden Cono-Cuneus gehende Ebene im Allgemeinen je zwei Ellipsen ausschneidet.

Um dies für die Fläche (132) nachzuweisen, betrachten wir die Durchschnittscurve derselben mit der Ebene:

$$\zeta = -\mu\xi$$

da die Y-Axe singuläre Kante des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) ist. Für die Projection der in Rede stehenden Durchschnittscurve auf die XY-Ebene ergiebt sich alsdann:

$$(1+\mu^2)\xi^2 + \eta^2 = \pm\eta\sqrt{2\mu pc} \tag{135}$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Wir haben also gefunden, dass die Fusspunktenflächen des geraden elliptischen, der beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei und diejenigen des elliptischen und der beiden hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei vom 6ten Grade sind, während die Fusspunktenfläche des geraden parabolischen Cono-Cuneus eine Fläche vierten Grades, diejenige des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus eine Fläche fünften Grades ist.

Ferner stimmen die Fusspunktenflächen des geraden elliptischen Cono-Cuneus und der geraden hyperbolischen Cono-Cunei mit denjenigen der betrachteten Scheitel-Cono-Cunei darin überein, dass jede dur-

die singuläre Kante des betreffenden Cono-Cuneus gehende Ebene im Allgemeinen aus ihnen je zwei Ellipsen ausschneidet, welche sich im Pol der Fläche berühren. Die Durchschnittscurve der Fusspunktenfläche des geraden parabolischen Cono-Cuneus mit einer durch die singuläre Kante dieses Cono-Cuneus gehenden Ebene dagegen besteht nur aus einer Ellipse, welche durch den Pol der Fusspunktenfläche geht.

VII. Abschnitt.

Die Meridiancurven der Cono-Cunei.

§ 35.

Wir schliessen hier eine kurze Behandlung einer Art von Curven auf den Cono-Cuneis an. Auf den Rotationsflächen unterscheidet man Meridiane und Curven gleicher Polhöhe. Diese Terminologie hat Alfred Enneper auf krumme Oberflächen übertragen und diese Curven folgendermassen definirt[1]). Im Punkte xyz einer Fläche bilde die Normale den Winkel u mit der Z-Axe, durch v werde der Winkel bezeichnet, welchen die Projection der Normale auf die XY-Ebene mit der Axe der x einschliesst. Einem bestimmten Werte von u entspricht auf der Fläche eine bestimmte Curve, für welche v allein variabel ist. Dieselbe heisst auf den Rotationsflächen eine Curve gleicher Polhöhe. Variirt u allein, hat also v einen bestimmten Wert, so entspricht demselben eine Curve, welche bei den Rotationsflächen den Namen Meridian führt.

Wir wollen in Folgendem die Meridiancurven der Cono-Cunei betrachten. Wird z als Function von x und y angesehen, dann besteht die Gleichung

$$-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \operatorname{tg} v$$

Mittelst der Gleichung (17) des geraden elliptischen Cono-Cuneus ergiebt sich:

$$\operatorname{tg} v = \frac{a^2 - x^2}{xy}$$

$$a^2 - x^2 - xy \operatorname{tg} v = 0 \tag{136}$$

1) cf. Alfred Enneper: „Ueber Flächen mit besonderen Meridiancurven" im XXIX. Bde. der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaf- Göttingen.

Digitized by Google

Diese Gleichung lässt erkennen, dass die Projection der Meridiancurve des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) auf die XY-Ebene eine Hyperbel mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt ist, deren eine Axe mit der Axe der x den Winkel $\frac{1}{2}v$ bildet, und deren Axen bezüglich gleich: $\frac{a}{\cos\frac{1}{2}v}\sqrt{\cos v}$ und $\frac{a}{\sin\frac{1}{2}v}\sqrt{\cos v}$ sind.

Zu demselben Resultate gelangt man beim geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37). Man erhält nämlich:

$$\operatorname{tg} v = -\frac{x^2-a^2}{xy}$$

Daraus fliesst der Satz: die Meridiancurven des geraden elliptischen und die des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus liegen auf denselben hyperbolischen Cylinderflächen.

Diese Meridiancurven sind Curven doppelter Krümmung. Denn wäre dies nicht der Fall, so müsste, wie in der Theorie der Curven nachgewiesen wird, wenn man x als unabhängige Veränderliche annimmt:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2y}{dx^2} & \frac{d^3y}{dx^3} \\ \frac{d^2z}{dx^2} & \frac{d^3z}{dx^3} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Man erhält aber für die Meridiancurven des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) als Wert dieser Determinante:

$$\frac{6a^4c}{x^3(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}^2 v}$$

und für diejenigen des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37)

$$\frac{6a^4c}{x^3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}^2 v}$$

Setzt man den Wert von a^2-x^2 aus der Gleichung (136) in die Gleichung (17), so ergiebt sich:

$$c^2y = xz^2\operatorname{tg} v \tag{137}$$

Die Meridiancurven des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) liegen demnach auch auf Flächen, welche durch die Gleichung (137) dargestellt werden. Es sind dies parabolische Scheitel-Cono-Cunei, deren Leitlinien den Gleichungen:

$$x^2 = cy\operatorname{ctg} v$$
$$x = c$$

genügen, welche also die XY-Ebene zur Directorebene und die Z-Axe zur singulären Kante haben.

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37), dessen Meridiancurven auf den Flächen:

$$c^2 y = -xz^2 \operatorname{tg} v_1$$

$$c^2 y = xz^2 \operatorname{tg}(\pi - v_1) \tag{138}$$

liegen. Daraus geht hervor, dass die parabolischen Scheitel-Cono-Cunei der eben beschriebenen Art sowol den geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) als auch den geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus (37) in Meridiancurven schneiden.

Ferner erhält man für den geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus (67):

$$\operatorname{tg} v = -\frac{xy}{y^2 + b^2}$$

$$y^2 \operatorname{tg} v + xy + b^2 \operatorname{tg} v = 0 \tag{139}$$

Die Meridiancurven des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus (67) liegen mithin ebenso wie diejenigen des geraden elliptischen und des geraden geteilten hyperbolischen Cono-Cuneus auf hyperbolischen Cylinderflächen, deren Axe die Z-Axe ist. Die Spuren dieser Cylinderflächen in der XY-Ebene sind Hyperbeln mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren eine Axe mit der Axe der x den Winkel $\frac{1}{2}v$ bildet und deren Axen bezüglich

$$b\sqrt{\frac{2\sin v}{1+\sin v}} \quad \text{und} \quad b\sqrt{\frac{2\sin v}{1-\sin v}} \quad \text{sind.}$$

Durch Substitution des Wertes von $y^2 + b^2$ aus (139) in (67) ergiebt sich:

$$b^2 c^2 x \operatorname{tg} v = -a^2 y z^2$$

$$b^2 c^2 x = a^2 y z^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + v\right) \tag{140}$$

Durch Vertauschung von x mit y geht die Gleichung über in:

$$b^2 c^2 y = a^2 x z^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + v\right) \tag{141}$$

Vergleichen wir die Resultate (137), (138) und (141), so resultirt der Satz:

Die Meridiancurven des geraden elliptischen, des geraden geteilten und des geraden einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus, welche ~~~guläre Kante und die Directorebene gemeinsam haben, und

welche so beschaffen sind, dass eine und dieselbe Ebene aus dem elliptischen einen Kreis, aus den beiden hyperbolischen je eine gleichseitige Hyperbel mit einem Parameter gleich dem doppelten Radius des Kreises des elliptischen Cono-Cuneus ausschneidet, liegen auf denselben parabolischen Scheitel-Cono-Cuneis.

§ 36.

Um nun die Meridiancurven des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) zu untersuchen, so folgt aus der Gleichung (76):

$$z = \frac{bcx}{a(b+\sqrt{b^2-y^2})} \tag{142}$$

Mithin erhält man:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{bc}{a(b+\sqrt{b^2-y^2})}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{bcxy}{a(b+\sqrt{b^2-y^2})^2\sqrt{b^2-y^2}},$$

so dass sich ergiebt:

$$\operatorname{tg} v = \frac{xy}{(b+\sqrt{b^2-y^2})\sqrt{b^2-y^2}} \tag{143}$$

Diese Gleichung stellt eine Cylinderfläche 6ten Grades dar; denn man erhält daraus:

$$x^4y^2\operatorname{ctg}^4 v + (b^2-y^2)^2y^2 = 2x^2\operatorname{ctg}^2 v\,(b^2-y^2)(2b^2-y^2)$$

Während daher die Projectionen der Meridiancurven des geraden elliptischen Cono-Cuneus (17) auf die XY-Ebene Hyperbeln, d. h. Curven zweiten Grades sind, liegen die Meridiancurven des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) auf Cylinderflächen 6ten Grades.

Setzt man für die irrationalen Ausdrücke: $b+\sqrt{b^2-y^2}$ und $\sqrt{b^2-y^2}$ die aus der Gleichung (142) folgenden rationalen, so geht die Gleichung (143) über in

$$\operatorname{tg} v = \frac{a^2yz^2}{b^2c(cx-az)} \tag{144}$$

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84):

$$\frac{\left(x-\frac{a}{c}z\right)^2}{\left(\frac{a}{c}z\right)^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Man erhält nämlich:

Digitized by Google

$$\operatorname{tg} v_1 = -\frac{xy}{(b+\sqrt{y^2+b^2})\sqrt{y^2+b^2}}$$

$$\operatorname{tg}(\pi - v_1) = \frac{xy}{(b+\sqrt{y^2+b^2})\sqrt{y^2+b^2}} \tag{145}$$

Die Meridiancurven des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (84) liegen demnach ebenso wie diejenigen des elliptischen Scheitel-Cono-Cuneus (76) auf Cylinderflächen 6ten Grades. Ferner folgt aus der Gleichung (145):

$$\operatorname{tg}(\pi - v_1) = \frac{a^2 y z^2}{b^2 c(cx - az)} \tag{146}$$

Aus der Vergleichung von (144) und (146) resultirt der Satz: Die Meridiancurven des elliptischen und des einfachen hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus, welche dieselbe singuläre Kante und dieselbe Directorebene haben, liegen auf denselben Flächen dritten Grades.

Schliesslich erhält man für den geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus aus der Gleichung (108):

$$z = \frac{acy}{b(a+\sqrt{x^2-a^2})}$$

Demnach ergiebt sich:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{acxy}{b(a+\sqrt{x^2-a^2})^2\sqrt{x^2-a^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ac}{b(a+\sqrt{x^2-a^2})},$$

also:

$$\operatorname{tg} v' = -\frac{(a+\sqrt{x^2-a^2})\sqrt{x^2-a^2}}{xy}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+v'\right) = \frac{xy}{(a+\sqrt{x^2-a^2})\sqrt{x^2-a^2}} \tag{147}$$

Die Meridiancurven des elliptischen und der beiden hyperbolischen Scheitel-Cono-Cunei stimmen also darin überein, dass sie auf Cylinderflächen 6ten Grades liegen.

Ferner folgt aus (147):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+v'\right) = \frac{b^2 x z^2}{a^2 c(cy - bz)} \tag{148}$$

Dreht man den geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) um die Z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so dass die positive X-Axe in die negative Y-Axe fällt, so haben wir nur x mit y zu vertauschen, alles

Digitized by Google

Uebrige bleibt unverändert. Führen wir diese Vertauschung in der Gleichung (148) aus, so geht dieselbe über in

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+v'\right)=\frac{b^2yz^2}{a^2c(cx-bz)} \tag{149}$$

Aus der Vergleichung von (144), (146) und (149) resultirt der Satz:

Die Meridiancurven des elliptischen, des einfachen und des geteilten hyperbolischen Scheitel-Cono-Cuneus, welche dieselbe singuläre Kante und dieselbe Directorebene haben, und welche so beschaffen sind, dass eine und dieselbe Ebene aus dem elliptischen einen Kreis, aus den beiden hyperbolischen je eine gleichseitige Hyperbel mit einem Parameter gleich dem doppelten Radius des Kreises des ellip-Scheitel-Cono-Cuneus ausschneidet, liegen auf denselben Flächen dritten Grades.

Es ist dies eine ganz ähnliche Beziehung, wie wir sie am Ende des vorigen § für die drei entsprechenden geraden Cono-Cunei abgeleitet haben.

§ 37.

Verfolgen wir nun dieselbe Untersuchung für die beiden parabolischen Cono-Cunei. Aus der Gleichung (99) des geraden parabolischen Cono-Cuneus geht hervor:

$$z=\frac{cy}{\sqrt{2px}}$$

also:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{cy}{2\sqrt{2px^3}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c}{\sqrt{2px}}.$$

Mithin erhält man:

$$\text{tg}\,v=-\frac{2x}{y}$$

$$2x+y\,\text{tg}\,v=0 \tag{150}$$

Die Meridiancurven des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) liegen demnach in Ebenen, welche durch die Z-Axe gehen. Es sind mithin zum Unterschiede von den bisher betrachteten ebene Curven, und zwar Parabeln, welche der Gleichung genügen:

$$z'^2=\frac{2c^2\,\text{ctg}^2v}{p\sqrt{1+4\,\text{ctg}^2v}}x'.$$

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108):

Digitized by Google

$$z = \frac{2pcx}{y^2}.$$

Es folgt nämlich hieraus:

$$\operatorname{tg} v = -\frac{2x}{y}$$

$$2x + y \operatorname{tg} v = 0$$

d. i. aber die Gleichung (150). Mithin resultirt der Satz: Die durch die Z-Axe gehenden Ebenen schneiden sowol den geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) als auch den parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) in Meridiancurven.

Die Meridiancurven des parabolischen Scheitel-Cono-Cuneus (108) sind aber, wie sich aus den Erörterungen des § 30. Gl. (112) ergiebt, zum Unterschiede von denen des geraden parabolischen Cono-Cuneus (99) gleichseitige Hyperbeln; sie liegen also auf hyperbolischen Cylinderflächen, und hierin stimmen sie mit den Meridiancurven des geraden elliptischen und der beiden geraden hyperbolischen Cono-Cunei überein.

Ziehen wir schliesslich allgemein die durch die Gleichung (4):

$$cy = zf(x)$$

dargestellten Flächen in Betracht, so ergiebt sich für dieselben:

$$\operatorname{tg} v = -\frac{f(x)}{yf'(x)}$$

also:

$$yf'(x) \operatorname{tg} v + f(x) = 0$$

Die Projectionen der Meridiancurven der durch die Gleichung (4) dargestellten Flächen auf die XY-Ebene sind demnach im Allgemeinen Curven $m$ten Grades, wenn m den Grad von $f(x)$ bedeutet, vorausgesetzt dass $f(x)$ eine ganze rationale Function von x bezeichnet.

Dieser Satz gilt auch, wenn die Leitlinie der Fläche der Gleichung: $y^n = f(x)$ genügt, so dass der Grad der auf die XY-Ebene projicirten Meridiancurven der Fläche (4) von n unabhängig ist.

Denn es ergiebt sich für diesen Fall:

$$yf'(x) \operatorname{tg} v + nf(x) = 0$$

Digitized by Google

VIII. Abschnitt.

Verallgemeinerungen der Cono-Cunei.

§ 38.

Zum Schluss wollen wir an bisher gefundene Resultate einige Bemerkungen anknüpfen, indem wir die betrachteten Flächen etwas verallgemeinern.

Wir ändern zunächst die Bedingung, dass die singuläre Kante einer Axe des Leitkegelschnitts parallel ist, dahin ab, dass eine Axe des Leitkegelschnitts mit der singulären Kante den Winkel α bildet, während diese Kante der Ebene des Leitkegelschnitts parallel ist und durch die im Mittelpunkte desselben auf seiner Ebene senkrecht stehende Gerade geht.

Sind die Gleichungen des Leitkegelschnitts:

$$(151) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D \\ z = c \end{array} \right.$$

dann ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Fläche, wenn die Ebene der yz die Directorebene ist:

$$(152) \qquad Ax^2z^2 + 2Bcxyz + Cc^2y^2 = Dz^2$$

Daraus folgt, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene die Fläche (152) in einem Kegelschnitte schneidet, und zwar da das charakteristische Binom desselben gleich $(B^2 - A.C)c^2z^2$ ist, in einer Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der Leitkegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

Um diesen Kegelschnitt näher zu untersuchen, betrachten wir die allgemeine Mittelpunktsgleichung eines solchen:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D$$

Wenden wir hierauf die Coordinatentransformation an:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y &= -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{aligned}$$

so geht diese Gleichung über in

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = D$$

wobei:

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha \\ B' &= \tfrac{1}{2}A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}C\sin 2\alpha \\ C' &= A\sin^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \end{aligned}$$

$B'=0$ liefert die Bedingung: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{C-A}$. Dadurch ergiebt sich:

$$A' = \tfrac{1}{2}(A+C) + \frac{(A-C)^2 - 4B^4}{2\sqrt{(C-A)^2+4B^2}}$$

$$C' = \tfrac{1}{2}(A+C) - \frac{(A-C)^2 - 4B^2}{2\sqrt{(C-A)^2+4B^2}}$$

Diese Resultate auf die Gleichung (152) angewandt, liefert:

$$(153)\qquad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2Bcz}{Cc^2 - Az^2} \\ A' = \tfrac{1}{2}(Az^2+Cc^2) + \dfrac{(Az^2-Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2}{2\sqrt{(Cc^2-Az^2)^2+4B^2c^2z^2}} \\ C' = \tfrac{1}{2}(Az^2+Cc^2) - \dfrac{(Az^2-Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2}{2\sqrt{(Cc^2-Az^2)^2+4B^2c^2z^2}} \end{array}\right.$$

Daraus geht hervor, dass die Fläche (152) dadurch entstanden gedacht werden kann, dass sich eine Ellipse oder Hyperbel mit variablen Axen parallel mit sich selbst bewegt, während ihr Mittelpunkt eine auf der Ebene des Kegelschnitts senkrechte Gerade beschreibt und ihre Axen sich um den Mittelpunkt drehen. Diese Art von Flächen unterscheidet sich dadurch von den Cono-Cuneis, dass hier beide Axen des beweglichen Kegelschnitts variabel sind, während bei jenen nur eine Axe sich ändert. Sie haben das mit den elliptischen Cono-Cuneis gemein, dass auch hierbei unter den ausgeschnittenen Ellipsen ein Kreis vorkommt, und zwar erhält man denselben für

$$(Az^2 - Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2 = 0$$

$$(154)\qquad z = \pm\frac{c}{A}(B+\sqrt{B^2+A.C})$$

Wenn der Leitkegelschnitt hierbei eine Parabel ist, so ist, weil der Mittelpunkt derselben im Unendlichen liegt, die singuläre Kante der Parabelaxe parallel, ihre Projection auf die Parabelebene braucht aber nicht mit der Parabelaxe zusammenzufallen, sondern kann von ihr um irgend eine Strecke δ entfernt sein.

Um diesen Fall zu untersuchen, nehmen wir als Gleichungen der Leitparabel:

$$(155)\qquad \left\{\begin{array}{l} (y-\delta)^2 = 2px \\ z = c, \end{array}\right.$$

wodurch wir als Gleichungen der betreffenden Fläche erhalten:

Digitized by Google

$$\left(y - \frac{\delta}{c} z\right)^2 = 2p \frac{z^2}{c^2} x \tag{156}$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass jede zur XY-Ebene parallele Ebene die betreffende Fläche in einer Parabel schneidet, deren Parameter proportional dem Quadrate der Entfernung der schneidenden Ebene von der singulären Kante wächst. Die Axen dieser ausgeschnittenen Parabeln sind der singulären Kante parallel und entfernen sich von der XZ-Ebene proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der XY-Ebene. Diese Fläche ist also ein schiefer parabolischer Cono-Cuneus.

§ 39.

Eine andere Verallgemeinerung ist die, dass die Ebene des Leitkegelschnitts nicht der singulären Kante parallel ist, sondern mit ihr den Winkel α bildet. Wir wollen hierbei zunächst den speciellen Fall untersuchen, wo

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = (a + x) \operatorname{tg} \alpha \end{array}\right. \tag{157}$$

die Gleichungen der Leitlinie sind. Die Gleichung der betreffenden Fläche ist demnach:

$$y^2 (a + x)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (r^2 - x^2) z^2 \tag{158}$$

Betrachten wir die Durchschnittscurve dieser Fläche vierten Grades mit einer Ebene senkrecht auf der XZ-Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel ψ bildet und von derselben das Stück c ababschneidet, so ergiebt sich, wenn man die Coordinatentransformation anwendet:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x' \cos \psi - z' \sin \psi \\ y = y' \\ z = c \operatorname{tg} \psi + x' \sin \psi + z' \cos \psi \end{array}\right. \tag{159}$$

und $z' = 0$ setzt, als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$y^2 (a + x' \cos \psi)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (r^2 - x'^2 \cos^2 \psi)(c + x' \cos \psi)^2 \operatorname{tg}^2 \psi$$

Für $c = a$ geht diese Gleichung über in

$$\left\{\begin{array}{l} a + x' \cos \psi = 0 \\ y'^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (r^2 - x'^2 \cos^2 \psi) \operatorname{tg}^2 \psi \end{array}\right. \tag{160}$$

Daraus folgt: Alle Ebenen senkrecht auf der XZ-Ebene, welche durch die in der XY-Ebene liegende Gerade $x = -a$ gehen, schnei-

Digitized by Google

den die Fläche (158) in Ellipsen, deren Mittelpunkte auf der Z-Axe liegen, und deren Axen bezüglich in die Ebenen der xz und der yz fallen.

Zugleich ist ersichtlich: Wenn $a > r$ ist, so besteht die betrachtete Durchschnittscurve nur aus der beschriebenen Ellipse; ist dagegen $a \leqq r$, so erhält man ausser dieser Ellipse noch eine Gerade.

Unter den ausgeschnittenen Ellipsen findet sich ein Kreis, und zwar für $\sin\psi = \operatorname{tg}\alpha$. Ein Kreis kann demnach nur aus der Fläche (158) ausgeschnitten werden, wenn $\alpha \leqq \frac{\pi}{4}$ ist.

Hätten wir als Gleichungen des Leitkegelschnitts allgemein angenommen:

$$(161)\qquad \left\{\begin{array}{c} Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \\ z=(a+x)\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right.$$

so hätten wir als Gleichung der Fläche erhalten:

$$(162)\qquad \left\{\begin{array}{c} z^2.\varphi_1+z(a+x).\varphi_2+(a+x)^2.\varphi_3=0 \\ \varphi_1=Ax^2+2Dx+F \\ \varphi_2=2(Bx+E)y\operatorname{tg}\alpha \\ \varphi_3=Cy^2\operatorname{tg}^2\alpha \end{array}\right.$$

Für die Durchschnittscurve der oben definirten Ebene mit dieser Fläche ergiebt sich für $c = a$:

$$(163)\qquad \left\{\begin{array}{c} a+x'\cos\psi=0 \\ \varphi_1'.\operatorname{tg}^2\psi+\varphi_2'.\operatorname{tg}\psi+\varphi_3'=0 \end{array}\right.$$

Der ausgeschnittene Kegelschnitt ist also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem:

$$(B^2-A.C)\operatorname{tg}^2\alpha.\sin^2\psi \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0$$

ist, d. h. je nachdem die Leitlinie eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Das charakteristische Binom verschwindet allerdings auch für $\psi = 0$. In diesem Falle ergiebt sich aber die singuläre Kante als Durchschnittscurve. Man kann demnach die betrachteten Flächen so entstanden denken, dass sich ein variabler Kegelschnitt um eine in seiner Ebene liegende Gerade dreht, während die Punkte seiner Peripherie gerade Linien beschreiben, welche einer durch die Drehungsaxe gehenden Ebene parallel sind und durch eine auf dieser Directorebene senkrecht stehende Gerade gehen, welche die Drehungsaxe schneidet.

Digitized by Google

Die Cono-Cunei gehen dadurch hieraus hervor, dass die Drehungsaxe ins Unendliche rückt.

Aus der Gleichung (158) ergeben sich folgende zwei specielle Fälle.

Für $a = 0$ geht dieselbe über in

$$x^2 y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (r^2 - x^2) z^2 \tag{164}$$

Für $a = r$ ergiebt sich aus (158):

$$y^2 (r + x) \operatorname{tg}^2 \alpha = (r - x) z^2 \tag{165}$$

Diese letztere Gleichung stellt eine Fläche dritten Grades dar, welche die Eigenschaft hat, wie sich leicht nachweisen lässt, dass die Tangentialebene aus ihr im Allgemeinen die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende der Fläche und eine Ellipse ausschneidet.

§ 40.

Schliesslich wollen wir noch eine dritte Voraussetzung, welche wir bei der Definition der Cono-Cunei gemacht haben, fallen lassen. Wir haben dort nämlich angenommen, dass die singuläre Kante auf der Directorebene senkrecht steht, oder, was dasselbe bedeutet, dass die erzeugenden Geraden die singuläre Kante rechtwinklig schneiden. Betrachten wir nun den allgemeineren Fall, dass die Projectionen der Erzeugenden auf die XZ-Ebene mit der singulären Kante den Winkel β bilden.

Diese Erzeugenden müssen demnach den Gleichungen genügen, wenn wir die singuläre Kante wieder zur X-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems nehmen:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = uz \\ x = v + z \operatorname{ctg} \beta \end{array} \right. \tag{166}$$

Hat der Leitkegelschnitt allgemein die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ z = (a + x) \operatorname{tg} \alpha \end{array} \right. \tag{167}$$

so erhält man als Gleichung der betreffenden Fläche, wenn man

$$1 - \operatorname{tg} \alpha . \operatorname{ctg} \beta = m; \quad \operatorname{tg} \alpha . \operatorname{ctg} \beta = n$$

setzt:

$$\left\{ \begin{array}{l} z^2 . \varphi_1 + z(a + x) . \varphi_2 + (a + x)^2 . \varphi_3 = 0 \\ \varphi_1 = A[na + x - z \operatorname{ctg} \beta]^2 - 2Bny[(1 + n)a + 2x - z \operatorname{ctg} \beta] \\ \quad + Cn^2 y^2 + 2Dm[na + x - z \operatorname{ctg} \beta] - 2Em . ny + F . m^2 \\ \varphi_2 = 2[B(na + x) - Cny + Em] y \operatorname{tg} \alpha \\ \varphi_3 = Cy^2 . \operatorname{tg}^2 \alpha \end{array} \right. \tag{168}$$

Digitized by Google

Wir wollen nun nachweisen, dass auch diese Flächen durch Drehung eines veränderlichen Kegelschnitts entstehen können. Zu dem Zwecke betrachten wir die Durchschnittscurve der Fläche (168) mit einer auf der XZ-Ebene senkrecht stehenden Ebene, welche mit der X-Axe den Winkel ψ bildet und von derselben das Stück c abschneidet. Mit Hülfe der Transformationsgleichungen (159) des vorigen § ergiebt sich als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$(169)\qquad \left\{\begin{array}{l} (c+x'\cos\psi)^2.\varphi_1'.\operatorname{tg}^2\psi \\ +(c+x'\cos\psi)(a+x'\cos\psi).\varphi_2'.\operatorname{tg}\psi \\ +(a+x'\cos\psi)^2.\varphi_3' = 0 \end{array}\right.$$

Wird $c = a$, so geht diese Gleichung über in

$$(170)\qquad \left\{\begin{array}{l} a+x'\cos\psi = 0 \\ \varphi_1'.\operatorname{tg}^2\psi+\varphi_2'.\operatorname{tg}\psi+\varphi_3' = 0 \end{array}\right.$$

Aus den Gleichungen (168) geht hervor, dass φ_1', φ_2', φ_3' Functionen zweiten Grades in x', y' sind. Mithin resultirt der Satz:

Diejenigen auf der XZ-Ebene senkrechten Ebenen, welche durch die in der XY-Ebene liegende Gerade $x = -a$ gehen, schneiden aus der Fläche (168) im Allgemeinen Kegelschnitte aus.

Das charakteristische Binom der Gleichung der Kegelschnitte ist:

$$(B^2 - A.C)(\operatorname{ctg}\psi - \operatorname{ctg}\beta)^4.\sin^2\psi.\operatorname{tg}^4\psi.\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Das Vorzeichen desselben hängt mithin von dem Vorzeichen von $B^2 - A.C$ ab, d. h. der ausgeschnittene Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Leitkegelschnitt der Fläche (168) eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Allerdings verschwindet das charakteristische Binom auch für $\psi = 0$ und für $\psi = \beta$. Im ersteren Falle erhält man aber als Durchschnittscurve die singuläre Kante, im zweiten eine erzeugende Gerade der Fläche oder kein geometrisches Gebilde.

Damit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Digitized by Google

XVII.

Das Sehnen-Tangentenviereck.

Von

Herrn Dr. **J. Schumacher.**

In der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", herausgegeben von J. C. V. Hoffmann, ist im 8. Jahrgang pag. 502. Aufgabe Nummer 48. von Herrn Geheimrat Dr. Schlömilch die nachfolgende Aufgabe gestellt:

„Die Vierecke, welche einem Kreise eingeschrieben und zugleich „einem andern Kreise umgeschrieben sind, bieten mancherlei Auf„gaben dar, von denen bisher nur wenige (z. B. die Ermittelung des „Abstandes der beiden Kreiscentren) Beachtung gefunden haben. „Als Beispiel eines hierher gehörenden Problems sei folgendes er„wähnt: Aus drei gegebenen Eckpunkten A, B, C eines solchen Vier„ecks den vierten Eckpunkt D zu suchen."

„Vierecke der genannten Art sind durch drei gegebene Stücke „bestimmt; die Bearbeitung der einzelnen Fälle gäbe eine kleine „Theorie, die sich vielleicht rein geometrisch behandeln lassen wird."

Ich habe mich an die Untersuchungen dieser besonderen Art von Vierecken gemacht, bin jedoch nicht dem Rate des sehr geehrten Herrn Aufgabenstellers, die sämtlichen einzelnen Fälle, durch die ein Sehnentangentenviereck bestimmt sein kann, zu behandeln, gefolgt, sondern suchte nur die Eigenschaften dieser speciellen Gattung von Vierecken herauszufinden, durch welche ich leichter in den Stand gesetzt zu sein glaubte, die einzelnen Fälle eleganter lösen zu können.

Digitized by Google

Die Vermutung Schlömilch's, dass die Bearbeitung derselben sich vielleicht rein geometrisch behandeln lassen wird, habe ich bestätigt gefunden.

Die in denselben Zeitschriften über das bicentrische Viereck angestellten Untersuchungen des Herrn R. O. Consentius aus Carlsruhe und jene des Herrn Dr. Eheler aus Zülichau habe ich nicht gekannt und wurde erst, nachdem meine Arbeit schon ziemlich vorgeschritten war, von Herrn Rector Dietsch auf dieselben aufmerksam gemacht. Wo die Resultate, namentlich des ersten Herrn, mit den meinigen die gleichen sind, wird der verschiedenartige Weg, auf welchem wir zu gleichen Schlüssen kamen, die obige Behauptung bestätigen.

Indem ich die interessanten Schlussfolgerungen des Herrn Consentius vollkommen anerkenne, kann ich mir nicht das Urteil versagen, dass genannter Herr auf seinem Wege nicht die Reichhaltigkeit der Eigenschaften erschöpft hätte, wie sie nur bei directer Untersuchung des Sehnen-Tangentenvierecks möglich ist; denn die sich ergebenden Schlussfolgerungen sind in der Tat so vielseitig, dass ich nicht leugne, manche in dieser Abhandlung unerwähnt gelassen zu haben, die von Interesse sind, weil ich sie im Gange meiner Betrachtung für selbstverständlich gehalten habe.

Die Schuld an der geringeren Zahl der Aufgaben, die von Herrn Consentius in dieser Zeitschrift gestellt sind, trägt wohl die allgemeinere also auch desto schwierigere Behandlung.

Meinen Betrachtungen legte ich die Kenntniss der zwei Fundamentalsätze des Sehnen- und Tangentenvierecks zu Grunde:

1) In jedem Sehnenviereck ist die Summe der gegenüberliegenden Winkel $= 180^0$.

2) In jedem Tangentenviereck sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Zum Beweise meiner Lehrsätze werde ich mich des rechnerischen und des rein geometrischen Verfahrens bedienen und demgemäss diese Arbeit in zwei Teile zu teilen haben, von denen der eine das geometrische, der andere das rechnerische Resüme enthält. Manche Lehrsätze werden sich in beiden Teilen bestätigt finden.

Es sei das Sehnen-Tangentenviereck A, B, C, D gegeben durch den Radius des eingeschriebenen Kreises $= \varrho$ und zwei einer Seite anliegende Winkel (A und B). Verbinden wir den Mittelpunkt desselben (M) mit den vier Ecken A, B, C, D, und fällen wir ausserdem noch von M aus die Lote auf die Seiten (Ma_1, Mb_1, Mc_1, Md_1),

Digitized by Google

so erhalten wir die 4 Sehnenvierecke MAa_1d_1, MBa_1b_1, MCb_1c_1, MDc_1d_1. Fassen wir nun zwei, welche gegenüberliegende Ecken enthalten, ins Auge, etwa die Vierecke

$$MBa_1b_1 \quad \text{und} \quad MDd_1c_1,$$

so ist

$$\text{Wkl. } B + a_1Mb_1 = 2R$$
$$\text{Wkl. } D + d_1Mc_1 = 2R$$

folglich

$$\text{Wkl. } B + D + a_1Mb_1 + d_1Mb_1 + d_1Mc_1 = 4R$$
$$-\text{Wkl. } B \pm D \qquad\qquad = 2R$$

folglich

$$\text{Wkl. } a_1Mb_1 + d_1Mc_1 \qquad = 2R$$

folglich

$$a_1Mb_1 = D$$

und

$$d_1Mc_1 = B.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Construction des Sehnen-Tangentenvierecks aus ϱ und zwei Winkeln.

Halbire den Winkel A und lasse dessen Schenkel den Kreis vom Radius ϱ berühren. Hierauf ziehe M_1a_1 und Md_1 und trage an Md_1 den Winkel B an. Die Schenkel dieses Winkels schneiden auf dem Kreise um M den Berührungspunkt c_1 aus. An Mc_1 trage wieder den Winkel A an, von welchem der Schenkel Mb_1 den vierten Berührungspunkt auf dem Kreise um M ausschneidet.

Die Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 sind die Berührungspunkte der Seiten des gesuchten Vierecks und die Tangenten in ihnen an den Kreis um M schneiden sich in den Ecken A, B, C, D, die wiederum auf einem Kreise liegen.

Aus der nachgewiesenen Eigenschaft des Sehnen-Tangentenvierecks folgern sich noch mehrere andere Constructionen, die wir übergehen, weil es uns nur um die Wirklichkeit eines solchen Vierecks vorerst zu tun ist.

In jedem Sehnen-Tangentenviereck ergänzen sich die Bögen des eingeschriebenen Kreises, die zwischen gegenüberliegenden Winkeln des Vierecks $ABCD$ liegen, zu einem Halbkreise.

Da Wkl. $a_1Mb_1 + d_1Mc_1 = 180^0$ beträgt, müssen auch die Bögen

$$\overset{\frown}{a_1b_1} + \overset{\frown}{c_1d_1} = 180^0$$

und analog

$$\overset{\frown}{a_1d_1} + \overset{\frown}{b_1c_1} = 180^0$$

betragen.

Digitized by Google

Die Verbindungslinien der Berührungspunkte a_1, b_1, c_1, d_1 liefern ein neues Sehnenviereck, welches nicht zugleich Tangentenviereck ist, und dessen Diagonalen auf einander senkrecht stehen. Dass a_1, b_1, c_1, d_1 ein Sehnenviereck, ist sofort aus der Figur einzusehen.

Ist ϱ der Radius des Kreises um M, dann erhalten wir:

$$a_1b_1 = 2\varrho\cos\frac{B}{2} \qquad a_1d_1 = 2\varrho\cos\frac{A}{2}$$

$$c_1d_1 = 2\varrho\sin\frac{B}{2} \qquad b_1c_1 = 2\varrho\sin\frac{A}{2}$$

folglich

$$a_1b_1 + c_1d_1 = 2\varrho\left(\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\right). \quad a_1d_1 + b_1c_1 = 2\varrho\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right)$$

Die Summen der gegenüberliegenden Seiten sind somit nur gleich, wenn Wkl. $A = B$, was hier bei Betrachtung des allgemeinen Falles nicht vorausgesetzt ist.

Ferner ist

$$\text{Wkl. } d_1a_1c_1 = \tfrac{1}{2}d_1Mc_1 = \tfrac{1}{2}B$$
$$\text{Wkl. } a_1d_1b_1 = \tfrac{1}{2}a_1Mb_1 = 90^0 - \tfrac{1}{2}B$$

folglich

$$\text{Wkl. } d_1a_1c_1 + a_1d_1b_1 = 90^0$$

d. h. die Diagonalen des Berührungsehnenvierecks stehen auf einander senkrecht.

Hieraus folgt weiter: Beschreibt man über den Seiten des Berührungsehnenvierecks eines Sehnen-Tangentenvierecks Kreise, so schneiden sich dieselben in dem Durchschnittspunkte der Diagonalen des Sehnen-Tangentenvierecks. Die Diagonalen des ersteren zerlegen die Winkel in ihre Bestandteile.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig:

Errichtet man in einem Kreise von beliebigem Radius zwei auf einander senkrecht stehende Sehnen, so schneiden dieselben auf dem Kreise 4 Punkte aus, welche die Berührungspunkte der Seiten eines Sehnen-Tangentenvierecks sind, von welchem der Schnittpunkt der Sehnen zugleich Durchschnittspunkt der Diagonalen ist.

Seien a_1c_1 und b_1d_1 diese Sehnen, und verbinden wir a_1, b_1, c_1, d_1 mit dem Kreismittelpunkte M, construiren wir ferner die Tangenten in denselben Punkten, so schneiden sich letztere in den Ecken des fraglichen Vierecks A, B, C, D.

Digitized by Google

Nun ist

$$\text{Wkl. } b_1a_1c_1 = \tfrac{1}{2}b_1Me_1$$
$$a_1b_1d_1 = \tfrac{1}{2}a_1Md_1$$

folglich

$$b_1a_1c_1 + a_1b_1d_1 = \mathrm{R}$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}b_1Mc_1 + \tfrac{1}{2}a_1Md_1 = \mathrm{R}$$
$$b_1Mc_1 + a_1Md_1 = 2\mathrm{R}.$$

Nach der Construction ist aber

$$b_1Mc_1 = A$$

und

$$a_1Md_1 = C;$$

somit

$$A + C = = 2\mathrm{R}.$$

Die Pole der Diagonalen a_1c_1 und b_1d_1 sind offenbar die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Sehnen-Tangentenvierecks. Lassen wir daher diese beiden auf einander senkrecht stehenden Sehnen sich um denselben Punkt drehen, so bewegen sich ihre Pole auf je einer Geraden fort, den Polaren des Punktes x. Diese Geraden müssen aber notwendig zusammenfallen. Sie ist die dritte Diagonale des Vierecks $ABCD$.

Diese Gerade bleibt nun immer dieselbe für alle Sehnen-Tangentenvierecke, so lange wir den Punkt x und den Kreis um M festhalten.

Es müssen daher die Verbindungslinien der Schnittpunkte zweier gegenüberliegender Seiten irgend eines Sehnen-Tangentenvierecks alle mit der Polaren von x zusammenfallen.

Indem wir nun die beiden auf einander senkrecht stehenden Sehnen a_1c_1 und b_1d_1 in immer andere Lagen übergehen lassen, erhalten wir lauter neue Sehnen-Tangentenvierecke, welche sämtlich die äussere Diagonale, die Polare des Punktes x, gemeinschaftlich haben. Eine besondere Lage irgend eines Sehnenpaares wird auch jene sein, wenn eine dieser Sehnen ein Durchmesser des Kreises um M wird.

Construiren wir in den Schnittpunkten dieses Durchmessers mit dem Kreise M die Tangenten, so werden dieselben zu einander und mithin auch zu der äusseren Diagonale parallel. Da aber dieser durch x gezogene Durchmesser auf den Tangenten senkrecht steht, so ist damit auch die Lage dieser äusseren Diagonale fixirt. Wir erhalten daher den merkwürdigen Satz:

„In jedem Sehnen-Tangentenviereck steht die Diagonale, die „man durch Verbindung der Schnittpunkte der verlängerten Vier-

Digitized by Google

„eckseiten erhält, auf jenem Durchmesser des dem Viereck einbe-„schriebenen Kreises senkrecht,' welcher durch den Diagonalschnitt-„punkt geht."

Das Sehnen-Tangentenviereck selbst, durch welches wir auf obigen Satz gelangten, ist aber ein Antiparallelogramm.

Einige Eigenschaften desselben hat Herr Dr. Ehrler in der Hoffmann'schen Zeitschrift, Jahrgang V., pag. 432. bereits veröffentlicht, auf die ich hier nur verweisen will, ohne die betreffenden Sätze noch einmal zu recapituliren.

Ein weiteres besonderes Sehnen-Tangentenviereck erhalten wir durch Annahme jenes Falles, wonach eine seiner Diagonalen durch den Mittelpunkt des ihm umschriebenen Kreises geht.

In einem solchen Viereck müssen zwei Winkel je 90^0 betragen und die Durchmesserdiagonale die anderen Diagonalen halbiren; folglich sind auch je zwei in demselben Endpunkte der Durchmesserdiagonale zusammenstossende Seiten einander gleich. Die Construction dieses Vierecks ist demnach die folgende:

Wir construiren ein circulares Sehnenpaar im Punkte x in der Weise, dass die Linie Mx den Winkel dieses Sehnenpaares halbirt.

Wir haben bisher den Mittelpunkt des irgend einem Sehnen-Tangentenvierecke einbeschriebenen Kreises, sowie den Schnittpunkt (x) der Diagonalen fixirt und erfahren, dass jedes durch x gehende circulare Sehnenpaar Anlass zu einem bicentrischen Vierecke gibt.

Wir treten nun der Frage nach dem Orte der Mittelpunkte der allen Sehnen-Tangentenvierecken umschriebenen Kreise nahe, wenn sie denselben Schnittpunkt der Diagonalen besitzen und demselben Kreise umschrieben sind. Wir beantworten dieselbe durch den folgenden Lehrsatz:

Alle bicentrischen Vierecke, welche demselben Kreise umbeschrieben sind und den Diagonalschnittpunkt gemeinschaftlich haben, sind auch einem und demselben Kreise einbeschrieben.

Beweis.

Unter allen möglichen Vierecken, welche den gestellten Bedingungen genügen, nehmen wir eines, etwa das Viereck $ABCD$ heraus. Dasselbe sei dem Kreise M_1 ein- und dem Kreise M umbeschrieben und habe zum Schnittpunkte der Diagonalen den Punkt x. Construiren wir die Polare des Punktes x in Bezug auf den Kreis M_1,

Digitized by Google

so folgt sofort, dass sie mit jener des Punktes x in Bezug auf den Kreis M zusammenfällt.

Dem unendlich fernen Punkt derselben entspricht aber im Kreis M_1 ein Durchmesser, der durch x geht, im Kreise M ein Durchmesser, der ebenfalls durch x geht. Beide müssen aber zusammenfallen, und es liegen demnach die Punkte x, M und M_1 in einer Geraden.

Dem Punkte M_1 entspricht als Polare die unendlich ferne Gerade, welche auch zugleich Polare des Punktes M in Bezug auf den Kreis M ist.

Mögen wir daher statt des bicentrischen Vierecks irgend ein anderes nehmen, welches ebenfalls dem Kreise M_1 umbeschrieben ist, und dessen Diagonalen sich im Punkte x schneiden, so wird dasselbe immer dem Kreise M einbeschrieben sein. Wir gelangen daher zu dem Lehrsatze:

Alle Sehnen-Tangentenvierecke, welche demselben Kreise umgeschrieben sind und den Diagonalschnittpunkt gemeinsam haben, sind auch ein und demselben Kreise eingeschrieben. Der Diagonalschnittpunkt liegt auf der Centrale der beiden Kreise.

Sind umgekehrt zwei Kreise so gegeben, dass der eine ganz innerhalb des andern gelegen ist, so ist es im allgemeinen nicht möglich, ein Viereck zu construiren, welches dem einen Kreise umgeschrieben, und dem andern Kreise eingeschrieben ist.

Wenn aber ein solches Viereck existirt, dann giebt es unendlich viele. Dieser Satz wurde schon von Jakobi für Kegelschnitte bewiesen. Hieraus folgt weiter der Satz:

Alle Sehnenvierecke, welche demselben Kreise eingeschrieben sind, und in welchen die Berührungssehnen, die alle durch einen Punkt gehen, auf einander senkrecht stehen, sind zugleich einem und demselben Kreise umschrieben.

Veränderung der Lage des Punktes x.

Für weitere Untersuchungen unseres bicentrischen Vierecks kann uns die Veränderung der Lage des Punktes x dienen.

Denken wir uns den Kreis M fest und den Punkt x in der ganzen Kreisebene herumwandern, so erhalten wir für jede Lage eine unendliche Anzahl von Sehnen-Tangentenvierecke, die immer demselben Kreise umschrieben sind, und von denen eines die Eigenschaft

Digitized by Google

hat, dass seine Berührungssehnen zu jenen eines gegebenen parallel sind.

Sei x_1 ein zweiter Diagonalschnittpunkt, durch welchen wir das zu ac, bd parallele Sehnenpaar a_1c_1, b_1d_1 ziehen.

Nun ist der Pol von b_1d_1 der Schnitt der Tangenten A_1D_1 und B_1C_1, der Pol von ac der Schnitt der Tangenten AB und CD. Da aber $ac \parallel b_1d_1$, muss die Polare des Schnittpunktes von b_1d_1 und ac in Bezug auf den Kreis M notwendig ein Durchmesser sein, der

1) durch den Schnitt von A_1D_1 und B_1C_1 und AB und CD geht und

2) zu den Sehnen a_1c_1 und bd parallel ist.

Mögen wir nun das eine Sehnenpaar, wohin wir auch wollen verschieben, so bleibt dieser Durchmesser immer derselbe.

Aus demselben Grunde ist die Polare des Schnittpunktes der Sehnen bd und a_1c_1 ebenfalls ein Durchmesser des Kreises M, der notwendig auf dem zuerst erhaltenen senkrecht steht. Wir gelangen daher zu dem folgenden Satze:

Alle Sehnen-Tangentenvierecke, derenhomologe Berührsehnen parallel sind, und welche demselben Kreise umschrieben sind, haben die Eigenschaft, dassihre gegenüberliegenden Seiten sich auf zwei zu einander senkrechten Durchmessern des Kreises, den sie gemeinschaftlich berühren, schneiden.

Nun schneidet das Sehnenpaar a_1c_1 und b_1d_1 das zweite Sehnenpaar ac und bd in 4 im Endlichen und 2 im Unendlichen gelegenen Punkten, von denen jeder Anlass zur Bildung eines Sehnen-Tangentenviereckes giebt. Die 4 im Endlichen gelegenen Diagonalschnittpunkte liefern Sehnenvierecke, von denen je zwei den Schnittpunkt gegenüber liegender Seiten gemeinschaftlich haben. Es ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt der Pol jener Seite, in deren Endpunkten die Seiten des Vierecks den Kreis M berühren.

Halten wir das eine Sehnenpaar fest, und verschieben gleichzeitig eine Sehne parallel, so erhalten wir lauter Sehnen-Tangentenvierecke, von welchen ein Paar Gegenseiten sich im Pole der festen Sehne schneiden, während der Schnittpunkt der beiden andern Gegenseiten auf einem zur festen Sehne senkrechten Durchmesser der Kreise M fortrückt.

Hieraus folgt, dass die Schnitte von

Digitized by Google

$(A_1B_1,\ B_1C_1)$	$(B_1C_1,\ C_1D_1)$	$(C_1D_1,\ A_1D_1)$	$(A_1D_1,\ A_1B_1)$
$(A\ D,\ A_1D_1)$	$(A_1D_1,\ B\ C)$	$(B_1C_1,\ B\ C)$	$(A\ D,\ B_1C_1)$
$(A\ D,\ B\ C)$	$(A\ B,\ B\ C)$	$(B\ C,\ C\ D)$	$(C\ D,\ A\ D)$
$(D\ C,\ D_1C_1)$	$(D\ C,\ A_1B_1)$	$(A_1B_1,\ A\ B)$	$(A\ B,\ D_1C_1)$

etc. wiederum auf einem Kreise liegen.

Mittelst dieser Betrachtung können wir sämtliche bicentrischen Vierecke in Classen teilen.

Wir ziehen in einem Kreise M eine beliebige Sehne und errichten in jedem ihrer Punkte eine zu ihr senkrechte Sehne.

Auf bekannte Weise können wir dann ein Sehnen-Tangentenviereck construiren. Jedes so erhaltene Tangentenviereck hat die Eigenschaft, dass zwei seiner Seiten sich im Pole der festen Sehne schneiden, während der Schnittpunkt der beiden übrigen Seiten auf einem zur festen Sehne senkrechten Durchmesser fortrückt.

An diese Untersuchungen reihen wir einige Constructionsaufgaben:

Von einem Sehnen-Tangentenviereck ist gegeben

1) der Diagonalschnittpunkt, die durch ihn gehende Berührsehne und der ihm eingeschriebene Kreis.

2) der Schnittpunkt zweier gegenüberliegender Seiten, der Berührungspunkt auf einer derselben und der Diagonalschnittpunkt x.

3) die Schnittpunkte zweier gegenüberliegender Seiten und der Berührpunkt auf einer Seite.

4) 3 Berührpunkte.

Rein Euklidische Untersuchungen über das Sehnen-Tangentenviereck.

Jedes Sehnen-Tangentenviereck liefert ein Berührungs-Sehnenviereck, das der Hälfte des Rechtecks seiner Diagonalen ist.

Ziehen wir die Diagonalen a_1c_1 und b_1d_1, so gehen dieselben durch X und stehen in x auf einander senkrecht.

Nun ist

$$1)\quad a_1x \,.\, b_1x = 2\Delta a_1xb_1$$

$$2)\quad a_1x_1 \,.\, d_1x = 2\Delta a_1xd_1$$

$$3)\quad c_1x_1 \,.\, d_1x = 2\,\Delta c_1xd_1$$
$$4)\quad c_1x_1 \,.\, b_1x = 2\Delta b_1xc_1$$

Durch Addition von 1) und 2) erhält man:

$$\text{I.}\quad a_1x \,.\, b_1d_1 = 2(\Delta a_1xb_1 + \Delta a_1xd_1) = 2\,\Delta a_1b_1d_1$$
„ „ „ 3 und 4 „
$$\text{II.}\quad c_1x \,.\, b_1d_1 = 2(\Delta c_1xd_1 + \Delta b_1xc_1) = 2\Delta b_1c_1d_1$$

$$\text{I.} + \text{II.}\qquad a_1c_1 \,.\, b_1d_1 = 2a_1b_1c_1d_1$$

Oder

$$b_1d_1 \,.\, a_1x = 2\Delta a_1b_1d_1$$
$$b_1d_1 \,.\, c_1x = 2\Delta b_1c_1d_1$$

folglich

$$b_1d_1 \,.\, a_1c_1 = 2 \text{ Viereck } a_1b_1c_1d_1$$

d. h. das Product der Berührsehnen eines Sehnen-Tangentenvierecks ist gleich dem doppelten Inhalt des Berührungspunktenvierecks.

Es folgt ferner sofort:

Verbindet man den Mittelpunkt des einem Sehnen-Tangentenvierecke eingeschriebenen Kreises mit den Berührpunkten, so erhält man 4 Sehnenvierecke, von denen je zwei gegenüberliegende einander ähnlich sind.

Aus dieser Aehnlichkeit folgt:

$$a_1B : \rho = \rho : d_1D$$
$$\rho^2 = a_1B \,.\, d_1D.$$

Diese ähnlichen Sehnenvierecke haben demnach noch die weitere Eigenschaft, dass das Rechteck aus nicht homologen Seiten dem Quadrate des Radius gleich ist; ferner sind sie auch Sehnen-Tangentenvierecke; daher der Satz:

In jedem Sehnen-Tangentenvierecke liefern die Verbindungslinien des eingeschriebenen Kreismittelpunktes mit den Berührungspunkten 4 Sehnen-Tangentenvierecke, von denen je zwei gegenüberliegende ähnlich sind, und aus denen das ganze Sehnen-Tangentenviereck sich zusammensetzt.

In jedem Sehnen-Tangentenviereck berührt der eingeschriebene Kreis zwei gegenüberliegende Seiten derart, dass das Rechteck der an der nämlichen Diagonale liegenden durch den Kreis auf gegenüberliegenden Seiten gemachten Abschnitte dem Quadrate des Radius inhaltsgleich ist.

Aus

Digitized by Google

$$\varrho^2 = a_1B \,.\, d_1D$$

und analog

$$\varrho^2 = a_1A \,.\, c_1C$$

folgt

$$a_1B : a_1A = c_1C : d_1D$$

d. h. Die Abschnitte, welche der einem Sehnen-Tangentenvierecke eingeschriebene Kreis auf gegenüberliegenden Seiten macht, stehen in Proportion.

Gehen wir auf das Berührungssehnenviereck zurück, so finden wir noch eine Eigenschaft, die später verwertet werden kann.

Es ist im Dreieck d_1a_1x der Winkel

$$\text{Wkl. } d_1a_1x = \frac{B}{2}$$

$$\text{Wkl. } Ma_1b_1 = \frac{B}{2}.$$

Daher der Satz:

In dem Berührungssehnenviereck, das wir auch Polarenviereck des Sehnen-Tangentenvierecks heissen könnten, sind dessen Diagonalen und die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Kreismittelpunkte, welche in derselben Ecke zusammenstossen, gegen die Berührsehne, mit welchen sie einen Punkt gemeinschaftlich haben, gleich geneigt. Oder: Die Winkelhalbirende des von einer Diagonale und einem Radius, welche sich in derselben Ecke treffen, gebildeten Winkels, halbirt auch den Winkel des Polarenvierecks an dieser Ecke.

Hieraus folgt die Aehnlichkeit der Dreiecke

$$a_1Mp \quad \text{und} \quad a_1d_1x$$

Es verhält sich daher

$$a_1d_1 : a_1x = \varrho : \frac{a_1b_1}{2}$$

$$a_1x = \frac{a_1b_1 \,.\, a_1d_1}{2\varrho}$$

d. h. der Diagonaldurchschnitt x teilt die Berührsehne gegenüberliegender Berührpunkte des Sehnen-Tangentenvierecks in Abschnitte, von denen jeder die 4 Proportionale zu dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises und den beiden ihm anliegenden Berührsehnen ist.

Man könnte nun vermuten, dass die Winkelhalbirenden des Polarenvierecks sich in einem Punkte von MX träfen.

Digitized by Google

Würde dies z. B. von den Winkelhalbirenden bei a_1 und b_1 der Fall sein, so bestänaen die Proportionen, wenn r Schnittpunkt auf MX ist

$$\varrho : a_1x - Mr : rX$$

analog

$$\varrho : b_1x = Mr : rX$$

d. h.

$$\varrho : a_1x = \varrho : b_1x$$

d. h.

$$a_1x = b_1x$$

Dies würde voraussetzen, dass das Dreieck a_1xb_1 ein gleichschenkliges wäre, was aber nicht der Fall ist, da

$$\text{Wkl. } xa_1b_1 = \frac{A}{2}$$

und

$$\text{Wkl. } xb_1a_1 = 90^0 - \frac{A}{2}.$$

Aus der Gleichheit beider Winkel folgt

$$\text{Wkl. } A = 90^0.$$

Daher erhalten wir hieraus den neuen Satz:

In jedem Sehnen-Tangentenviereck, in welchem eine Diagonale ein Durchmesser des ihm umschriebenen Kreises ist, bilden die Berührungspunkte ein Sehnenviereck, welches zugleich Tangentenviereck ist, und für welches der Mittelpunkt des ihm eingeschriebenen Kreises mit dem Halbirungspunkte der Strecke MX zusammenfällt (dass auch die Halbirungslinien der Winkel bei d_1 und c_1 sich in demselben Punkte treffen müssen, ergiebt sich auf dieselbe Weise).

Ganz analog folgt, dass $d_1x = c_1x$ ist unter der Voraussetzung

$$\text{Wkl. } A = 90^0.$$

Hieraus folgt aber zugleich, dass die Dreiecke d_1xc_1 und a_1xb_1 gleichschenklig rechtwinklige sein müssen, und die Winkelhalbirenden von a_1, b_1, c_1, d_1 in einem Punkte von MX sich schneiden; denn es ist

$$\frac{a_1x}{d_1x} = \frac{c_1x}{b_1x}$$

oder

$$\frac{a_1x : \varrho}{d_1x : \varrho} = \frac{c_1x : \varrho}{b_1x : \varrho}$$

$$\frac{xr : rm}{xr_1 : r_1m} = \frac{xr_1 : r_1m}{xr : rm}$$

oder

$$\frac{xr}{rm} = \frac{xr_1}{r_1 m}$$

d. h. der Punkt r und r_1 müssen zusammenfallen.

D. h. Die Berührungssehnen eines Sehnen-Tangenvierecks, welches einen rechten Winkel enthält, bilden selbst wieder ein Sehnen-Tangentenviereck.

Wir wenden uns nun zu einer andern Figur, die wir aus dem gegebenen Sehnen-Tangentenviereck erhalten, wenn wir dessen Aussenwinkel halbiren. Dieselbe ist von ganz besonderem Interesse für unser gegebenes Viereck, weil wir durch dasselbe vielfache Eigenschaften wieder finden werden, die sich nicht auf dem gewöhnlichen Wege so einfach ergeben.

Die Halbirungslinien der Aussenwinkel des gegebenen Vierecks bilden selbst wieder ein Sehnenviereck, dessen Seiten zu den Seiten des Polarvierecks parallel sind.

Diese Eigenschaft ergiebt sich sofort aus der Construction.

Wir bezeichnen die Ecken des neuen Sehnenvierecks mit $a_2b_2c_2d_2$

Von Herrn Consentius wurde bereits nachgewiesen, dass dieses Viereck und alle analog erhaltenen dem Polarvierecke ähnlich sind. Von einer Recapitulation des Beweises, der sich sofort ergiebt, sehe ich hier ab.

Da nun die Seiten des Vierecks entsprechend parallel sind und die Vierecke $a_2b_2c_2d_2$ und $a_1b_1c_1d_1$ selbst ähnlich sind, müssen die Verbindungslinien analoger Ecken beider Vierecke durch einen Punkt, den Aehnlichkeitspunkt, laufen.

Ferner können alle Eigenschaften des einen auf das andere direct übertragen werden.

Vom Vierecke $a_2b_2c_2d_2$ gilt:

1) Die Diagonalen stehen auf einander senkrecht.

2) Alle Kreise, welche die Seiten zu Durchmessern haben, schneiden sich in einem Punkte, dem Diagonalschnittpunkte.

Es lässt sich nun einfach nachweisen, dass der Diagonalschnittpunkt dieses Vierecks und der Mittelpunkt des dem Vierecke $ABCD$ eingeschriebenen Kreises ein und derselbe ist; denn ziehen wir d_2M und c_2M, so folgt, dass

$$\text{Wkl. } d_2Mc_2$$

ein Rechter ist (nach dem vorhergehenden Lehrsatze), weil

$$Md_2c_2 = \frac{A}{2}$$

und

$$Mc_2d_2 = 90^0 - \frac{A}{2};$$

mithin

$$\text{Wkl. } d_2Mc_2 = 90^0.$$

Es müssen also die Linien a_2M und c_2M notwendig zusammenfallen, weil ja daraus sich auch ergiebt, dass

$$\text{Wkl. } d_2Ma_2 + b_2Ma_2 = 2\text{R}.$$

Dieser Lehrsatz lässt nun einige sehr interessante Folgerungen zu:

1) Die Diagonalen des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$ halbiren den Diagonalen des Vierecks $a_1b_1c_1d_1$.

Es ist $a_2c_2 \parallel a_1c_1$; b_2d_2 geht aber durch M und steht auf a_2c_2 mithin auch auf a_1c_1 senkrecht; es muss daher a_1c_1 durch b_2d_2 halbirt werden.

2) Die Diagonalen schneiden den Kreis in den Eckpunkten eines Quadrates, von dessen Beziehungen zu den übrigen Polarsehnenvierecken später die Rede sein wird.

Den Untersuchungen der Vierecke hinsichtlich ihres Aehnlichkeitspunktes geben ebenfalls zu einigen interessanten Sätzen Anlass.

Denken wir uns den Punkt x, — O soll der Aehnlichkeitspunkt künftig heissen, — dem Polarviereck $a_1b_1c_1d_1$ angehörig, so entspricht ihm im Vierecke $a_2b_2c_2d_2$ der Punkt M, und diesem als dem Viereck $a_1b_1c_1d_1$ angehörig entspricht in $a_2b_2c_2d_2$ der Mittelpunkt jenes Kreises, der durch die 4 Ecken a_2, b_2, c_2, d_2 geht. Derselbe sei M_2.

Die Punkte M_2, M, x, O müssen demzufolge auf einer Geraden liegen, auf der noch alle jene Punkte gelegen sind, welche diesen Punkten in jenen Vierecken entsprechen, welche man erhält, wenn man von $a_2b_2c_2d_2$ in derselben Weise Vierecke construirt, wie dieses aus $a_1b_1c_1d_1$ hervorgegangen ist.

Die Gerade M_2MXO halbirt die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Diagonalen a_2c_2 und b_2d_2, a_1c_1 und b_1d_1; denn die Mittelpunkte von a_2c_2 und b_2d_2, die Punkte M_2 und M, bilden ein Rechteck, von welchem MM_2 die Diagonale ist.

Der Kreis, welcher dem Viereck $ABCD$ umschrieben ist, schneidet die Seiten des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$ ausser in den Punkten A, B, C, D

Digitized by Google

noch in 4 andern Punkten, die sowol hinsichtlich ihrer Lage in Bezug aufeinander wie auch in Bezug auf die Seiten des Viercks $a_2b_2c_2d_2$ von ganz besonderem Interesse sind.

In a_2 treffen sich die Seiten a_2b_2 und a_2d_2, welche vom Kreis um $ABCD$ in den Punkten Q und T geschnitten werden mögen.

Es ist vermöge der constanten Potenz

$$a_2Q \,.\, a_2B = a_2T \,.\, a_2A$$

oder

$$a_2Q : a_2T = a_2A : a_2B$$

Da die beiden Dreiecke Aa_2B und Ta_2Q den Winkel bei a_2 ausserdem noch gemeinschaftlich haben, so folgt, dass dieselben einander ähnlich sind.

Es ist demnach

$$\text{Wkl. } TQa_2 = a_2AB = 90^0 - \frac{A}{2}.$$

Auf dieselbe Weise lässt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke b_2BC und b_2QR nachweisen, weshalb die andere Gleichung

$$\text{Wkl. } b_2QR = BCb_2 = \frac{A}{2}$$

besteht. Durch Addition resultirt

$$\text{Wkl. } TQa_2 + b_2QR = 90^0$$

d. h.

$$\text{Wkl. } TQR = 90^0.$$

Da nun Wkl. $Ma_2b_2 = \frac{A}{2}$ ist, so folgt weiter, dass die Sehne QT auf der Diagonale a_2c_2 senkrecht steht. Wir erhalten somit den Lehrsatz:

„Halbirt man die Aussenwinkel eines Sehnen-Tangentenvierecks, „so bilden die Halbirungslinien ein neues Sehnenviereck, dessen „Seiten von dem dem Viereck $ABCD$ umschriebenen Kreise in 4 „Punkten getroffen werden, die die Ecken eines Rechtecks bilden. „Die Seiten dieses Rechtecks sind den Berührsehnen, welche Punkte „gegenüberliegender Viereckseiten verbinden, parallel."

„Da das Rechteck dem Kreise M_1, welcher dem Viereck $ABCD$ „umschrieben ist, einbeschrieben ist, so schneiden sich seine Diago„nalen im Mittelpunkte dieses Kreises (M_1)."

Verbinden wir weiter die Ecke B mit M und verlängern BM bis zum Schnittpunkte mit dem Kreise M_1, so geht diese Verbindungs-

linie durch die der Ecke Q des Rechtecks gegenüberliegende Ecke S; denn die Linie QS ist ein Durchmesser und Wkl. QBS ein Rechter, weil er über dem Durchmesser QS steht. Errichten wir nun in B auf a_2b_2 ein Lot, so muss dieses notwendig durch den Kreismittelpunkt M gehen, weil es den Winkel bei B halbirt. Daher der Satz:

Verbindet man die Ecken eines bicentrischen Vierecks mit dem Mittelpunkte des ihm einbeschriebenen Kreises, und verlängert man diese Verbindungslinien bis zum Schnitte des dem Sehnen-Tangentenvierecke umschriebenen Kreises, so bilden die 4 Schnittpunkte die Ecken eines Rechteckes. Oder:

Die Ecke eines bicentrischen Vierecks, der Mittelpunkt des ihm einbeschriebenen Kreises und eine Ecke des Rechtecks $QRST$ liegen auf einer Geraden.

Ferner lässt sich leicht der folgende Satz ableiten:

Die Diagonalen dieses Rechtecks erscheinen vom Mittelpunkte M aus unter demselben Winkel wie die Diagonalen des Sehnen-Tangentenvierecks von demselben Punkte aus.

Es ist nun leicht einzusehen, dass die Ecken des Rechtecks mit den Mittelpunkten der Seiten des Sehnenvierecks zusammenfallen; denn die Seiten des Rechtecks sind $\parallel$ zu den Diagonalen a_2c_2 und b_2d_2 und gleich der Hälfte derselben; infolge hievon ist

$$MQ = a_2Q = b_2Q.$$

Es halbirt somit jede Rechtecksseite die Diagonalabschnitte der Diagonalen des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$.

Sei nun P_2 der Mittelpunkt der Diagonale a_2c_2 und Q_2 der Mittelpunkt von b_2d_2; ziehen wir nun P_2R und Q_2T, so besteht die Gleichung

$$P_2R = Q_2T$$

denn P_2R gleich und parallel $\frac{1}{2}a_2b_2$ und Q_2T ist ebenfalls gleich und parallel a_2b_2; folglich ist das Viereck

$$TP_2RQ_2$$

ein Parallelogramm; der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Parallelogrammes ist der Punkt M_1. Es folgt aus dieser Betrachtung, dass die Mittelpunkte der Diagonalen a_2c_2, b_2d_2 und der Mittelpunkt des dem Sehnen-Tangentenvierecke umschriebenen Kreises in einer geraden Linie liegen.

Digitized by Google

Verbindet man nun M_2 mit P_2 und Q_2, so entsteht das Rechteck $MP_2M_2Q_2$, dessen eine Diagonale P_2Q_2, während die andere MM_2 ist. Es ist also M_1 in der Mitte der Strecke MM_2 gelegen.

Wir folgern hieraus den bereits in früheren Betrachtungen abgeleiteten Lehrsatz:

„Der Aehnlichkeitspunkt O, die Kreismittelpunkte M, M_1, M_2 liegen auf einer Geraden, und zwar so, dass der Punkt M_1 die Strecke MM_2 halbirt."

Aus dem Parallelogramm TP_2RQ_2 folgt weiter:

Die Mittelpunkte der Diagonalen a_2c_2 und b_2d_2 sind von den Mittelpunkten je zweier gegenüberliegender entsprechender Seiten des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$ gleich weit entfernt. Es ist

$$P_2Q = Q_2S$$

$$P_2T = Q_2R \text{ etc.}$$

Dieselben Betrachtungen können wir auf das Sehnenviereck $a_1b_1c_1d_1$ übertragen.

Die Mittelpunkte der Seiten dieses Vierecks bilden die Ecken eines Rechtecks, dessen Diagonalschnittpunkt mit dem Halbirungspunkt der Strecke MX zusammenfällt.

Da

$$MQ = Qb_2$$

und

$$QR \perp b_2d_2,$$

so halbirt QR den Winkel DQb_2, mithin auch den Bogen BRD. Das Lot, welches man von M_1 auf die Diagonale BD des Sehnen-Tangentenvierecks fällt, halbirt ebenfalls den Bogen BRD; es fällt somit dieses Lot mit der Diagonale M_1R des Rechtecks zusammen. Wir erhalten daher den Satz:

Die Diagonalen des Rechtecks halbiren die Diagonalen des Sehnen-Tangentenvierecks und stehen auf denselben senkrecht. Oder:

Der Mittelpunkt des dem bicentrischen Viereck umschriebenen Kreises, der Mittelpunkt einer seiner Diagonalen und zwei gegenüberliegende Ecken des Rechtecks $QRST$ liegen auf einer Geraden.

Wir wollen nun noch beweisen, dass auch die Mittelpunkte der Diagonalen des Sehnen-Tangentenvierecks und der Kreismittelpunkt M in einer Geraden liegen. Der Mittelpunkt von BD sei y und jener von AC sei u.

Digitized by Google

Wir haben bewiesen, dass die Dreiecke

$$QMS \text{ und } MBD$$

ähnlich sind, woraus folgt, dass auch die beiden Dreiecke

$$M_1MS \text{ und } yMD$$

ähnlich sein müssen. Die Aehnlichkeit derselben führt zu der Gleichung

$$\text{Wkl. } SM_1M = \text{Wkl. } DyM;$$

ferner ist das Viereck M_1yxu ein Sehnenviereck. Ziehen wir in demselben die Diagonalen yu und M_1x, so müssen sie sich in M schneiden; denn die Winkel SM_1M und uyx sind gleich, weil sie auf demselben Bogen stehen. Es muss demnach uy durch den Kreismittelpunkt M gehen. Wir erhalten daher den Satz:

In jedem Sehnen-Tangentenvierecke liegen die Mittelpunkte seiner 3 Diagonalen und der Mittelpunkt des ihm einbeschriebenen Kreises auf einer Geraden.

Metrische Beziehungen im bicentrischen Viereck.

Wir gehen von einer Gleichung für das Quadrat des dem Viereck einbeschriebenen Kreises vom Radius ϱ aus. Wir fanden

$$\varrho^2 = a_1B \,.\, d_1D$$
$$\varrho^2 = a_1A \,.\, b_1C.$$

Hieraus folgt die Proportion

$$a_1B : a_1A = b_1C : d_1D = c_1C : c_1D$$
$$AB : DC = a_1B : b_1C$$
$$AB + DC : DC = a_1B + b_1C : b_1C$$
$$AB + DC : DC = BC : b_1C$$

d. h. $b_1C = \dfrac{BC \,.\, DC}{AB + DC}$; ist nun s der Umfang von $ABCD$ und $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, so erhält die vorstehende Gleichung die Form

$$b_1C = \frac{2bc}{s};$$

analog ergiebt sich

$$a_1A = \frac{2ad}{s}$$

$$b_1B = \frac{2ab}{s}$$

$$c_1D = \frac{2cd}{s}$$

Digitized by Google

Indem wir die Werte aus diesen Gleichungen in

$$\varrho^2 = a_1 B . d_1 D$$

eintragen, erhalten wir

$$\varrho^2 = \frac{4AB . BC . CD . DA}{s^2}$$

$$\varrho = \frac{2}{s}\sqrt{AB . BC . CD . DA}$$

Bekanntlich ist aber der Inhalt eines Sehnen-Tangentenvierecks gegeben durch

$$I = \sqrt{AB . BC . CD . AA};$$

mithin

$$\varrho = \frac{2I}{s}$$

oder, indem wir I daraus berechnen, erhalten wir eine Gleichung,

$$I = \frac{\varrho s}{2}$$

die auch direct erhalten werden kann.

Bezeichnen wir in dem Sehnen-Tangentenvierecke die Berührsehnen mit e_1 und f_1, so gilt der leicht zu beweisende Satz:

Das Product der Berührsehnen ist = dem doppelten Inhalt des Sehnenvierecks, dessen Inhalt = I_1 sei

$$e_1 f_1 = 2I_1 = 2\varrho^2(\sin A + \sin B)$$

Bezeichnen wir mit a_1, b_1, c_1, d_1 die Grössen

$$a_1 b_1 = a_1 , \; b_1 c_1 = b_1 ; \quad c_1 d_1 = c_1 , \; d_1 a_1 = d;$$

dann bestehen die Gleichungen

$$a_1 = 2\varrho \cos\frac{B}{2} ; \quad c_1 = 2\varrho \sin\frac{B}{2}$$

$$b_1 = 2\varrho \sin\frac{A}{2} ; \quad d_1 = 2\varrho \cos\frac{A}{2}$$

Für die Diagonalen dieses Vierecks resultirt sofort

$$a_1 c_1 = e_1 = 2\varrho \cos\frac{A-B}{2}$$

$$b_1 d_1 = f_1 = 2\varrho \sin\frac{A+B}{2}$$

Digitized by Google

Wir wenden uns zur Betrachtung jenes Sehnenvierecks $a_2b_2c_2d_2$, dessen Seiten auf den Winkelhalbirenden des Sehnen-Tangentenvierecks senkrecht stehen.

Zunächst verweisen wir auf den Lehrsatz, dass dessen Diagonalen durch den Kreismittelpunkt gehen und auf einander senkrecht stehen müssen. Dieselben schneiden demnach den Kreis um M in den Punkten eines Quadrates, dessen Inhalt $= 2\varrho^2$ ist.

Nun fanden wir für das Berührungssehnenviereck $a_1b_1c_1d_1$

$$a_1b_1c_1d_1 = 2\varrho^2(\sin A + \sin B),$$

woraus folgt, dass $a_1b_1c_1d_1$ zu diesem Quadrate in dem Verhältnisse

$$\sin A + \sin B : 1$$

steht.

Bezeichnen wir den Radius des dem Sehnenviereck $a_2b_2c_2d_2$ umschriebenen Kreises mit R und den Mittelpunkt dieses Kreises mit M_2. Fällen wir nun von M_2 ein Lot auf a_2c_2 und verbinden a_2 mit M_2, dann ergiebt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck M_2a_2P

$$M_2P = R\sin\frac{A-B}{2}$$

und analog aus dem rechtwinkligen M_2b_2Q

$$M_2Q = R\cos\frac{A+B}{2}$$

Da aber

$$MM_2^2 = M_2P^2 + M_2Q^2$$

ist, so folgt

$$MM_2^2 = R^2\left(\sin^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= R^2(1 - \sin A\sin B)$$

$$MM_2 = R\sqrt{1 - \sin A\sin B}$$

Wiewol dieser Ausdruck schon abgeleitet wurde, allerdings nicht in der Abhängigkeit von dem Radius R, so glaubte ich ihn noch einmal erwähnen zu müssen, da die Herleitung an ein anderes Gebilde anknüpft.

Dem Viereck $a_2b_2c_2d_2$ entspricht das ähnliche Viereck $a_1b_1c_1d_1$. Der in letzterem zum Punkte M_2 homologe Punkt ist der Punkt M; dem Punkte M aber entspricht, insofern er dem Viereck $a_2b_2c_2d_2$ angehörig angesehen wird, der Punkt x im Viereck $a_1b_1c_1d_1$. Aus dieser Betrachtung folgt daher unmittelbar

Digitized by Google

$$!Mx = \varrho\sqrt{1-\sin A \sin B}.$$

Der Punkt M teilt somit die Strecke M_2x in dem Verhältnisse $R:\varrho$.

Wir verbinden nun den Aehnlichkeitspunkt der beiden Vierecke $a_2b_2c_2d_2$ und $a_1b_1c_1d_1$, den wir mit Q bezeichneten, mit einer Ecke eines dieser Vierecke; diese Verbindungslinie muss dann auch durch die homologe Ecke des andern Vierecks gehen. Wir erhalten die Gleichungen

$$OB_1 : OB_2 = \varrho : R$$
$$Ox : OM = \varrho : R$$

mit denen wir die beiden andern verbinden

$$MM_2 : Mx = R : \varrho$$
$$Mx : MM_2 = \varrho : R$$

folglich

$$Mx : MM_2 = Ox : OM$$

d. h. der Punkt M teilt die Strecke xM_2 in demselben Verhältniss wie der Punkt O die Strecke Mx. Gleichzeitig folgt aber weiter aus der Proportion

$$Mx : Ox = MM_2 : OM$$

d. h. der Punkt x teilt die Strecke OM in demselben Verhältniss, wie der Punkt M die Strecke OM_2. Diese Eigenschaft war direct einzusehen, weil ja der Punkt x im Viereck $a_1b_1c_1d_1$ dem Punkt M im Viereck $a_2b_2c_2d_2$ entspricht.

Wir wollen nun einige Beziehungen zwischen den Radien der hier in Betracht kommenden Kreise ableiten.

Wir bezeichneten den Radius des Kreises M_2 mit R, jenen des Kreises M mit ϱ; der Radius des Kreises M_1 sei r.

Zunächst ist

$$2r = \sqrt{IQ^2 + QR^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b_2d_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_2c_2}{2}\right)^2}$$

$$b_2d_2 = 2R\sin\frac{A+B}{2}; \quad a_2c_2 = 2R\cos\frac{A-B}{2};$$

$$2r = \sqrt{R^2\left(\sin^2\frac{A+B}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2}\right)} = R\sqrt{1+\sin A\sin B}$$

$$r = \frac{R}{2}\sqrt{1+\sin A\sin B}$$

Aus dem Dreieck MQB folgt weiter, da Wkl. MQB = Wkl. A ist.

$$MQ \sin A = MB$$

$$a_2 b_2 \sin A = 2MB$$

$$2R \cos \frac{B}{2} \sin A = 2 \frac{\varrho}{\sin \frac{B}{2}}$$

oder

$$2\varrho = R \sin A \sin B$$

Wir sind somit zu den 3 Gleichungen gelangt:

$$2r = R\sqrt{1 + \sin A \sin B}$$

$$2\varrho = R \sin A \sin B,$$

aus denen sich ergibt

$$r = \varrho \frac{\sqrt{1 + \sin A \sin B}}{\sin A \sin B}$$

Nun lässt sich auch eine sehr einfache Relation zwischen den Inhalten der 3 Vierecke

$$a_2 b_2 c_2 d_2,\ ABCD \text{ und } a_1 b_1 c_1 d_1$$

aufstellen:

Der Inhalt des Vierecks $a_2 b_2 c_2 d_2$ ist, wie früher gefunden wurde,

$$a_2 b_2 c_2 d_2 = 2R^2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

Der Inhalt des Vierecks $ABCD$ ist

$$\frac{4\varrho^2}{\sin A \sin B} \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = R^2 \sin A \sin B \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

Der Inhalt des Vierecks $a_1 b_1 c_1 d_1$

$$a_1 b_1 c_1 d_1 = 2\varrho^2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$= \frac{R^2}{2} \sin^2 A \sin^2 B \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

Setzen wir die 3 Inhalte in Proportion und bezeichnen wir dieselben mit I_1, I_2, I_3, so resultirt:

$$I_1 : I_2 : I_3 = 1 : \tfrac{1}{2} \sin A \sin B : \tfrac{1}{4} \sin^2 A \sin^2 B$$

d. h. die Inhalte aller dieser und ähnlich gebildeter Sehnenvierecke stehen in geometrischer Proportion und man findet den Inhalt eines jeden derselben, wenn man den Inhalt von $a_2 b_2 c_2 d_2$ mit einer Potenz von $\sin A \sin B$ multiplicirt.

Digitized by Google

Wir gelangen in unserer Betrachtung zu dem rechnerischen Nachweis, dass der Punkt M_1 die Strecke MM_2 halbirt.

Wir finden aus dem Dreieck M_1M_2Q, dass

$$M_1M_2 = \frac{R}{2}\sqrt{1 - \sin A \sin B}$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem früher gefundenen

$$MM_2 = R\sqrt{1 - \sin A \sin B},$$

so resultirt auf's neue das bereits geometrisch nachgewiesene Resultat, dass

$$M_1M_2 = \tfrac{1}{2} MM_2$$

Wir gehen nun zur Ableitung einiger Relationen zwischen den Radien der dem Sehnen-Tangentenviereck angeschriebenen Kreise über.

Die Mittelpunkte dieser Kreise sind offenbar die Ecken des Vierecks $a_2b_2c_2d_2$.

Die Kreise haben die Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ϱ_d.

Nun ist

$$MD \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = d_2D$$

$$MD \cos \frac{B}{2} = \varrho,$$

folglich

$$\frac{\operatorname{cotg} \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = d_2D$$

$$d_2D \sin \frac{B}{2} = \varrho_d$$

also

$$\varrho_d = \varrho \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{A}{2};$$

analog

$$\varrho_a = \varrho \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

$$\varrho_b = \varrho \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

$$\varrho_c = \varrho \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

Digitized by Google

Hieraus ergeben sich einige Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} 1)\ & \varrho_a \cdot \varrho_c = \varrho^2 \\ 2)\ & \varrho_b \cdot \varrho_d = \varrho^2 \end{aligned}\right\} \quad \varrho_a : \varrho_b = \varrho_d : \varrho_c$$

Nun war

$$\varrho = \frac{2I}{s}$$

mithin

$$I = \frac{s}{2}\sqrt{\varrho_a \varrho_c} = \frac{s}{2}\sqrt{\varrho_b \varrho_d};$$

also auch

$$I = \frac{s}{2}\sqrt[4]{\varrho_a \varrho_b \varrho_c \varrho_d}$$

Wir schliessen unsere Betrachtung in der Hoffnung, dass diese reingeometrischen Untersuchungen dem Fachschulmanne eine reiche Ausbeute von Lehrsätzen liefern, die dem Schüler neue Liebe zu dem geometrischen Studium einflössen.

Traunstein, im Juni 1884.

Digitized by Google

XVIII.

Trigonometrische Sätze.

Von

Herrn **A. H. Anglin**, M. A., LL. B., F. R. S.
in Edinburg.

Der Satz, dass

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 + \ldots \operatorname{arc\,tg} a_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots}{1 - c_2 + c_4 - \ldots} \qquad (1)$$

wo a_1, a_2 ... a_n die Wurzeln der Gleichung

$$x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \ldots c_n = 0$$

sind, soll bewiesen und dadurch die wolbekannte Formel

$$\operatorname{tg}(a_1 + a_2 + \ldots \alpha_n) = \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots}{1 - c_2 + c_4 - \ldots} \qquad (2)$$

wo c_r die Summe der Producte zu r Factoren (jeden einmal genommen) von $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, ... $\operatorname{tg}\alpha_n$ bezeichnet, ohne Anwendung des Moivre'schen Satzes begründet werden.

1. Da

$$\operatorname{arc\,tg} A + \operatorname{arc\,tg} B = \operatorname{arc\,tg} \frac{A + B}{1 - AB}$$

ist, so haben wir:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{p_1}{1 - p_2}$$

wo a_1, a_2 die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - p_1 x + p_2 = 0$$

sind. Addirt man auf beiden Seiten $\operatorname{arc\,tg} a_3$,

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 + \operatorname{arc\,tg} a_3 = \operatorname{arc\,tg} \frac{(p_1 + a_3) - p_2 a_3}{1 - (p_2 + p_1 a_3)}$$

Aber a_1, a_2, a_3 sind die Wurzeln von

$$(x^2 - p_1 x + p_2)(x - a_3) = 0$$

das ist von

$$x^3 - (p_1 + a_3)x^2 + (p_2 + p_1 a_3)x - p_2 a_3 = 0$$

folglich

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 + \operatorname{arc\,tg} a_3 = \frac{q_1 - q_3}{1 - q_2}$$

wo a_1, a_2, a_3 die Wurzeln von

$$x^3 - q_1 x^2 + q_2 x - q_3 = 0$$

sind. Und wenn wir mit diesem Resultat ebenso verfahren, so finden wir:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \operatorname{arc\,tg} a_2 + \operatorname{arc\,tg} a_3 + \operatorname{arc\,tg} a_4 = \operatorname{arc\,tg} \frac{r_1 - r_3}{1 - r_2 + r_4}$$

wo a_1, a_2, a_3, a_4 die Wurzeln sind von

$$x_4 - r_1 x^3 + r_2 x^2 - r_3 x + r_4 = 0$$

Nehmen wir jetzt die Richtigkeit der Gl. (1) für irgend ein n an. Hier wird es notwendig sein die Fälle zu unterscheiden, wo n gerade und wo n ungerade ist.

(1) Ist n gerade, so ist der letzte Term im Zähler der rechten Seite der Gleichung $(-1)^{\frac{n}{2}-1} c_{n-1}$ und im Nenner $(-1)^{\frac{n}{2}} c_n$. Nach Addition von $\operatorname{arc\,tg} a_{n+1}$ erhält man also:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \ldots \operatorname{arc\,tg} a_{n+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{A}{B}$$

wo

$$A \equiv (c_1 + a_{n+1}) - (c_3 + c_2 a_{n+1}) + (c_5 + c_4 a_{n+1}) - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} c_n a_{n+1}$$

$$B \equiv 1 - (c_2 + c_1 a_{n+1}) + (c_4 + c_3 a_{n+1}) - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} (c_n + c_{n-1} a_{n+1})$$

und zwar sind a_1, a_2, $\ldots$ a_{n+1} die Wurzeln von

$$(x^n - c_1 x^{n-1} + \ldots c_n)(x - a_{n+1}) = 0$$

das ist

$$x^{n+1} - (c_1 + a_{n+1})x^n + \ldots c_n a_{n+1} = 0$$

Demnach, da n gerade ist:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \ldots \operatorname{arc\,tg} a_{n+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{t_1 - t_3 \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} t^{n+1}}{1 - t_2 + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} t_n}$$

Digitized by Google

wo $a_1, a_2 \ldots a_{n+1}$ die Wurzeln sind von

$$x^{n+1} - t_1 x^n + t_2 x^{n-1} - \ldots - t_{n+1} = 0$$

(2) Ist n ungerade, so ist der letzte Term im oben genannten Zähler $(-1)^{\frac{n-1}{2}} c_n$, im Nenner $(-1)^{\frac{n-1}{2}} c_{n-1}$. Verfährt man wie vorher, so findet man:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \ldots \operatorname{arc\,tg} a_{n+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{C}{D}$$

wo

$$C = (c_1 - a_{n+1}) - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} (c_n + c_{n-1} a_{n+1})$$

$$D = 1 - (c_2 + c_1 a_{n+1}) + \ldots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} c_n a_{n+1}$$

und zwar sind $a_1, \ldots a^{n+1}$ die Wurzeln von

$$x^{n+1} - (c_1 + a_{n+1}) x^n + \ldots + c_n a_{n+1} = 0$$

Da n ungerade ist, so folgt:

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \ldots \operatorname{arc\,tg} a_{n+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{t_1 - t_3 + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} t_n}{1 - t_2 + \ldots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} t_{n+1}}$$

wo $a_1, \ldots a_{n+1}$ die Wurzeln sind von

$$x^{n+1} - t_1 x^n + \ldots + t_{n+1} = 0$$

Somit ist der Satz vollständig bewiesen.

Setzt man $a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$, etc. so ergibt sich als Corollar die anfänglich genannte trigonometrische Formel.

2. Folgende Deductionen aus dem vorstehenden allgemeinen Satze sind bemerkenswert.

(1) Ist $a_1 = a_2 = \ldots a_n = x$, so wird

$$n \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{c_1 x - c_3 x^3 + c_5 x^5 - \ldots}{1 - c_2 x^2 + c_4 x^4 - \ldots}$$

wo c_r die Anzahl der Combinationen von r unter n Elementen bezeichnet, mithin

$$c_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ist; und, wenn $x = \operatorname{tg} \Theta$

$$\operatorname{tg} n\Theta = \frac{c_1 \operatorname{tg} \Theta - c_3 \operatorname{tg}^3 \Theta + \ldots}{1 - c_2 \operatorname{tg}^2 \Theta + \ldots}$$

Digitized by Google

(2) Ferner erhält man für $x = 1$:

$$\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4} = \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \dots}{1 - c_2 + c_4 - \dots} \tag{3}$$

das ist $= 0,\ 1,\ \infty,\ -1$, jenachdem

$$n \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3 \pmod 4$$

daher

$$c_1 - c_3 + \dots - c_{4m-1} = 0 \quad (n = 4m)$$
$$1 - c_2 + \dots - c_{4m+2} = 0 \quad (n = 4m+2)$$

3. Ein zweiter Satz ähnlicher Natur mit dem vorhergehenden lässt sich hier in angemessener Weise geben. Es soll gezeigt werden, dass

$$\operatorname{arc\,tg} a_1 + \dots \operatorname{arc\,tg} a_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{h_1 - h_3 + h_5 - \text{ in inf.}}{1 - h_2 + h_4 - \text{ in inf.}}$$

wo h_r die Summe der homogenen Producte aus je r der Elemente $a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n$, mit Wiederholung, bezeichnet:

Man hat:

$$(1 - a_1x)^{-1}(1 - a_2x)^{-1} \dots (1 - a_nx)^{-1} =$$
$$1 + h_1x + h_2x^2 + \dots + h_rx^r + \dots \text{ in inf.} \tag{4}$$

Setzt man nach einander $x = i$ und $-i$ und dividirt die Differenz beider Gleichungen durch ihre Summe, so kommt:

$$i\frac{h_1 - h_3 + h_5 - \dots \text{ in inf.}}{1 - h_2 + h_4 - \dots \text{ in inf.}} =$$
$$\frac{(1+ia_1)(1+ia_2)\dots(1+ia_n) - (1-ia_1)(1-ia_2)\dots(1-ia_n)}{(1+ia_1)(1+ia_2)\dots(1+ia_n) + (1-ia_1)(1-ia_2)\dots(1-ia_n)}$$

Andrerseits ist

$$(1+a_1x)(1+a_2x) \dots (1+a_nx) = 1 + c_1x + c_2x^2 + \dots c_nx^n$$

wo c_r die Summe jener Producte ohne Wiederholung bezeichnet. Verfährt man mit dieser Gleichung ebenso wie mit Gl. (4), so erscheint zur Rechten derselbe Ausdruck, und es ergibt sich:

$$\frac{h_1 - h_3 + h_5 - \dots}{1 - h_2 + h_4 - \dots} = \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \dots}{1 - c_2 + c_4 - \dots}$$

Substituirt man in den Formeln (1) und (2) den ersten Ausdruck für den letztern, so ergibt sich das Zubeweisende.

Das gleiche Resultat kann man auch auf folgende Art gewinnen. Man hat:

Digitized by Google

$$(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)\ldots(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n)=$$
$$\cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n)$$

Nun ist aber

$$\cos\alpha+i\sin\alpha=\frac{1}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=\frac{\sec\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$$

daher

$$\frac{\sec\alpha_1\sec\alpha_2\ldots\sec\alpha_n}{(1-i\operatorname{tg}\alpha_1)(1-i\operatorname{tg}\alpha_2)\ldots(1-i\operatorname{tg}\alpha_n)}=$$
$$\cos(\alpha_1+\ldots\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\ldots\alpha_n)$$

das ist

$$\sec\alpha_1\sec\alpha_2\ldots\sec\alpha_n\{1-h_2+h_4-\ldots+i(h_1-h_3+h_5-\ldots)\}=$$
$$\cos(\alpha_1+\ldots\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\ldots\alpha_n)$$

mithin einzeln

$$\sin(\alpha_1+\ldots\alpha_n)=\sec\alpha_1\ldots\sec\alpha_n(h_1-h_3+\ldots)$$
$$\cos(\alpha_1+\ldots\alpha_n)=\sec\alpha_1\ldots\sec\alpha_n(1-h_2+\ldots)$$

woraus:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\ldots\alpha_n)=\frac{h_1-h_3+\ldots}{1-h_2+\ldots}$$

4. Setzt man $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=x$, so folgt:

$$n\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}\frac{h_1x-h_3x^3+h_5x^5-\ldots}{1-h_2x^2+h_4x^4-\ldots}$$

wo h_r jetzt die Anzahl der homogenen Producte von je r unter n Elementen mit Wiederholung bezeichnet, das ist

$$h_r=\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$$

Ist $x=\operatorname{tg}\Theta$, so wird

$$\operatorname{tg}n\Theta=\frac{h_1\operatorname{tg}\Theta-h_3\operatorname{tg}^3\Theta+\ldots}{1-h_2\operatorname{tg}^2\Theta+\ldots}$$

Setzt man $x=1$, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4}=\frac{h_1-h_3+\ldots}{1-h_2+\ldots}$$

mit denselben 4 Werten wie in Gl. (3).

5. **Folgende Resultate sind vielleicht in ihrem Zusammenhange mit dem Vorhergehenden bemerkenswert.**

Man hat:

$$\cos n\Theta+i\sin n\Theta=\cos^n\Theta^{\ldots}$$

Digitized by Google

Nach Entwickelung findet man:

$$\cos n\Theta \sec^n\Theta = B; \quad \sin n\Theta \sec^n\Theta = D$$

wo

$$B = 1 - c_2 \operatorname{tg}^2\Theta + c_4 \operatorname{tg}^4\Theta - \ldots$$
$$D = c_1 \operatorname{tg}\Theta - c_3 \operatorname{tg}^3\Theta + c_5 \operatorname{tg}^5\Theta - \ldots$$

letzter Term, jenachdem n gerade oder ungerade, in B $(-1)^{\frac{n}{2}}\operatorname{tg}^n\Theta$ oder $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n\operatorname{tg}^{n-1}\Theta$, in D $n(-1)^{\frac{n}{2}-1}\operatorname{tg}^{n-1}\Theta$ oder $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{tg}^n\Theta$, und

$$c_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Andrerseits ist

$$\cos n\Theta + i\sin n\Theta = (\cos\Theta - i\sin\Theta)^{-n} = \sec^n\Theta(1 - i\operatorname{tg}\Theta)^{-n}$$

Verfährt man wie vorher, so findet man:

$$\cos n\Theta \cos^n\Theta = 1 - h_2 \operatorname{tg}^2\Theta + h_4 \operatorname{tg}^4\Theta - \ldots = A$$
$$\sin n\Theta \cos^n\Theta = h_1 \operatorname{tg}\Theta - h_3 \operatorname{tg}^3\Theta + \ldots = B$$

wo

$$h_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$$

Hieraus folgen die Relationen:

$$AB = \cos^2 n\Theta \tag{5}$$

$$\frac{A}{B} = (\cos\Theta)^{2n} \tag{6}$$

$$CD = \sin^2 n\Theta \tag{7}$$

$$\frac{C}{D} = (\cos\Theta)^{2n} \tag{8}$$

und hieraus wieder:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \text{oder} \quad AD = BC \tag{9}$$

$$AB + CD = 1 \tag{10}$$

$$CD = AB\operatorname{tg}^2 n\Theta$$
$$4ABCD = \sin^2 2n\Theta$$
$$AC = BD\cos^{4n}\Theta.$$

Digitized by Google

XIX.

Neue Relationen innerhalb eines Orthogonalcoefficientensystems.

Von

R. Hoppe.

Die 3.3 Coefficienten einer Orthogonalsubstitution

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \qquad (A)$$

deren Determinante $= +1$ angenommen wird, erfüllen zunächst 6 Gleichungen der Form

$$a^2+b^2+c^2 = 1$$

6 Gleichungen der Form

$$aa_1+bb_1+cc_1 = 0$$

und 9 Gleichungen der Form

$$a = b_1c_2-c_1b_2$$

Aus diesen 22 Relationen gehen jedoch manche weitere hervor, die ziemlich einfach und ausserdem durch Anwendung bemerkenswert sind.

Man findet:

$$\begin{aligned}(b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2 &= (b_1^2+c_1^2)+(b_2^2+c_2^2)+2(b_1c_2-c_1b_2)\\ &= (1-a_1^2)+(1-a_2^2)+2a = 1+a^2+2a\end{aligned}$$

also:

$$(b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2=(1+a)^2 \tag{1}$$

woraus durch Zusammensetzung leicht folgt:

$$(1+a+b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2=(1+a)(1+a+b_1+c_2) \tag{1*}$$

ferner:

$$\begin{aligned}(a_1-b)(c-a_2) &= a_1c+ba_2-bc-a_1a_2\\ &= (b_2+ac_1)+(c_1+ab_2)+(b_1c_1+b_2c_2)+(b_1b_2+c_1c_2)\end{aligned}$$

das ist:

$$(a_1-b)(c-a_2)=(b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{2}$$

Lässt man nun c_1-b_2 durch cyklische Substitution nach beiden Richtungen einmal in $b-a_1$, das andremal in a_2-c übergehen, so erhält man aus Gl. (1):

$$(a+b_1)^2+(b-a_1)^2=(1+c_2)^2$$
$$(c_2+a)^2+(a_2-c)^2=(1+b_1)^2$$

woraus durch Addition:

$$(a_1-b)^2+(c-a_2)^2=2(1-a)(1+a+b_1+c_2) \tag{3}$$

und durch Subtraction:

$$(a_1-b)^2-(c-a_2)^2=2(c_2-b_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{4}$$

Addirt man zu Gl. (3) die mit 2 multiplicirte Gl. (2), so kommt:

$$(a_1-b+c-a_2)^2=2(1-a+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{5}$$

Endlich gibt die halbe Summe der Gl. (3) (4) zu (2) addirt:

$$(a_1-b)(a_1-b+c-a_2)=(1-a-b_1+c_2+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \tag{6}$$

Jede der Gl. (1) bis (6) repräsentirt eine Anzahl Relationen gleicher Form. Erstens können zwei Reihen des Systems (A) ihre Vorzeichen wechseln. Zweitens können 2 Reihen vertauscht werden, indem zugleich eine Reihe ihre Vorzeichen wechselt. Drittens kann jede cyklische Substitution vollzogen werden.

Durch letztere Operation gehen aus jeder Gleichung neun hervor, die sich nie decken und am leichtesten unmittelbar abgelesen werden können, so dass eine besondere Aufführung nicht nötig sein wird.

Aus Gl. (1) gehen durch Vorzeichenwechsel nur zwei Relationen hervor:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}(b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2 &= (1+a)^2\\ (b_1-c_2)^2-(c_1+b_2)^2 &= (1-a^2\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

die sich auch durch zweite Operationen nicht vermehren.

Für Gl. (2) (3) (4) liefert die erste Operation je 4 Relationen:

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b)(c-a_2) &= (b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\ (a_1-b)(c+a_2) &= (b_2-c_1)(1-a-b_1+c_2)\\ (a_1+b)(c-a_2) &= (b_2-c_1)(1-a+b_1-c_2)\\ (a_1+b)(c+a_2) &= (b_2+c_1)(1+a-b_1-c_2)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b)^2+(c-a_2)^2 &= 2(1-a)(1+a+b_1+c_2)\\ (a_1-b)^2+(c+a_2)^2 &= 2(1+a)(1-a-b_1+c_2)\\ (a_1+b)^2+(c-a_2)^2 &= 2(1+a)(1-a+b_1-c_2)\\ (a_1+b)^2+(c+a_2)^2 &= 2(1-a)(1+a-b_1-c_2)\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b)^2-(c-a_2)^2 &= 2(c_2-b_1)(1+a+b_1+c_2)\\ (a_1-b)^2-(c+a_2)^2 &= 2(c_2+b_1)(1-a-b_1+c_2)\\ (a_1+b)^2-(c-a_2)^2 &= 2(-c_2+b_1)(1-a+b_1-c_2)\\ (a_1+b)^2-(c+a_2)^2 &= 2(-c_2-b_1)(1+a-b_1-c_2\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Durch die zweite Operation geht die Hauptdiagonalrichtung ab_1c_2 in die transversale a_2b_1c über. Die dadurch erzeugten Formeln können wegen des letzten Factors die Urformeln nicht decken. Man findet:

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b_2)(\ \ c_2+a) &= (c_1-b)(1+a_2+b_1-c)\\ -(a_1+b_2)(\ \ c_2+a) &= (c_1+b)(1-a_2+b_1+c)\\ (a_1+b_2)(\ \ c_2-a) &= (c_1-b)(1+a_2-b_1+c)\\ (a_1-b_2)(-c_2+a) &= (c_1+b)(1-a_2-b_1-c)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b_2)^2+(c_2+a)^2 &= 2(1-a_2)(1+a_2+b_1-c)\\ (a_1-b_2)^2+(c_2-a)^2 &= 2(1+a_2)(1-a_2-b_1-c)\\ (a_1+b_2)^2+(c_2+a)^2 &= 2(1+a_2)(1-a_2+b_1+c)\\ (a_1+b_2)^2+(c_2-a)^2 &= 2(1-a_2)(1+a_2-b_1+c)\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b_2)^2-(c_2+a)^2 &= 2(-c-b_1)(1+a_2+b_1-c)\\ (a_1-b_2)^2-(c_2-a)^2 &= 2(-c+b_1)(1-a_2-b_1-c)\\ (a_1+b_2)^2-(c_2+a)^2 &= 2(c+b_1)(1-a_2+b_1+c)\\ (a_1+b_2)^2-(c_2-a)^2 &= 2(c-b_2)(1+a_2-b_1+c)\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Für die Gl. (5) und (6) liefert die erste Operation je 8 Relationen:

$$(b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2=(1+a)^2 \qquad (1)$$

woraus durch Zusammensetzung leicht folgt:

$$(1+a+b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2=(1+a)(1+a+b_1+c_2) \qquad (1^*)$$

ferner:

$$\begin{aligned}(a_1-b)(c-a_2) &= a_1c+ba_2-bc-a_1a_2\\ &= (b_2+ac_1)+(c_1+ab_2)+(b_1c_1+b_2c_2)+(b_1b_2+c_1c_2)\end{aligned}$$

das ist:

$$(a_1-b)(c-a_2)=(b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \qquad (2)$$

Lässt man nun c_1-b_2 durch cyklische Substitution nach beiden Richtungen einmal in $b-a_1$, das andremal in a_2-c übergehen, so erhält man aus Gl. (1):

$$\begin{aligned}(a+b_1)^2+(b-a_1)^2&=(1+c_2)^2\\ (c_2+a)^2+(a_2-c)^2&=(1+b_1)^2\end{aligned}$$

woraus durch Addition:

$$(a_1-b)^2+(c-a_2)^2=2(1-a)(1+a+b_1+c_2) \qquad (3)$$

und durch Subtraction:

$$(a_1-b)^2-(c-a_2)^2=2(c_2-b_1)(1+a+b_1+c_2) \qquad (4)$$

Addirt man zu Gl. (3) die mit 2 multiplicirte Gl. (2), so kommt:

$$(a_1-b+c-a_2)^2=2(1-a+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \qquad (5)$$

Endlich gibt die halbe Summe der Gl. (3) (4) zu (2) addirt:

$$(a_1-b)(a_1-b+c-a_2)=(1-a-b_1+c_2+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2) \qquad (6)$$

Jede der Gl. (1) bis (6) repräsentirt eine Anzahl Relationen gleicher Form. Erstens können zwei Reihen des Systems (A) ihre Vorzeichen wechseln. Zweitens können 2 Reihen vertauscht werden, indem zugleich eine Reihe ihre Vorzeichen wechselt. Drittens kann jede cyklische Substitution vollzogen werden.

Durch letztere Operation gehen aus jeder Gleichung neun hervor, die sich nie decken und am leichtesten unmittelbar abgelesen werden können, so dass eine besondere Aufführung nicht nötig sein wird.

Aus Gl. (1) gehen durch Vorzeichenwechsel nur zwei Relationen hervor:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}(b_1+c_2)^2+(c_1-b_2)^2 &= (1+a)^2\\ (b_1-c_2)^2-(c_1+b_2)^2 &= (1-a^2\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

die sich auch durch zweite Operationen nicht vermehren.

Für Gl. (2) (3) (4) liefert die erste Operation je 4 Relationen:

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b)(c-a_2) &= (b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\ (a_1-b)(c+a_2) &= (b_2-c_1)(1-a-b_1+c_2)\\ (a_1+b)(c-a_2) &= (b_2-c_1)(1-a+b_1-c_2)\\ (a_1+b)(c+a_2) &= (b_2+c_1)(1+a-b_1-c_2)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b)^2+(c-a_2)^2 &= 2(1-a)(1+a+b_1+c_2)\\ (a_1-b)^2+(c+a_2)^2 &= 2(1+a)(1-a-b_1+c_2)\\ (a_1+b)^2+(c-a_2)^2 &= 2(1+a)(1-a+b_1-c_2)\\ (a_1+b)^2+(c+a_2)^2 &= 2(1-a)(1+a-b_1-c_2)\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b)^2-(c-a_2)^2 &= 2(c_2-b_1)(1+a+b_1+c_2)\\ (a_1-b)^2-(c+a_2)^2 &= 2(c_2+b_1)(1-a-b_1+c_2)\\ (a_1+b)^2-(c-a_2)^2 &= 2(-c_2+b_1)(1-a+b_1-c_2)\\ (a_1+b)^2-(c+a_2)^2 &= 2(-c_2-b_1)(1+a-b_1-c_2\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Durch die zweite Operation geht die Hauptdiagonalrichtung ab_1c_2 in die transversale a_2b_1c über. Die dadurch erzeugten Formeln können wegen des letzten Factors die Urformeln nicht decken. Man findet:

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b_2)(\ \ c_2+a) &= (c_1-b)(1+a_2+b_1-c)\\ -(a_1+b_2)(\ \ c_2+a) &= (c_1+b)(1-a_2+b_1+c)\\ (a_1+b_2)(\ \ c_2-a) &= (c_1-b)(1+a_2-b_1+c)\\ (a_1-b_2)(-c_2+a) &= (c_1+b)(1-a_2-b_1-c)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b_2)^2+(c_2+a)^2 &= 2(1-a_2)(1+a_2+b_1-c)\\ (a_1-b_2)^2+(c_2-a)^2 &= 2(1+a_2)(1-a_2-b_1-c)\\ (a_1+b_2)^2+(c_2+a)^2 &= 2(1+a_2)(1-a_2+b_1+c)\\ (a_1+b_2)^2+(c_2-a)^2 &= 2(1-a_2)(1+a_2-b_1+c)\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}(a_1-b_2)^2-(c_2+a)^2 &= 2(-c-b_1)(1+a_2+b_1-c)\\ (a_1-b_2)^2-(c_2-a)^2 &= 2(-c+b_1)(1-a_2-b_1-c)\\ (a_1+b_2)^2-(c_2+a)^2 &= 2(c+b_1)(1-a_2+b_1+c)\\ (a_1+b_2)^2-(c_2-a)^2 &= 2(c-b_2)(1+a_2-b_1+c)\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Für die Gl. (5) und (6) liefert die erste Operation je 8 Relationen:

Digitized by

$$\left.\begin{aligned}
(a_1-b+c-a_2)^2 &= 2(1-a+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1-b-c+a_2)^2 &= 2(1-a-b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1+b+c+a_2)^2 &= 2(1-a+b_2+c_1)(1+a-b_1-c_2)\\
(a_1+b-c-a_2)^2 &= 2(1-a-b_2-c_1)(1+a-b_1-c_2)\\
(a_1-b-c-a_2)^2 &= 2(1+a-b_2+c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1-b+c+a_2)^2 &= 2(1+a+b_2-c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1+b+c-a_2)^2 &= 2(1+a+b_2-c_1)(1-a+b_1-c_2)\\
(a_1+b-c+a_2)^2 &= 2(1+a-b_2+c_1)(1-a+b_1-c_2)
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
(a_1-b)(a_1-b+c-a_2) &= (1-a-b_1+c_2+b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1-b)(a_1-b-c+a_2) &= (1-a-b_1+c_2-b_2-c_1)(1+a+b_1+c_2)\\
(a_1-b)(a_1-b-c-a_2) &= (1+a+b_1+c_2-b_2+c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1-b)(a_1-b+c+a_2) &= (1+a+b_1+c_2+b_2-c_1)(1-a-b_1+c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b+c-a_2) &= (1+a-b_1-c_2+b_2-c_1)(1-a+b_1-c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b-c+a_2) &= (1+a-b_1-c_2-b_2+c_1)(1-a+b_1-c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b+c+a_2) &= (1-a+b_1-c_2+b_2+c_1)(1+a-b_1-c_2)\\
(a_1+b)(a_1+b-c-a_2) &= (1-a+b_1-c_2-b_2-c_1)(1+a-b_1-c_2)
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Gl. (5) bleibt unverändert bei zweiter Operation, denn die Summanden des ersten und zweiten Factors der rechten Seite folgen den 2 Diagonalrichtungen, so dass sie sich dann bloss vertauschen. Gl. (6) hingegen liefert:

$$\left.\begin{aligned}
(a_1-b_2)(a_1-b_2+c_2+a) &= (1-a_2-b_1-c-b+c_1)(1+a_2+b_1-b)\\
(a_1-b_2)(a_1-b_2-c_2-a) &= (1-a_2-b_1-c+b-c_1)(1+a_2+b_1-c)\\
(a_1-b_2)(a_1-b_2-c_2+a) &= (1+a_2+b_1-c+b+c_1)(1-a_2-b_1-c)\\
(a_1-b_2)(a_1-b_2+c_2-a) &= (1+a_2+b_1-c-b-c_1)(1-a_2-b_1-c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2+c_2+a) &= (1+a_2-b_1+c-b-c_1)(1-a_2+b_1+c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2-c_2-a) &= (1+a_2-b_1+c+b+c_1)(1-a_2+b_1+c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2+c_2-a) &= (1-a_2+b_1+c-b+c_1)(1+a_2-b_1+c)\\
(a_1+b_2)(a_1+b_2-c_2+a) &= (1-a_2+b_1+c+b-c_1)(1+a_2-b_1+c)
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Demnach vertreten die Gl. (1) 18, (2) (3) (4) (5) 72, (6) 144; alle zusammen 450 neue Relationen.

Auf die vorstehenden Relationen ward ich durch die Untersuchungen geführt, von denen der nächst folgende Aufsatz handelt.

Digitized by Google

XX.

Rein analytische Consequenzen der Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

---

§. 1.

In meiner analytischen Curventheorie, d. Arch. T. LVI. S. 62 und schon früher, Crelle Journal Bd. LX. S. 182. Bd. LXIII. S. 122, habe ich das Problem der Darstellung einer Curve aus gegebener Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel auf die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$r'' + i\vartheta r' + \tfrac{1}{4}r = 0 \tag{7}$$

zurückgeführt.

Die Einführung der imaginären Function r war daselbst eine vermittelte; gegenwärtig wird ihr directer Ausdruck in Raumgrössen von Anwendung sein.

Es bedeuten f, g, h die Richtungscosinus der Tangente, f', g', h' die der Hauptnormale, l, m, n die der Binormale, τ, ϑ den Krümmungs- und Torsionswinkel, die Accente die Differentiation nach τ. Sei dann

$$r = e^{\frac{1}{2}\int \frac{f' + il}{1+f}\,\partial\tau} \tag{8}$$

dann erhält man durch Differentiation:

Digitized by Google

$$2r' = \frac{f'+il}{1+f}r$$

$$4r'' = \left\{\left(\frac{f'+il}{1+f}\right)^2 + 2\frac{(l-if')\vartheta'-f}{1+f} - 2\frac{f'+il}{(1+f)^2}f'\right\}r$$

$$= \left\{-\frac{f'^2+l^2}{(1+f)^2} + 2\frac{(l-if')\vartheta'-f}{1+f}\right\}r$$

$$= \left\{-\frac{1-f}{1+f} + 2\frac{(l-if')\vartheta'-f}{1+f}\right\}r$$

$$= \left\{-1+2\frac{l-if'}{1+f}\vartheta'\right\}r$$

$$= -r-4i\vartheta'r'$$

und erkennt, dass Gl. (7) durch den Wert (8) erfüllt wird.

Bezeichnet r_1 den conjugirten Wert zu r, so ist

$$rr_1 = e^{\int\frac{\partial f}{1+f}} = A(1+f)$$

$$4r'r_1' = \frac{1-f}{1+f}rr_1 = A(1-f)$$

woraus:

$$rr_1 + 4r'r_1' = 2A \tag{9}$$

$$rr_1 - 4r'r_1' = 2Af \tag{10}$$

Die Constante A kann man $=1$ machen, indem man $f=0$ zur untern Grenze des Integrals in (8) wählt.

Ferner ist

$$2r_1r' = \frac{f'+il}{1+f}rr_1 = A(f'+il)$$

woraus:

$$r_1r' + rr_1' = Af'; \quad r_1r' - rr_1' = iAl \tag{11}$$

Hiernach sind durch r die Grössen f, f', l, somit die Lage der Curven zur x Axe bestimmt und explicite ausgedrückt.

§. 2.

Man kann nun r einerseits als specielle Lösung der Gl. (7), andrerseits als geknüpft durch Gl. (8) an die specielle Lage der Curve zur x Axe betrachten, und in beiden Eigenschaften zur vollen Allgemeinheit fortschreiten. Dann entsteht die Frage, ob die allgemeinste Lösung der Gl. (7) im ganzen der Curve in allgemeinster Lage, und welche Lösung einer beliebig gegebenen Lage entspricht.

Digitized by Google

Unmittelbar erhellt Folgendes. Da Gl. (7) nur durch den Coefficienten ϑ' von der Curve abhängt, und dieser für jede Lage dieselbe Grösse ist, so muss Gl. (7) erfüllt bleiben, wenn man die x Axe beliebig verrückt, oder, was dasselbe ist, für f, f', l eine beliebige Orthogonalsubstitution einführt. Sind also a, b, c Richtungscosinus einer beliebigen neuen Geraden gegen die x, y, z, so ist

$$r_2 = e^{\frac{1}{2}\int \frac{af'+bg'+ch'+i(al+bm+cn)}{1+af+bg+ch}\partial\tau} \tag{12}$$

eine Lösung der Gl. (7). Demnach kann Gl. (7) nur entweder gleich allgemein oder allgemeiner sein als dieser Ausdruck.

Andrerseits wissen wir, dass die allgemeinste Lösung der linearen Gleichung 2. Ordnung (7), die wir vorläufig mit r_3 bezeichnen, durch die Relation

$$r_3 = r\int \frac{e^{-i\vartheta}\partial\tau}{r^2} \tag{13}$$

auf das Specialintegral zurückgeführt wird. Folglich muss für irgend welche constante untere Grenzen der zwei in r_3 enthaltenen Integrale r_2 identisch mit r_3 werden, indem wir a, b, c als beliebig gegeben, die unbekannten Integralgrenzen als Functionen davon ansehen. Zur Abkürzung sei

$$\omega = \frac{f'+il}{1+f}; \quad \omega_2 = \frac{af'+\ldots+i(al+\ldots)}{1+af+\ldots} \tag{14}$$

dann hat man hiernach:

$$e^{\frac{1}{2}\int(\omega_2-\omega)\partial\tau} = \int \partial\tau\, e^{-i\vartheta} - \int \omega\,\partial\tau$$

und nach Differentiation:

$$\frac{\omega_2-\omega}{2} e^{\frac{1}{2}\int(\omega_2-\omega)\partial\tau} = e^{-i\vartheta} - \int \omega\,\partial\tau$$

oder:

$$e^{-\frac{1}{2}\int(\omega_2+\omega)\partial\tau} = \frac{\omega_2-\omega}{2} - e^{i\vartheta} \tag{15}$$

§. 3.

Hiervon machen wir erst specielle Anwendung zur algebraischen Darstellung des Integrals im Exponenten von r. Seien b und c unendlich klein 1. Ordnung; dann ist $1-a$ unendlich klein 2. Ordnung. Entwickelt man also $\omega_2-\omega$ bis auf 1. Ordnung, so findet man

$$2\pi$$

Digitized by Google

$$\omega_2-\omega=\frac{(1+f)[b(g'+im)+c(h'+in)]-(f'+il)(bg+ch)}{(1+f)^2}$$

$$=b\frac{g'+im+(fg'-gf')+i(fm-hl)}{(1+f)^2}$$

$$+c\frac{h'+in+(fh'-hf')+i(fn-hl)}{(1+f)^2}$$

$$=b\frac{g'+n+i(m-h')}{(1+f)^2}+c\frac{h'-m+i(n+g')}{(1+f)^2}$$

$$=(b+ic)\frac{g'+n+i(m-h')}{(1+f)^2}$$

Der constante Factor $b+ic$ verschmilzt mit der untern Integralgrenze. Lässt man also b, c stetig verschwinden, so dass ω_2 in ω übergeht, so erhält man:

$$e^{-\int\frac{f'+il}{1+f}\partial\tau}=\frac{n+g'+i(n-h')}{(1+f)^2}e^{i\vartheta} \tag{16}$$

für bestimmte untere Integralgrenze, die jedoch noch vom Anfang der ϑ abhängig bleibt.

Sei

$$\varphi=\int\frac{l\partial\tau}{1+f} \tag{17}$$

Nach Multiplication mit

$$e^{\int\frac{f'\partial\tau}{1+f}}=1+f$$

lautet Gl. (16):

$$e^{-i\varphi}=\frac{n+g'+i(m-h')}{1+f}e^{i\vartheta} \tag{18}$$

woraus:

$$\cos(\varphi+\vartheta)=\frac{g'+n}{1+f};\quad \sin(\varphi+\vartheta)=\frac{h'-m}{1+f} \tag{19}$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{h'-m}{g'+n}-\vartheta \tag{20}$$

ein Resultat, dass sich durch Differentiation leicht bestätigt. Auf rein analytischem Wege hätte sich dasselbe schwerlich auffinden lassen; es war vielmehr kaum wahrscheinlich, dass ein allgemeiner Ausdruck für das Integral (17) existirte, weil die Grössen f, l, τ Functionen zweier Variabeln sind, die nur durch die Curvengleichung in Relation mit einander stehen.

Die Relation

$$(g'+n)^2+(h'-m)^2=(1+f)^2$$

welche für das Bestehen der Gl. (19) notwendig ist, zeigt sich übereinstimmend mit der Formel (1) im vorigen Artikel.

§. 4.

Jetzt lässt sich die allgemeine Relation (15) algebraisch gestalten. Wir schreiben sie:

$$(\omega_2-\omega)e^{i\vartheta}rr_2=A \text{ (const.)} \tag{21}$$

Hier ist

$$r=\sqrt{1+f}\,e^{\frac{i\varphi}{2}} \tag{22}$$

Aus den Gl. (19) findet man:

$$\cos\frac{\varphi+\vartheta}{2}=\sqrt{\frac{1+f+g'+n}{2(1+f)}};$$

$$\sin\frac{\varphi+\vartheta}{2}=\frac{h'-m}{\sqrt{2(1+f)(1+f+g'+n)}}$$

daher wird

$$r=\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{2(1+f+g'+n)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}} \tag{23}$$

Durch eine Orthogonalsubstitution geht r über in r_2. Sei also

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

ein constantes Orthogonalcoefficientensystem, und wenn der Index 2 das Resultat der Substitution bezeichnet,

$$\left.\begin{array}{lll} f_2=af+\ldots; & g_2=a_1f+\ldots; & h_2=a_2f+\ldots \\ f_2'=af'+\ldots; & g_2'=a_1f'+\ldots; & h_2'=a_2f'+\ldots \\ l_2=al+\ldots; & m_2=a_1l+\ldots; & n_2=a_2l+\ldots \end{array}\right\} \tag{24}$$

dann wird

$$r_2=\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{\sqrt{2(1+f_2+g_2'+n_2)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}} \tag{25}$$

und nach Einführung in Gl. (21) erhält man:

Digitized by

$$\left(\frac{f_2'+il_2}{1+f_2}-\frac{f'+il}{1+f}\right)\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{1+f+g'+n}}\times$$
$$\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{\sqrt{1+f_2+g_2'+n_2}}=2A \quad (26)$$

Die Constante A muss im Laufe der Curve dieselbe bleiben. also ihren Wert behalten, wenn die Tangente, Hauptnormale, Binormale die Richtungen der x, y, z haben, so dass

$$f=g'=n=1$$

wird. Hier ergibt sich:

$$\frac{b+ic}{1+a}\,\frac{1+a+b_1+c_2+i(b_2-c_1)}{\sqrt{1+a+b_1+c_2}}=A$$

das ist nach Ausführung der Multiplication:

$$A=\frac{b-a_1+i(c-a_2)}{\sqrt{1+a+b_1+c_2}} \quad (27)$$

Den Modul des Zählers zeigt Gl. (3), der gemäss wir setzen können:

$$A=\sqrt{2(1-a)}e^{i\alpha} \quad (28)$$

$$e^{i\alpha}=\frac{b-a_1+i(c-a_2)}{\sqrt{2(1-a)(1+a+b_1+c_2)}} \quad (29)$$

Setzt man ebenso

$$\cos 2\mu=\frac{g'+n}{1+f};\quad \sin 2\mu=\frac{h'-m}{1+f} \quad (30)$$

so lautet Gl. (26):

$$\left(\frac{f_2'+il_2}{1+f_2}-\frac{f'+il}{1+f}\right)\sqrt{(1+f)(1+f_2)}e^{i(\mu+\mu_2)}=\sqrt{2(1-a)}e^{i\alpha} \quad (31)$$

Die Gleichheit der Moduln ist von selbst offenbar; denn das Quadrat des Moduls zur Linken ist:

$$\left\{\left(\frac{f_2'}{1+f_2}-\frac{f'}{1+f}\right)^2+\left(\frac{l_2}{1+f_2}-\frac{l}{1+f}\right)^2\right\}(1+f)(1+f_2)=$$
$$\left\{\frac{f_2'^2+l_2^2}{(1+f_1)^2}+\frac{f'^2+l^2}{(1+f)^2}-2\frac{f'f_2'+ll_2}{(1+f)(1+f_2)}\right\}(1+f)(1+f_2)=$$
$$\left\{\frac{1-f_2}{1+f_2}+\frac{1-f}{1+f}-2\frac{f'f_2'+ll_2}{(1+f)(1+f_2)}\right\}(1+f)(1+f_2)=$$
$$2(1-ff_2-f'f_2'-ll_2)=2(1-a)$$

Die Amplitude des ersten Factors in (31) ist:

$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{(1+f)l_2 - l(1+f_2)}{(1+f)f_2' - f'(1+f_2)}$$

die Gleichsetzung der Amplituden gibt:

$$\psi + \mu + \mu_2 = \alpha \tag{32}$$

Entwickelt man f_2, f_2', l_2 nach (24), so kommt:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{-l+al+b(m+fm-lg)+c(n+fn-lh)}{-f'+af'+b(g'+fg'-f'g)+c(h'+fh'-f'h)}$$
$$= \frac{-(1-a)l+b(m-h')+c(n+g')}{-(1-a)f'+b(g'+n)+c(h'-m)}$$

Nimmt man hierzu nach Gl. (30):

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{h'-m}{1+f+g'+n}$$

so findet man:

$$\operatorname{tg}(\psi+\mu) = \{(1+f)[-(1-a)l+b(m-h')+c(n+g')]$$
$$-(1-a)[l(g'+n)+f'(h'-m)]+c[(g'+n)^2+(h'-m)^2]\} : \{(1+f)[-(1-a)f'$$
$$+b(g'+n)+c(h'-m)]+b[(g'+n)^2+(h'-m)^2]\}$$

Nach Gl. (1) ist aber

$$(g'+n)^2+(h'-m)^2 = (1+f)^2$$

daher

$$\operatorname{tg}(\psi+\mu) = \frac{-(1-a)l-b(h'-m)+c(1+f+g'+n)}{-(1-a)f'+b(1+f+g'+n)+c(h'-m)}$$

Andrerseits ist

$$\operatorname{tg}\mu_2 = \frac{h_2'-m_2}{1+f_2+g_2'+n_2}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{c-a_2}{b-a_1}$$

und nach Gl. (32)

$$\operatorname{tg}(\mu_2 - a) = -\operatorname{tg}(\psi+\mu)$$

folglich

$$\frac{(c-a_2)(1+f_2+g_2'+n_2)-(b-a_1)(h_2'-m_2)}{(b-a_1)(1+f_2+g_2'+n_2)+(c-a_2)(h_2'-m_2)} =$$
$$\frac{-(1-a)l-b(h'-m)+c(1+f+g'+n)}{-(1-a)f'+b(1+f+g'+n)+c(h'-m)} \tag{33}$$

Demnach hat der Ausdruck zur Linken die Eigenschaft sich nicht zu ändern, wenn entsprechend einer Rotation der Curve um die x Axe $a_1b_1c_1a_2b_2c_2$ variiren.

Digitized by Google

§. 5.

Wir haben r_2 als jedenfalls begriffen in r_3 nach Gl. (13) dargestellt, wo die Constanten noch nicht bestimmt sind. Seien r und r_2 definirt durch (23) und (25) und

$$B\frac{r_2}{r} = \int e^{-i\vartheta}\frac{\partial\tau}{r^2} + C \tag{34}$$

Durch Differentiation folgt:

$$B\frac{\omega_2 - \omega}{2} r r_2 e^{i\vartheta} = 1$$

Dies verglichen mit (21) und (27) gibt:

$$B = \frac{2}{A} = \sqrt{\frac{2}{1-a}}\, e^{-i\alpha} = \frac{b - a_1 + i(c - a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}}$$

Nun ist nach Gl. (22) (19)

$$\frac{e^{-i\vartheta}}{r^2} = \frac{e^{-i(\varphi+\vartheta)}}{1+f} = \frac{g' + n - i(h' - m)}{(1+f)^2}$$

und wir gewinnen aus (34) zunächst die neue Integralformel:

$$S = \int \frac{g' + n - i(h' - m)}{(1+f)^2}\partial\tau = \frac{b - a_1 - i(c - a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}} \times \frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2' - m_2)}{1+f+g'+n+i(h'-m)} \sqrt{\frac{1+f+g'+n}{1+f_2+g_2'+n_2}} \tag{35}$$

Für $a = 1$ ist der Ausdruck nicht direct anwendbar. Um auf den Fall stetig überzugehen, sei

$$a = c_2 = \cos\varkappa: \quad b_1 = 1; \quad c = -a_2 = \sin\varkappa$$

und $\varkappa$ unendlich klein. Dann wird bei Entwickelung bis auf 1. Ordnung

$$\frac{b - a_1}{1-a} = 0 \qquad \frac{c - a_2}{1-a} = \frac{4}{\varkappa}$$

$$1 + f_2 + g_2' + n_2 = 1 + f + g' + n + (h - l)\varkappa$$
$$h_2' - m_2 = h' - m - f'\varkappa$$

daher

$$S = -\frac{2i}{\varkappa}\frac{1+f+g'+n+(h-l)\varkappa+i(h'-m-f'\varkappa)}{1+f+g'+n+i(h'-m)} \times \left(1 - \frac{h-l}{1+f+g'+n}\frac{\varkappa}{2}\right)$$

$$= -\frac{2i}{\varkappa}\left\{1 + \frac{h-l-if'}{1+f+g'+n+i(h'-m)}\varkappa - \frac{h-l}{1+f+g'+n}\frac{\varkappa}{2}\right\}$$

Digitized by Google

Nun ist nach Gl. (1*)

$$(1+f+g'+n)^2+(h'-m)^2 = 2(1+f)(1+f+g'+n)$$

folglich

$$S = -\frac{2i}{\varkappa}\left\{1+\frac{(h-l-if')(1+f+g'+n-i(h'-m))-(h-l)(1+f)}{2(1+f)(1+f+g'+n)}\varkappa\right\}$$
$$= -\frac{2i}{\varkappa}\left\{1+\frac{(h-l)(g'+n-i(h'-m))(-if'(1+f+g'+n)-f'(h'-m)}{2(1+f)(1+f+g'+n)}\varkappa\right\}$$

Es ist aber

$$(h-l)(g'+n)-f'(h'-m) = h(g'+n)+(f'm-g'l)-(ln+f'h')$$
$$= h(1+f+g'+n)$$

und nach Gl. (2)

$$(h-l)(h'-m) = -(f'+g)(1+f+g'+n)$$

daher

$$S = -\frac{2i}{\varkappa}\left(1+\frac{h+ig}{1+f}\frac{\varkappa}{2}\right) = \frac{g-ih}{1+f}+\text{ const}$$

In einfachster Gestalt hat man also:

$$\int\frac{g'+n}{(1+f)^2}\partial\tau = \frac{g}{1+f};\quad \int\frac{h'-m}{(1+f)^2}\partial\tau = \frac{h}{1+f}$$

wie sich auch durch Differentiation leicht bestätigt.

§. 6.

Jetzt ist für irgend einen Wert von C, welcher vom Coefficientensystem abhängt, längs der Curve

$$\frac{b_1-a_1-i(c-a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}}\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{1+f+g'+n+i(h'-m)}\sqrt{\frac{1+f+g'+n}{1+f_2+g_2'+n_2}}$$
$$+C = \frac{g-ih}{1+f}$$

Da man eine momentane Stellung der Tangente, Haupt- und Binormale für x, y nnd z Richtung wählen kann, so ist es gestattet das Wertsystem

$$f = g' = n = 1$$

als existirend zu betrachten und in die Gleichung einzuführen. Dann kommt:

$$\frac{b-a_1-i(c-a_2)}{(1-a)\sqrt{1+a+b_1+c_2}}\frac{1+a+b_1+c_2+i(b_2-c_1)}{4}\sqrt{\frac{4}{1+a+b_1+c_2}}+C=0$$

Digitized by Google

Nun ist nach Gl. (2)

$$(b-a_1)(b_2-c_1) = -(c+a_2)(1+a+b_1+c_2)$$
$$(c-a_2)(b_2-c_1) = \quad (a_1+b)(1+a+b_1+c_2)$$

und die Gleichung reducirt sich auf

$$\frac{b-a_1-i(c-a_2)-i[c+a_2+i(a_1+b)]}{2(1-a)}+C=0$$

oder

$$C=-\frac{b-ic}{1-a}$$

Mit Anwendung von Gl. (1*) können wir das Resultat schreiben:

$$\frac{[b-a_1-i(c-a_2)][1+f+g'+n-i(h'-m)][1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)]}{2(1-a)(1+f)\sqrt{(1+a+b_1+c_2)(1+f+g'+n)(1+f_2+g_2'+n_2)}}$$
$$=\frac{b-ic}{1-a}+\frac{g-ih}{1+f} \qquad (36)$$

Diese Formel stellt das Product

$$(1+a+b_1+c_2)(1+f+g'+n)(1+f_2+g_2'+n_2) \qquad (37)$$

als Quadrat dar. Die 3.3 darin figurirenden Grössen sind die Richtungscosinus gleichnamiger Axen dreier orthogonaler Axensysteme gegen einander. Das Product bleibt daher ungeändert erstens bei Vertauschung der 3 Axensysteme, zweitens bei gleichzeitig cyklischer Vertauschung der Axen innerhalb jedes Systems. Die Basis des Quadrats zeigt dagegen nicht dieselbe Symmetrie; daher lässt sie sich in 9 verschiedenen Formen darstellen, welche identisch sein müssen.

§. 7.

Nach dem Vorstehenden ist nun

$$r_2=\frac{1+f_2+g_2'+n_2+i(h_2'-m_2)}{\sqrt{2(1+f_2+g_2'+n_2)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}}$$
$$\frac{1}{B}\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{2(1+f+g'+n)}}e^{-\frac{i\vartheta}{2}}\left(\frac{g-ih}{1+f}-C\right)$$

für

$$\frac{1}{B}=\frac{b-a_1+i(c-a_2)}{2\sqrt{1+a+b_1+c_2}}; \quad -C=\frac{b-ic}{1+a} \qquad (38)$$

Das allgemeinste Integral r_3 der Gl. (7) muss den gleichen Ausdruck für allgemeine B, C haben. Soll nun r_2 das allgemeinste Integral

Digitized by Google

ergeben sich, wenn man die Gleichungen, dass der gegebene A, C die Gl. (16) erfüllt werden können. Setzt man

$$\begin{aligned} \alpha &= 60{,}8^{\circ}, & l_1 &= 40{,}4\,\mathrm{km}, & r &= 40{,}4\,\mathrm{km}\,\sqrt{2}\\ \alpha_1 &= -40{,}8^{\circ}, & l_2 &= 40{,}4\,\mathrm{km}\,\sqrt{2}, & r_1 &= 40{,}4\,\mathrm{km}\\ \alpha_2 &= -69{,}2^{\circ}, & l_3 &= 40{,}4\,\mathrm{km}\,\sqrt{2}, & r_2 &= 40{,}4\,\mathrm{km}\,\sqrt{2}\\ & & l_4 &= 40{,}4\,\mathrm{km}\,\sqrt{2}, & r_3 &= 40{,}4\,\mathrm{km}\end{aligned}$$

dann wird

$$\frac{1}{2}\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\,\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\,\frac{C}{r}=-\cos\frac{\gamma}{2}\,\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}. \tag{19}$$

Setzt man

$$\frac{1}{2}\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\varepsilon^{\gamma},\quad C=\varepsilon r,$$

so erhält man die 4 Gleichungen:

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\varepsilon\,\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \tag{20}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\varepsilon,\quad \varepsilon=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}. \tag{21}$$

Die Ausgleichungsformeln lassen sich durch α und ε ausdrücken, die Maximalgrössen im allgemeinen nicht. Demnach ist das durch Gl. (16) ausgedrückte α, nicht gleich dem gesuchten α. Beide unterscheiden sich durch einen zweiten Faktor.

Betrachtet man diejenige α, die Bestimmungsgrösse der Curve, so ergeben die Gl. (20) und (21), dass nicht nur ein reeller, sondern ein beliebig complexer Faktor von gleicher α, welcher auch von α aus den Werten von β, γ, ε herausfällt, an dem die erste Gl. (20) nur Bestimmung der Curve nicht verändert. Hier fallen die Gl. (6) weg, nur die Gl. (16) mit notwendig und hinreichenden α und ε, während die Gl. (20) und (21) nur Bedingungen für α und ε sind. Ausserdem ein Zweck β, γ, die Lage der Curve zur x-Axe allein bestimmt wird, während α nur die willkürliche Grösse von die x-Axe aus. Ferner, wenn α aus, dass die allgemeinen Lösungen der Gleichungen Gültigkeitsbereich sich vollkommen mit der allgemeinen Lage einer Curve. Ferner, wenn α aus, dass die allgemeinen Lösungen der Gleichungen Gültigkeitsbereich sich, mit specieller Curve zusammenfassen lösung die Bestimmung anderer Curvenlinien.

§. 8.

Seien r, r_1, r_2 definirt durch Gl. (23) entsprechend 3 verschiedenen Lagen derselben Curve. Dann muss, weil alle die Gl. (7) erfüllen, eine lineare Relation

$$Ar + A_1 r_1 + A_2 r_2 = 0 \tag{42}$$

zwischen ihnen existiren. Durch Differentiation geht daraus hervor:

$$A\omega r + A_1 \omega_1 r_1 + A_2 \omega_2 r_2 = 0$$

Aus beiden Gleichungen findet man:

$$A : A_1 : A_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{r} : \frac{\omega_2 - \omega}{r_1} : \frac{\omega - \omega_1}{r_2}$$

Man braucht dann nur ein specielles Wertsystem, bezeichnet durch den Index 0 einzuführen, um die Formel (42) zu einer bestimmten zu machen, nämlich:

$$\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{r}\right)_0 r + \left(\frac{\omega_2 - \omega}{r_1}\right)_0 r_1 + \left(\frac{\omega - \omega_1}{r_2}\right)_0 r_2 = 0$$

das ist einer algebraischen Relation zwischen 3 orthogonalen Systemen.

Zu specieller Anwendung mögen das zweite und dritte Axensystem gegen das erste die Richtungscosinus

0 1 0	0 0 1
0 0 1	1 0 0
1 0 0	0 1 0

haben. Zur Coefficientenbestimmung setzen wir

$$f = g' = n = 1$$

dann werden die ω nach der Reihe 0, 1, i, die r ebenso 2, $1-i$, $1+i$; die Coefficienten haben den gemeinsamen Factor $\frac{1}{2}(1-i)$, nach dessen Weglassung sie sind: 1, −1, −1. Die Gleichung lautet:

$$r - r_1 - r_2 = 0 \quad \text{oder:}$$

$$\frac{1+f+g'+n+i(h'-m)}{\sqrt{1+f+g'+n}} - \frac{1+g+h'+l+i(f'-n)}{\sqrt{1+g+h'+l}} - \frac{1+h+f'+m+i(g'-l)}{\sqrt{1+h+f'+m}} = 0$$

Macht man die Gleichung rational, so erhält man:

$$2\{(1+f+g'+n)^2 + (1+g+h'+l)^2 + (1+h+f'+m)^2\} = (1+f+g+h+f'+g'+h'+l+m+n)^2.$$

Digitized by Google

§. 9.

In meiner analytischen Curvenlehre, Artik. 7. LVI. S. 63, habe ich gezeigt, dass jeder Lösung α der Gl. (7) ein zweite der conjugirte Werth von

$$\gamma = \frac{\alpha^2 + 4\beta\gamma + 4\gamma^2 + \alpha\delta + 2\gamma\delta - \delta^2}{\alpha^2 + 4\beta\gamma + 4\gamma^2 + \alpha\delta + 2\gamma\delta + \delta^2} = \frac{\alpha + \delta}{\alpha + \delta + 2\varepsilon}$$

entspricht. Setzt man den Werth von $\delta\varepsilon - \gamma\varepsilon$ und $\delta\varepsilon - \alpha\varepsilon$ aus den Artikeln (14) (15), so erhält man folgende Darstellung des allgemeinen Integrals:

$$\gamma_x = \frac{\alpha^2 + 4\beta\gamma + 4\gamma^2 + \alpha\delta + 2\gamma\delta - \delta^2 + (\alpha\varepsilon - \gamma\varepsilon)x - (\delta\varepsilon - \gamma\varepsilon)x^2}{\alpha^2 + 4\beta\gamma + 4\gamma^2 + \alpha\delta + 2\gamma\delta + \delta^2 + (\alpha\varepsilon - \gamma\varepsilon)x - (\delta\varepsilon - \gamma\varepsilon)x^2}.$$

Den Differentialparameten findet man leicht aus

$$\gamma\gamma' = \gamma^2 + \varepsilon^2 x^2 = \varepsilon^2 \frac{1}{\Delta^2}$$

Setzt man den conjugirten Werth ein, so ergibt sich:

$$\gamma_x \gamma_{\frac{1}{x}} = \frac{\alpha^2 + 4\beta\gamma + 4\gamma^2 + \alpha\delta + 2\gamma\delta + \delta^2 + (\alpha\varepsilon - \gamma\varepsilon)x - (\delta\varepsilon - \gamma\varepsilon)x^2}{\Delta^2 + 2\gamma\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2}.$$

Hieraus muss für irgend welche Constante A, B sein:

$$\frac{1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\delta}{\gamma} + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\varepsilon}{\gamma}x - \frac{\delta}{\gamma}\frac{\varepsilon}{\gamma}x^2}{\frac{\Delta^2}{\gamma^2} + 2\frac{\varepsilon}{\gamma}x + \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}x^2} = A$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\delta}{\gamma} + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\varepsilon}{\gamma}x - \frac{\delta}{\gamma}\frac{\varepsilon}{\gamma}x^2}{\frac{\Delta^2}{\gamma^2} + 2\frac{\varepsilon}{\gamma}x + \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}x^2} = B\frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}$$

das ist für $\gamma = \frac{\varepsilon}{\gamma}$ und $\gamma = \frac{\varepsilon}{\gamma}$:

$$\frac{1 + \alpha\gamma\delta + \alpha\varepsilon\gamma x - \delta\varepsilon\gamma^2 x^2}{\Delta^2 + 2\varepsilon\gamma x + \varepsilon^2 x^2} = A$$

$$\frac{\alpha\gamma\delta + \alpha\varepsilon\gamma x - \delta\varepsilon\gamma^2 x^2}{\Delta^2 + 2\varepsilon\gamma x + \varepsilon^2 x^2} = B\varepsilon^2$$

Also ergibt γ neue algebraische Relationen mal β zum Darstellungen des symmetrischen Products (27).

XXI.

Miscellen.

1.

Eine Gruppe planimetrischer Maxima und Minima.

Es sei ABC ein schiefwinkliges Dreieck mit den Seiten abc und den Winkeln $\alpha\beta\gamma$, h_a Höhe zu a, O der Mittelpunkt des eingeschriebenen, O_a der des der Seite a angeschriebenen Kreises, ϱ und ϱ_a deren Radien und $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$ ihre Berührungspunkte mit der Seite AC, $a+b+c=2s$ und Δ der Inhalt des Dreiecks, so ist bekanntlich

$$A\mathfrak{B}=s-a,\quad A\mathfrak{B}_a=s,\quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_a,\quad \frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_a}\right),$$

$$\Delta=\varrho s=\varrho_a(s-a)=\frac{ah_a}{2}$$

Betrachtet man von den Stücken $\alpha\ a\ s\ \varrho\ \varrho_a\ h_a\ \Delta$ je drei als gegeben, so erhält man eine Reihe von Aufgaben, deren Lösung sich meist durch den blossen Anblick der Figur ergiebt. Nimmt man je zwei Stücke als constant an und denkt im Uebrigen die Figur veränderlich, so ergeben sich ebenso leicht interessante Sätze über Maxima und Minima, die zwar vereinzelt in Aufgabensammlungen zu finden, in diesem Zusammenhange aber und so einfach bewiesen mir nicht bekannt geworden sind. Namentlich bei der Determination der oben angedeuteten Aufgaben dürften dieselben für den Unterricht vorteilhaft Anwendung finden.

Vorbemerkung: Berühren sich die Kreise O und O_a, so ist ABC gleichschenklig, weil die Halbirungslinie AOO_a des Winkels α auf der Basis senkrecht steht. Im folgenden kommt es immer darauf an, die Figur so zu verändern, dass die Kreise O und O_a sich berühren.

Digitized by Google

1. Ein Kreis $\mathfrak{k}$ und a centrisch. Mit a ist auch seine Ähnlichkeitsachse $\mathfrak{A}$ der Kreisform nach bestimmt und mit $\mathfrak{k}$ auch $\mathfrak{A}$ in ihrer Strecke OA, verschiedentlich. Wird nun $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ so verschoben, dass $A\mathfrak{B}_1 = r$ wächst, so wachsen gleichfalls $\mathfrak{a}_1 = \frac{r}{R}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{k}_1 = \frac{r}{R}\mathfrak{k}$; ist nun O und $\mathfrak{A}_1$ berührt, folglich gilt der Satz:

Von allen Strecken über derselben Basis a, welche in dieselbe Lage mit der Spitze übereinkommen, hat das gleichschenklige den grössten Umfang und inhalt, den grössten Kreisumfang und Inhalt und die grösste zur Basis gehörige Höhe.

2. Durch a und c ist ein Dreieck ABC_1 gegeben. Lässt man $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1$ um c kleiner werden, so schrumpft $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zusammen, $\mathfrak{a}_1$ endigt der Beziehung $\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}} = \frac{r}{R} = \frac{\mathfrak{k}_1}{\mathfrak{k}}$ folgend.

Alle Dreiecke, welche in dem Winkel α der Spitze A und dem Umfang übereinkommen, haben den der Höhe a zugeschriebenen Kreis gemein. Das gleichschenklige aber hat unter allen gleichen an a gelegenen Höhe den grössten Inhalt, die Basis und den grössten Umfang.

3. Hält man a und γ und damit das Dreieck ABC_1 fest, so nehmen mit $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1 = a$ auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = c$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{k}$ = $\mathfrak{a}$ ab, während $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1 = b$ wächst, also $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = c = r\sin\frac{\gamma}{2}$, folglich:

Alle Dreiecke, welche sich einem gegebenen Kreise so anschmiegen lassen, dass sie einen gegebenen Winkel γ an seiner Peripherie fassen, haben gleiche Seite c, welche sie gleichfalls einnehmen über der Sehne $\mathfrak{k}$ hervorragen. Das gleichschenklige aber hat unter der gegebenen a gelegenen Höhe am kleinsten den Umfang und Inhalt, die Basis und den kleinsten ausgeschnittenen Kreis.

4. Man schlage mit b_1 einen Kreis um A; er ist BC kongruenz Tangente für denselben und den Kreis $\mathfrak{k}$. Dieselbe jener a und γ, welche $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ fassen, lässt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{k}$ mit $\mathfrak{a}$ zusammenschrumpfen, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1$ wächst, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{k}_1$ mit $\frac{r}{R}\mathfrak{a}$ und $\frac{r}{R}\mathfrak{k}$ ab, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1 = b$ wächst, und $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = c = r\sin\frac{\gamma}{2}$ also:

Von allen Dreiecken, welche in einem Winkel und der zugehörigen Höhe übereinkommen, hat das gleichschenklige ein Maximum der Basis, Umfang, Inhalt und eingeschriebenen Kreis.

5. Wenn bei constantem a und $\Delta = \varrho s$ der Umfang s abnimmt, so muss ϱ wachsen, also O und O_a auf der festen Linie AO zusammenrücken, ebenso $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$, bis sich die Kreise O bei wachsendem und O_a bei abnehmendem Radius berühren. D. h.

> Von allen gleich grossen Dreiecken mit demselben Winkel α an der Spitze hat das gleichschenklige den grössten eingeschriebenen und gleichzeitig den kleinsten der Basis angeschriebenen Kreis. Ausserdem ein Minimum der Basis und des Umfangs und ein Maximum der zur Basis gehörigen Höhe.

6. Mit a und s sind die Strecken $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ und $A\mathfrak{B}_a$ und damit die Lote in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$ auf $A\mathfrak{B}_a$ als Oerter für O und O_a gegeben. Mit α wachsen auch ϱ und ϱ_a und daher wegen $\Delta = \varrho s = \frac{a h_a}{2}$ auch Δ und h_a, demnach:

> Von allen Dreiecken, welche in der Basis a und dem Umfang übereinstimmen, hat das gleichschenklige den Winkel an der Spitze, den eingeschriebenen so wie den der Basis angeschriebenen, die zur Basis gehörige Höhe und den Inhalt am grössten.

7. Es sei a und ϱ constant, also auch Dreieck $O\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ und das Lot in $\mathfrak{B}_a$ auf $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ als Ort für O_a. Bewegt sich A nach $\mathfrak{B}$ hin, so wird $s = A\mathfrak{B}_a$ kleiner und damit auch $\Delta = \varrho s$ und $h_a = \frac{2\Delta}{a}$, während ϱ_a und α wachsen, folglich

> Von allen Dreiecken, welche sich einem festen Kreise so umschreiben lassen, dass sie eine gegebene Basis a enthalten, hat das gleichschenklige den grössten Winkel an der Spitze und den grössten der Basis angeschriebenen Kreis, aber den kleinsten Umfang und Inhalt und die kleinste zur Basis gehörige Höhe.

8. Hält man neben a ϱ_a fest, und lässt A sich von $\mathfrak{B}$ fortbewegen, so wächst $s = A\mathfrak{B}_a$ und ϱ und damit $\Delta = \varrho s$ und $h_a = \frac{2\Delta}{a}$. Da stets $\varrho < \varrho_a$ bleibt, so tritt die Berührung der Kreise O und O_a nur dann ein, wenn $a < 2\varrho_a$, folglich

> Von allen Dreiecken, welche die Basis und den derselben angeschriebenen Kreis gleich haben, besitzt das gleichschenklige den kleinsten Winkel an der Spitze, aber den grössten eingeschriebenen Kreis, den grössten Umfang und Inhalt und die grösste zur Basis gehörige Höhe.

Digitized by Google

9. Mit $a = \mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ sind die Lote in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_a$ auf $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ festgelegt. Soll dann noch Δ constant bleiben, so muss wegen $\Delta = \varrho s$ s abnehmen, wenn ϱ wächst, dann nehmen aber auch α und ϱ_a zu, während $h_a = \frac{2\Delta}{a}$ constant ist, also

> Von allen gleich grossen Dreiecken von derselben Basis hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang, den grössten ein- und der Basis angeschriebenen Kreis und den grössten Winkel an der Spitze.

10. Durch ϱ und s ist Δ bestimmt. Legt man $A\mathfrak{S}_a = s$ fest und lässt $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ abnehmen, so rücken die Kreise O und O_a zusammen bis zur Berührung, dann ist a ein Minimum $= a_1$. Wächst dagegen a, so bewegt sich das constante $O\mathfrak{B}$ nach A hin, und daher wächst der Winkel α und der Radius ϱ_a bis sich die Kreise zum zweiten Male berühren, dann ist a ein Maximum $= a_2$, d. h.

> Es lassen sich einem Kreise unendlich viele Dreiecke umschreiben, welche alle denselben Umfang und Inhalt haben. Unter diesen ist dasjenige, welches die kleinste Seite und den kleinsten gegenüber liegenden Winkel enthält, gleichschenklig, ebenso dasjenige, welches die grösste Seite und den grössten Winkel an der Spitze hat. Oder: Ein Dreieck lässt sich mit Beibehaltung des Umfangs stets so verwandeln, dass es eine Seite a zwischen zwei Grenzen a_1 und a_2 oder einen Winkel zwischen zwei Grenzen α_1 und α_2 enthält.

Da $3a_1 < 2s$ und $3a_2 > 2s$ ist, so liegt $\frac{2s}{3}$ zwischen a_1 und a_2, und man kann also jedes Dreieck mit Beibehaltung des Umfangs so verwandeln, dass eine Seite $\frac{1}{3}$ des Umfangs wird. Mit Benutzung von 6. ergiebt sich dann:

> Von allen Dreiecken mit demselben Umfang hat das gleichseitige den grössten Inhalt.

Da ferner $3\alpha_1 < 180^0$ und $3\alpha_2 > 180^0$ ist, so liegt 60^0 zwischen α_1 und α_2 und man kann demnach jedes Dreieck mit Beibehaltung des Umfangs so verwandeln, dass es einen Winkel von 60^0 enthält. Aus 5. folgt dann:

> Von allen gleich grossen Dreiecken hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Digitized by Google

Anmerkung. Die Sätze vom gleichseitigen Dreieck werden gewöhnlich als selbstverständliche Zusätze zu 5. und 6. gegeben, wie in der Planimetrie von Heis und Eschweiler. Steiner, gesammelte Werke II 185 führt einen andern Beweis von Lhuilier an und giebt einen eigenen, der dem obigen ähnlich ist. Geht man vom gleichschenkligen Dreieck aus, so ergiebt sich die halbe Basis x desselben als Wurzel der kubischen Gleichung

$$2x^3 - x^2 s + \varrho^2 s = 0$$

und zwar ist $x = \frac{s}{3}$ d. h. Dreieck gleichseitig, sowol wenn ϱ ein Maximum bei gegebenem s, oder s ein Minimum bei gegebenem ϱ ist. Dies sind ebenfalls die obigen Sätze. Siehe Lampe, Geometrische Aufgaben S. 7.

11. s und ϱ_a bestimmen das Dreieck $AO_a\mathfrak{B}_a$ und damit den Winkel α. Nimmt $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ ab, so wächst ϱ und folglich auch $\Delta = \varrho s$ und h_a wegen $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_a}\right)$ d. h.

> Alle Dreiecke, welche den Umfang und den der Basis angeschriebenen Kreis gleich haben, stimmen auch im Winkel an der Spitze überein. Das gleichschenklige unter ihnen aber hat die kleinste Basis, die grösste zur Basis gehörige Höhe, den grössten Inhalt und den grössten eingeschriebenen Kreis.

12. Aus $\Delta = \varrho s = \frac{a h_a}{2}$ folgt $\varrho : a = h_a : 2s$. Mit h_a und s ist also das Verhältniss $\varrho : a$ und dadurch die Richtung $O\mathfrak{B}_a$ als Ort für O gegeben, wenn der rechte Winkel $A\mathfrak{B}_a O_a$ festliegt. Mit wachsendem $a = \mathfrak{B}\mathfrak{B}_a$ nehmen auch $\varrho\varrho_a$ und α zu, indem sich AO um A dreht, ebenso $\Delta = \varrho s$:

> Von allen Dreiecken mit demselben Umfang, welche in einer Höhe übereinstimmen, hat das gleichschenklige am grössten: die Basis und den gegenüberliegenden Winkel, den eingeschriebenen, so wie den der Basis angeschriebenen Kreis und den Inhalt.

13. Sollen ϱ und ϱ_a constant sein, so ist dies auch h_a. Mit $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_a = a$ wird $A\mathfrak{B}_a = s$ und $\Delta = \varrho s$ kleiner und α grösser, also

> Alle Dreiecke, welche sich einem Kreise so umschreiben lassen, dass der der Basis angeschriebene Kreis eine gegebene Grösse hat, stimmen in der Höhe zur Basis überein, das gleichschenklige aber hat die kleinste Basis, den

Digitized by Google

Meinem Vorbild und Lehrer, dessen den getreuen Wirkel an der Spitze.

14. Mit a und g, $a\,\mathfrak{b}$ und c centriert, mit c und $\mathfrak{b}$, auch a und $\mathfrak{c}$, $a\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ oder a und $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ centriert, mit $\mathfrak{c}$ und g, auch $\mathfrak{b}$ und g, endlich $\mathfrak{a}$ und g gepaart. Diese Paare sind also in dem Gruppe unbeweglich. Dr. J. Lange.

2.

Ein Brückenspiel.

P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC. Sind eine Gerade durch P so gelegt werden, dass ihr von den Dreiecksseiten AB, AC begrenzter Teil von P halbiert ist, so steht man durch P eine Parallele zu BC, welche AB in A' trifft, und trägt auf AB die Strecke $AA' = AB$ auf; C' ist der entlegene Strom.

C_0P treffe AB in B_0. In den Dreiecken, zwischen den drei Dreiecksseiten und C_0P gelegen, sind C_0P und B_0P gleichen Inhaltes, mithin wir die Strecke B_0P halbiert.

Die trimetrischen Punktcoordinaten von P bezüglich des Dreiecks ABC $(BC = a)$ seien $p_1 p_2 p_3$. Ferner sei

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

der unendlich ferne Punkt dieser Geraden bei der Form:

$$\begin{matrix} x & z \end{matrix}$$

Die Gleichung der durch P zu BC gezogenen Parallele PM ist demnach:

$$\begin{vmatrix} a_1 & x \\ p_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Die Geraden

$$\begin{matrix} a_2 & z \\ p_2 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} PM \equiv -a_1 p_2 & a_1 z - a_2 x_1 & -a_1 p_1 \\ AB \equiv 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

treffen sich in

$$0 \equiv a_1 p_2 + a_2 p_1 \qquad a_2 p_1 \qquad 0$$

Berücksichtigt man, dass AA' und die Strecke vom A und BC und mit P die Flächeninhalt des Parallelogrammdreiecks, so ist

$$K(a) = \frac{2F(c\,p_c + a\,p_a)}{a\,\Sigma\,a\,p_a}$$

$$K(b) = \frac{2F.\,ap_b}{a\,\Sigma ap_a}$$

$$K(c) = 0$$

Nach der angeführten Construction ist K die Mitte von AC_a. Es ist also:

$$K(a) = \frac{A(a) + C_a(a)}{2}$$

$$C_a(a) = 2K(a) - A(a)$$

$$= \frac{2F}{a\,\Sigma a\,p_a}(2c\,p_c + 2a\,p_a) - \frac{2F}{a}$$

$$= \frac{2F}{a\,\Sigma ap_a}(c\,p_c + a\,p_a - b\,p_b)$$

Ferner erhalten wir:

$$2K(b) = A(b) + C_a(b)$$

$$C_a(b) = 2ap_b : \frac{2F}{a\,\Sigma ap_a}$$

$$C_a(c) = 0$$

$$C_a \equiv c\,p_c + a\,p_a - b\,p_b \quad 2ap_b \quad 0$$

$$B_aC_a \equiv P\,C_a \equiv$$

$$-2ap_bp_c \quad p_c(cp_c + ap_a - bp_b \quad p_b(ap_a + bp_b - cp_c)$$

B_aC_a trifft BC in

$$\mathfrak{A} \equiv 0 \quad -p_b(ap_a + bp_b - cp_c) \quad p_c(cp_c + ap_a - bp_b)$$

Die $\mathfrak{A}$ liegen in der Geraden

$$\mathfrak{G} \equiv p_b\,p_c(bp_b + cp_c - ap_a)$$

Diese Gerade ist der Harmonikalen des Punktes P parallel.

Es sind nämlich zwei Gerade

$$a_1x_a + b_1x_b + c_1x_c = 0$$
$$a_2x_a + b_2x_b + c_2x_c = 0$$

einander parallel, wenn

$$\Sigma a(b_1c_2 - b_2c_1) = 0$$

Die Harmonikale des Punktes P bezüglich des Urdreiecks ist die Gerade p_bp_c. Für die Gerade $\mathfrak{G}$ und die Harmonikale von P ist demnach:

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_c p_a & p_a p_b \\ p_c p_a (cp_c + ap_a - bp_b) & p_a p_b (ap_a + bp_b - cp_c) \end{vmatrix}$$
$$= 2p_a^2 p_b p_c (bp_b - cp_c)$$

Es ist aber

$$\Sigma a p_a (b p_b - c p_c) = 0$$

Folglich ist die Gerade $\mathfrak{G}$ der $p_b p_c$ parallel. Wir haben also folgenden Satz:

Die drei durch einen beliebigen Punkt in der Ebene eines Dreiecks gezogenen Geraden, deren von je zwei Dreiecksseiten begrenzten Stücke durch den gewählten Punkt halbirt werden, treffen die Gegenseiten in Punkten einer Geraden, welche der Harmonikalen dieses Punktes parallel ist.

Projiciren wir die Figur, so wird die unendlich ferne Gerade eine Gerade $\mathfrak{G}_1$, welche die BC in A_1 trifft. K ist dann der Schnittpunkt der Geraden AB und PB_1. C_a ist der zu A bezüglich KC_1 vierte harmonische Punkt. Die $B_a C_a$ treffen die BC in Punkten einer Geraden $\mathfrak{G}$, von welcher die Harmonikale von P und die $\mathfrak{G}_1$ in demselben Punkte geschnitten werden. Wir haben also:

P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC. Die Gerade $\mathfrak{G}_1$ treffe BC in A_1. Bezüglich C_1 und des Schnittpunktes der PB_1 mit AB liege C_a zu A harmonisch.

Dann treffen die $B_a C_a$ die BC in Punkten einer Geraden $\mathfrak{G}$; diese Gerade, $\mathfrak{G}_1$ und die Harmonikale von P schneiden sich in einem Punkte. Für $\mathfrak{G}_1 \equiv a_1$ wird

$$\mathfrak{G} \equiv p_b p_c (b_1 p_b + c_1 p_c - a_1 p_a).$$

Wien, December 1884. Emil Hain.

3.

Ein Satz über Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind.

Es möge mir gestattet sein im folgenden die Frage nach dem geometrischen Orte der Mittelpunkte der Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind, und deren Achsenquadratsumme eine gegebene Grösse hat, zu behandeln und daran einige Folgerungen zu schliessen.

Digitized by Google

ABC sei irgend ein Dreieck, AA_1, BB_1 und CC_1 dessen Höhen und H dessen Höhenschnitt. Wählen wir nun auf AB irgend einen Punkt E und auf AC irgend einen Punkt F und beschreiben über EC und BF als Durchmesser Kreise, so hat der Punkt H in Bezug auf die beiden Kreise die gleichen Potenzen $HC.HC_1$ und $HB.HB_1$, liegt also auf der gemeinsamen Sehne derselben. Sind ferner M und N die Schnittpunkte der beiden Kreise, so werden alle Kegelschnitte, die dem Dreieck einbeschrieben sind, und die die Linie EF berühren, aus diesen Punkten unter rechten Winkeln gesehen. Ist also P der Mittelpunkt eines solchen Kegelschnitts mit den Halbachsen a und b, so muss somit

$$a^2+b^2 = PM^2 = PN^2$$

sein. Andererseits finden wir jedoch, dass in dem gleichschenkligen Dreieck MPN auch die Relation

$$PH^2 = PM^2+HM.HN$$

giltig ist. Daraus folgt aber sofort die Gleichung

$$HP^2 = a^2+b^2+HA.HA_1.$$

Hiebei haben wir zwar vorausgesetzt, dass die beiden Schnittpunkte M und N der Kreise reell seien. Ist dem jedoch nicht so, so ist doch die letztere Formel giltig, nur erleidet der Gang der Ableitung eine unwesentliche Aenderung.

Aus der entwickelten Relation $HP^2 = a^2+b^2+HA.HA_1$ ergeben sich nun folge Sätze:

1) Ist P der Mittelpunkt eines Kegelschnittes mit den Halbachsen a und b, der einem Dreieck A einbeschrieben ist, so ist stets, wenn H der Höhenschnitt des Dreiecks ist:

$$HP^2 = a^2+b^2+ \text{const.}$$

2) Ist der Höhenschnitt eines Dreiecks Mittelpunkt eines Kegelschnitts, der dem Dreieck einbeschrieben ist, so hat derselbe unter allen, dem Dreieck einbeschriebenen, Kegelschnitten die kleinste Achsenquadratsumme.

3) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind und die eine gegebene Achsenquadratsumme haben, ist ein Kreis um den Höhenschnitt des Dreiecks als Mittelpunkt.

Wird ferner $a^2+b^2 = 0$, so ist der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel und wir finden den bekannten Satz:

Digitized by Google

1) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, die einem ausgeschlossenen Dreieck umbeschrieben sind, besteht, ist ein Kreis um den Höhenschnitt des Dreiecks, der die Kreise über den Seiten rechtwinklig durchschneidet.

Da ferner unter den Hyperbelscharen sich solche befinden, die in allen drangut so rechtwinkelig Kreise durchgehen, deren Endpunkte in einer Seite sind der gegenüber liegende Seite des Dreiecks fallen, ergiebt sich der Satz:

2) Wird aus den Höhenschnitt eines Dreiecks ABC ein Kreis beschrieben, der die Seiten des Dreiecks der Reihenfolge von ABC bez entsprechender Bezeichnung in $a_1, a_2; b_1, b_2$ und c_1, c_2 schneidet, so ist

$$a_1 a_2 = b_1 b_2 = c_1 c_2 = \text{Const.}$$

Da ebenfalls congruente Kegelschnitte gleiche Achsenquadratsumme haben, so folgen auch die Sätze:

3) Ebenso liefern kanen auch kreisförmige 6 Kegelschnitte einbeschrieben, welche einen gegebenen Kegelschnitt congruent sind. Der Mittelpunkte desselben liegen auf einem Kreise um den Höhenschnitt des Dreiecks.

4) Ebenso Kegelschnitt kann auch kreisförmige 12 Dreiecke umschrieben, die einem gegebenen Dreieck congruent sind, die Höhen derselben sind von Mittelpunkt des Kegelschnitte gleich weit entfernt. (Die Sätze 3), 4) sind 2) leichte nicht in Steiner's W. B. II. p. 144., jedoch gleich hierauf in trivialen Sätze verwandt die Zahl 2 anstatt der Zahl 12 ist.)

Zum Schlusse wollen wir noch hinzufügen, dass diese Sätze wenigstens theilweise auch giltig sind, wenn statt Sehne den Dreiecks **Centralsehnen** sind.

Weingarten, im Febr. 1860. H. Spurzer.

4.

Ueber ebenen und sicatoncylindrischen.

Es liegt im Grunde das Theorem

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = 1 = \text{Const.}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = \frac{\sin \alpha''}{\sin \beta''} = 1 = \text{Const.}$$

Das gemeinschaftliche Flächenstück $JCKHLDMGJ$ stellt sich dar als

$$F_1 = 4ab \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Das Flächenstück $JBMGJ$ stellt sich dar als

$$F_2 = ab \arcsin \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

1. Die beiden Ellipsen rotiren gleichzeitig um die x-Axe.

Es entstehen zwei Rotationsellipsoide, welche ein Körperstück gemeinschaftlich haben. Ausser diesem gemeinschaftlichen Körperstücke entstehen zu beiden Seiten des zweiten Rotationsellipsoids, links und rechts zwei congruente Körperstücke des ersten Rotationsellipsoids und endlich bleibt noch ein wulstförmiges Körperstück vom zweiten Rotationsellipsoide rings um das gemeinschaftliche Körperstück des durch Rotation der Ellipse (2) um die kleine Axe entstanden ist.

Es bezeichne nun

V_1 das Volumen des gemeinschaftlichen Körperstückes, das durch Rotation von $KCJGMDLHK$ entstanden ist;

V_2 das Volumen des Körpers, der durch Rotation von $GJBMG$ oder $HKALH$ um die x-Axe entstanden ist;

V_3 das Volumen des Körpers, der durch Rotation von $KCJE$ oder $LDMF$ um die x-Axe entstanden ist.

Dann ist

$$V_1 = \tfrac{4}{3}ab\pi\left(a - \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);$$

$$V_2 = \tfrac{2}{3}ab\pi\left(b - a + \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);$$

$$V_3 = \tfrac{4}{3}ab\pi . \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Drehen sich beide Ellipsen gleichzeitig um die y-Axe, so entstehen dieselben Körper; blos ihre Lage ist eine andere.

Digitized by Google

2. **Die beiden Ellipsen rotiren gleichzeitig um ihre kleinen Axen.**

Es entstehen zwei breitgedrückte Rotationsellipsoide.

Denken wir uns in O senkrecht auf der xy-Ebene die z-Axe, so berühren sich beide Körper in $z = +a$ und $z = -a$.

Es soll das Volumen des den beiden Rotationsellipsoiden gemeinschaftlichen Körperteiles berechnet werden.

Die Gleichung des Rotationsellipsoides, welches durch Rotation von GEH um GH entsteht, lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Legen wir jetzt eine Schnittebene in der Entfernung $z = p$ von O durch beide Körper, so erhalten wir:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{p^2}{a^2};$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{p^2}{a^2};$$

oder, wenn für p nun wieder z stehen gelassen wird, wir uns aber denken, dass z jetzt constant ist, so können die Gleichungen auch die Form annehmen

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} = 1;$$

$$\frac{x^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} + \frac{y^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)} = 1.$$

Diese beiden Schnittfiguren sind wieder nur Ellipsen mit den beiden Axen bezüglich $a\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$ und $b\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$.

Das gemeinschaftliche Körperstück V wird sich nun einfach darstellen als $\int_{-a}^{+a} f(z)\,dz$, wo unter $f(z)$ das gemeinschaftliche Flächenstück $JCKHLDMGJ$ zu verstehen ist, und worin jetzt

$$a = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad b = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$$

zu setzen ist.

Digitized by Google

Es war

$$f(z) = 4ab \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

folglich wird hier

$$f(z) = 4ab\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

also

$$V = \int_{-a}^{+a} 4ab\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot dz;$$

oder

$$V = \tfrac{16}{3} a^2 b \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

oder

$$V = \tfrac{4}{3} a . F_1$$

d. h.

Das Volumen des gemeinschaftlichen Körperteiles ist gleich dem vierfachen Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche F_1 und der Höhe a.

Gröbzig, im December 1884.

Dr. Albert Bieler.

5.

Wann stehen die von einem Punkte an eine Kegelschnittslinie gezogenen zwei Tangenten auf einander senkrecht.

Um diese Frage sofort für alle Kegelschnittslinien K beantworten zu können, gehen wir von der sogenannten Scheitelgleichung

$$y^2 = px + qx^2 \qquad 1)$$

aus, welche bekanntlich für $p = 2a$ und $q = -1$ einem Kreise vom Halbmesser a, für $p = \frac{2b^2}{a}$ und $q = -\frac{b^2}{a^2}$ einer Ellipse mit den Halbachsen a und b, für $p = \frac{2b^2}{a}$ und $q = \frac{b^2}{a^2}$ einer Hyperbel mit den Halbachsen a und b, für $q = 0$ einer Parabel mit dem Parameter p entspricht.

Die Tangente T an den Kegelschnitt K hat die Gleichung

Digitized by Google

$$(x-y)=(1-x)\frac{y+2x}{x+2y+x^2}$$

welche auch auf die Form

$$\log\frac{y}{x}=\log(1-x)+\frac{x}{y}$$

gebracht werden kann. Die Gleichung (x, y) der Berührungscurve nimmt den Gleichungen 1) und 2) gemäss, können somit berechnet werden. Es ergeben sich, wie leicht zu sehen, zwei Berührungscurven $B_1 \ldots B_2$, y_1) und y_2) und den entsprechend auch zwei Tangenten

$$T_1 \ldots \eta_1 x = (x+3y)\xi_1 + y\eta_1 \quad \text{und} \quad T_2 \ldots \eta_2 x = (x+3y)\xi_2 + y\eta_2$$

Diese stehen auf einander senkrecht, wenn

$$\frac{\eta_1}{\xi_1}\cdot\frac{\eta_2}{\xi_2}=-\frac{y}{x+3y}$$

ist, oder die Gleichung

$$y^2+3xy(\eta_1+\xi_2)+y^2\eta_1\eta_2+x^2\eta_1\eta_2=0 \qquad 3)$$

besteht. Wenn wir in die letzte Gleichung die aus 1) und 2) folgenden Werthewerte einsetzen, so erhalten wir eine Gleichung 4), in welcher x und y nur noch als Factoren vorkommen. Diese Gleichung 4) können wir auch $= u_n$ setzen, die Gleichung $u_n=0$ ergiebt n Curven und die von Punkte $P \ldots \varphi_1$ ist an A gegangen Tangente normal, φ_2 ist die Neigung der in die Gleichung einer Linie, die alle jene Punkte enthält, von welchen Tangenten an A angehen, die auf einander senkrecht stehen. Wir Gleichung 4) ergiebt, berechnet man die Wurzelwerte nicht schwer, wenn $\varphi_1=\varphi_2$ ist, r_{φ_1} und r_{φ_2}. Die Gleichung stellen, berechne man φ und φ_1 und setze es in 3) ein. Man erhält:

$$x^2(x^2+4x^2)+3xy(-4x^2)+xy^2(-4+3)y^2+3xy^2+4y^2=0,$$

weshalb

$$\varphi_1=\varphi_2=\operatorname{arc}\frac{-4xy^2-3xy^2-4x^2}{x^2+3xy+4y^2-4x^2}$$

und

$$r_{\varphi_1}=r_{\varphi_2}=\frac{x^2+3xy+4y^2}{x^2+3xy+4y^2-4x^2}.$$

Berechnet man α aus 2) und setzt es in 1) ein, so ergibt sich die Gleichung

$$x^2y^2+4xy(-4x^2)+4y^2(-4x^2)-2x^2y+x^2(4x^2)+x^2y=0,$$

$$y_1 y_2 = \frac{p^2\xi(q\xi+p)}{p^2+4pq\xi+4q^2\xi^2-4q\eta^2}$$

Werden nun diese Werte in die Gleichung 3) eingeführt, so findet sich nach einfacher Umformung die Gleichung

$$\xi^2+\eta^2+\frac{p}{q}\xi+\frac{p^2}{4q}=0 \qquad 4)$$

d. i. die Gleichung eines Kreises K.

Wir können somit die oben gestellte Frage dahin beantworten: Die vom Punkte $P \ldots (\xi, \eta)$ an die Kegelschnittslinie $K \ldots y^2 = px+qx^2$ gezogenen Tangenten stehen nur dann auf einander senkrecht, wenn der Punkt P auf dem Kreise $K \ldots \xi^2+\eta^2+\frac{p}{q}\xi+\frac{p^2}{4q}=0$ liegt.

Die Gleichungen 1) und 4) zeigen uns auch noch, dass K und k denselben Mittelpunkt $M \ldots (x = -\frac{p}{2q}, y = 0)$ besitzen, und dass der Halbmesser des Kreises k die Grösse $r = \sqrt{\frac{p^2}{4q^2}-\frac{p^2}{4q}}$ hat. Demnach nimmt r den Wert $a\sqrt{2}$ an, wenn K ein Kreis vom Halbmesser a ist; den Wert $\sqrt{a^2+b^2}$, wenn K eine Ellipse mit den Halbachsen a und b ist; den Wert $\sqrt{a^2-b^2}$, wenn K eine Hyperbel mit den Halbachsen a und b ist; den Wert ∞ (d. h. k wird eine Gerade) wenn K eine Parabel ist. In letzterem Falle ($q = 0$) reducirt sich die Gleichung 4) wirklich in die lineare Gleichung:

$$\xi+\frac{p}{4}=0;$$

k geht also in die Leitlinie der Parabel über.

Die Werte für r lassen auch noch erkennen, dass k bei einem Kreise, einer Ellipse oder einer Parabel K immer reell ist, dass aber k dann in einen Punkt degenerirt, wenn K eine gleichseitige Hyperbel ist, (weil $r = \sqrt{a^2-b^2} = 0$ wird) und dass gar keine zu einander senkrechten Tangenten möglich sind, wenn K eine Hyperbel ist, deren Hauptachse kleiner ist als die Nebenachse. ($r = \sqrt{a^2-b^2}$ wird nämlich in diesem Falle imaginär.)

Pola, am 10. Mai 1885.

Franz Schiffner,
k. k. Prof.

Digitized by Google

6.

Zur Convergenz der Reihen.

Eine unendliche Reihe

$$t_0+t_1+t_2+\ldots+t_k+\ldots=T$$

ist convergent, wenn

$$-1<\operatorname{Lim}_{k=\infty}\frac{t_{k+1}}{t_k}<+1 \qquad (1)$$

ist.

Wird $\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k}=+1$, so convergirt die Reihe noch, wenn statthat

$$\operatorname{Lim}_{k=\infty} k\left\{\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right\}>+1 \qquad (2)$$

Für den Fall $\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k}=-1$ soll im Folgenden eine analoge Regel aufgestellt werden.

Betrachten wir die unendliche Reihe

$$U=\frac{1}{1^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k^n}+(-1)^k\frac{1}{(k+1)^n}+\ldots,$$

so ist dieselbe convergent, so lange $n>0$ ist, weil in diesem Falle die absoluten Werte der Glieder fortwährend abnehmen und ausserdem regelmässiger Zeichenwechsel vorhanden ist. Für $n\geqq 1$ ist dies klar. Wird $n<1$, so kann man setzen

$$n=\frac{1}{p};\quad p>1,$$

und die Reihe geht über in

$$\frac{1}{\sqrt[p]{1}}-\frac{1}{\sqrt[p]{2}}+\frac{1}{\sqrt[p]{3}}-\ldots,$$

welche aus obigen Gründen ebenfalls convergirt. Für U wird nun

$$\operatorname{Lim}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\operatorname{Lim}\left(-\frac{\frac{1}{(k+1)^n}}{\frac{1}{k^n}}\right)=\operatorname{Lim}\left(-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n}\right)=-1;\ n>0.$$

Ist also $\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k}=-1$, so wird nach einem bekannten Satze die Reihe T noch convergiren, wenn

Digitized by Google

$$-\frac{t_{k+1}}{t_k} < \left(\frac{k}{k+1}\right)^n; \quad n > 0$$

bleibt. Hieraus folgt:

$$-\frac{t_k}{t_{k+1}} > \left(1+\frac{1}{k}\right)^n.$$

Es ist aber

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^n = 1+\frac{n}{k}+\frac{1}{k^2}f\left(\frac{1}{k}\right); \quad -1 < \frac{1}{k} < +1.$$

Also muss auch sein

$$k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right) > n+\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k}\right)f\left(\frac{1}{k}\right).$$

Lassen wir jetzt k unendlich werden, so ergiebt sich

$$\operatorname{Lim}_{k=\infty}\left\{k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right)\right\} > n.$$

Da nun $n > 0$ sein muss, so ist die Reihe T für $\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k} = -1$ noch convergent, wenn

$$\operatorname{Lim}_{k=\infty}\left\{k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right)\right\} > 0 \qquad (3)$$

ist.

Diese Regeln wollen wir auf die Binomialformel anwenden. Es ist

$$(1+x)^\mu = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2.3\ldots k}x^k+\ldots$$

Nach (1) erhalten wir zunächst

$$\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k} = \operatorname{Lim}\left\{\frac{\mu-k}{k+1}x\right\} = \operatorname{Lim}\left\{\frac{\frac{\mu}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}x\right\} = -x.$$

Es muss demnach

$$-1 < -x < +1 \qquad (-\infty < \mu < +\infty)$$

sein.

Untersuchen wir jetzt die Grenzfälle $x = -1$ und $x = +1$.

I. Für $x = -1$ wird

$$\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k} = +1:$$

Nach Regel (2) haben wir also zu bilden

Digitized by Google

$$k\left\{\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right\}=k\left\{-\frac{k-1}{\mu-k}-1\right\}=-\frac{1+\mu}{\frac{\mu}{k}-1}$$

und

$$\operatorname{Lim} k\left\{\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right\}=1+\mu.$$

Für das Statthaben der Convergenz ist also notwendig

$$1+\mu>1$$

oder

$$+\infty>\mu>+1.$$

II. Ist $x=+1$, so wird

$$\operatorname{Lim}\frac{t_{k+1}}{t_k}=-1.$$

Nach Regel (3) erhalten wir sodann

$$k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right)=k\left(-\frac{k+1}{\mu-k}-1\right)=-\frac{(1+\mu)}{\frac{\mu}{k}-1}$$

und

$$\operatorname{Lim}\left\{k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right)\right\}=1+\mu.$$

Also muss sein

$$1+\mu>0$$

oder

$$+\infty>\mu>-1.$$

Berlin, März 1884.

Dr. A. Börsch,
Assistent im Königl. geodätischen Institut.

7.

Archimedische Kreisquadratur.

Nimmt man nach Archimedes das Verhältniss des Durchmessers zum Kreise wie 7 zu 22 an, ein Wert der vom wahren nur um 4 Zehntausendtel desselben differirt, so verhält sich der Radius zur Seite eines der Kreisfläche gleichen Quadrats wie 1 zu $\sqrt{\frac{22}{7}}$.

Eine recht einfache Construction dieses Verhältnisses möchte wol manchmal von Anwendung sein.

Man trage auf einer Geraden 4 gleiche Strecken $= a$ ab, deren Grenzpunkte $ABCDE$ seien, errichte in D ein Lot, welches von einem um A durch E geschlagenen Kreisbogen in F getroffen werde, ziehe BF, errichte in B auf BF das Lot $BG = BF$ und verbinde F mit G. Dann ist das Quadrat über FG gleich der Kreisfläche vom Radius DF.

Ist der Radius r gegeben, so mache man $FH = r$ zur Strecke auf FD, ziehe HJ parallel DG, wo J Schnittpunkt anf FG. Dann ist FJ die gesuchte Quadratseite.

Die Werte der einzelnen Strecken, sämtlich Seiten rechtwinkliger Dreiecke, ergeben sich einfach. Aus

$$AF = 4a; \qquad AD = 3a$$

folgt

$$DF = \sqrt{7}\,.\,a$$

dies verbunden mit $BD = 2a$ gibt:

$$BF = \sqrt{11}\,.\,a = BG$$

woraus wieder:

$$FG = \sqrt{22}\,.\,a$$

so dass, wie behauptet war,

$$DF : FG = 1 : \sqrt{\frac{22}{7}}.$$

R. Hoppe.

Digitized by Google

Litterarischer Bericht V.

Methode und Principien.

Die Mathematik als Lehrgegenstand des Gymnasiums. Eine pädagogische Untersuchung von Arth. Karl Reichel. Professor der Mathematik am Gymnasium zu Bruntrut. Berlin 1885. Weidmann. 98 S.

Von J. Tyrrell habe ich in Bd. 28 der Z. S. P. (S. 232) bereits A Selection, designed to illustrate the best methods for examination purposes in the Elementary Subjects of Pure Mathematics, etc. erwähnt. Dieses ist a) für den Schulgebrauch bestimmt und. Etwa hierhin möchten sich folgendes von ihrem eigenen Werte) unter seinen mathematischen Schulbüchern und didaktischen Schriften dadurch auszeichnen, dass sie sich durch eine besonders sorgfältige Behandlung der Methode durch Auslese der differirenden Grundsätze kund gibt, während andere den allgemeinen Standpunkt der Methode als einen bestimmt zulässigen zubereitet lassen und jedes für sich nur nach den Anweisungen des Verfassers und nach den Bestimmungen der Lehrordnungen für Gymnasien, Realschulen etc. zu benutzen ist. Der letzte eine Einführung von seinem Chemiker, schon in die Verbindung der Methode zu einer gemeinsamen Arbeit oder Fächergruppe macht und einen dauernden Erfolg für die Schule bedeutet, dem Interesse der Fachgenossen mehr der als eine solche Interesse Schulbücher, Lehrbücher, Lehrbücher, Lehr

nicht wol ausführbar; der Grund findet sich auch im 4. Abschnitt der gegenwärtigen Schrift einmal kurz ausgesprochen. Ein systematisch ausgearbeiteter Entwurf war vor allem notwendig; einen solchen fand der Verfasser nicht vor; es blieb ihm daher nur übrig selbst einen Entwurf aufzustellen, und als solcher lassen sich seine Schriften betrachten. Ueber diejenigen Punkte, in welchen derselbe teils vom Gewöhnlichen abweicht, teils über bestehende Differenzen entschied, hat sich der Verfasser ausgesprochen und den Fachgenossen Gelegenheit geboten an seinen Aufstellungen Kritik zu üben. Letzteres ist von mehreren Seiten geschehen. Eine Beantwortung der erfahrenen Beurteilungen ist bereits in der Programmarbeit des Verfassers enthalten: Zur Reform des geometrischen Unterrichts, Beilage zum Jahresbericht des Grossherzoglichen Gymnasiums zu Wertheim für das Schuljahr 1879—1880. Diese Arbeit erscheint jetzt nochmals als Anhang zur gegenwärtigen „pädagogischen Untersuchung". Der Gegenstand letzterer ist die, aus einer Vorbetrachtung über die Stellung und den dieselbe begründenden Wert des mathematischen Unterrichts an Gymnasien sich ergebende Frage: Welche Stellung hat unter den Lehrfächern des Gymnasiums speciell die Mathematik einzunehmen, wenn dieses seinen Zweck vollkommen erreichen soll, ohne die Schüler mehr als nötig zu belasten? Sie wird in 2 Fragen geteilt: 1) Welchen Gewinn für die formale Bildung zieht man aus dem Unterrichte in der Mathematik speciell, und inwieweit ist gerade die Mathematik zur Erzielung dieses Gewinnes unerlässlich oder wenigstens zweckmässiger als andere Disciplinen? 2) Welchen realen Gewinn für die Bildung ziehen wir aus dem Studium der Mathematik, und wieviel ist von dem mathematischen Wissen und Können unerlässlich, wenn wir in dem Verständniss unsrer gegenwärtigen Cultur nicht empfindliche Lücken haben wollen? Die Beantwortung führt auf die weitern Fragen: 3) Welche Disciplinen der Mathematik erweisen sich als unerlässlich oder wenigstens als zweckmässig für den Lehrplan des Gymnasiums; und in welcher Ausdehnung müssen sie gelehrt werden? 4) In welcher Methode müssen diese einzelnen mathematischen Disciplinen gelehrt werden, damit a) der Gewinn für die formale Bildung ein grösstmöglicher, b) der Gewinn an notwendigem mathematischem Wissen und Können ausreichend und fest sei, c) die Belastung der Schüler durch diese Disciplinen im richtigen Verhältnisse stehe zu dem erzielten Gewinne? Und wie sind diese Disciplinen auf die einzelnen Classen zu verteilen? — Der formale Gewinn besteht darin, 1) dass der Schüler lernt, die Dinge selbst, nicht blosse Begriffe, richtig wahrzunehmen, zu vergleichen, zu unterscheiden und zu ordnen; selbst Begriffe auf ihre Realität zu prüfen; 2) dass er beobachten lernt, was um ihn vorgeht, und befähigt wird selbständig aus beobachteten Einzelfällen allgemeine Regeln zu abstrahiren und

Digitized by Google

andre, welche ihm mitgeteilt werden, auf ihre Richtigkeit zu prüfen; 3) dass er nachdenken lernt. Diese Fähigkeiten, die für das Studium der Naturwissenschaften direct notwendig sind, ergänzen auch, abgesehen von der Bedeutung der Mathematik als Hilfswissenschaft, wesentlich die allgemeine Bildung. Mehr als die Arithmetik ist die Geometrie geeignet sie zu entwickeln, und in dieser mehr die Aufgaben als die Beweise förderlich für das Nachdenken. Der reale Gewinn vom mathematischen Unterrichte auf gegenwärtigem Standpunkte ist nach Ansicht des Verfassers, abgesehen von einigen Berufsarten, gering, würde sogar noch geringer werden, wenn man, wie einige wollen, die Steiner'sche projectivische Geometrie an die Stelle der Euklid'schen setzte. Die Frage, ob er sich erhöhen liesse, führt auf den vierten zu erörternden Punkt. Die dritte Frage wird durch wenig mehr als Aufzählung der zweckmässigen Disciplinen erledigt. Bevor noch der formale Gesichtspunkt zur Geltung gebracht ist, hat der reale, rücksichtlich der elementaren Physik, Erd- und Himmelskunde, denen der Verfasser noch das Versicherungswesen hinzufügt, bereits ziemlich so viel gefordert, als der gewöhnliche Gymnasialcursus enthält. Eine mögliche Beschränkung ergibt sich also nicht. Die vierte Frage betreffend die Methode gibt Anlass zu principiellen Erörterungen, welche zugleich als Rechtfertigung des Verfahrens in den Lehrbüchern des Verfassers dienen. In Betreff der Arithmetik wird zuerst erinnert, dass die algebraischen Operationen mit allgemeinen Zahlen nicht als Auswertungen, sondern als Transformationen mit reciproker Anwendung aufzufassen sind, und dass in diesem Punkte selbst die Einteilung der Aufgaben nicht zur falschen Ansicht verleiten sollte. Gegen diese Lehre ist von keiner Seite ein Einwand erhoben worden; in so vielen Lehrbüchern sie auch unbeachtet bleibt, so scheint doch niemand die entgegenstehende alte Gewohnheit verteidigen zu wollen. Der zweite Punkt betrifft die successive Erweiterung des Zahlbegriffs. Die sich derselben anschliessende Methode, welche nach Th. Wittstein's schematischer Aufstellung von den meisten Lehrbüchern dem Grundgedanken nach adoptirt ist, und die wir für die einzig richtige halten, wird hier ohne ein Wort der Rechtfertigung vorausgesetzt. Ihr zufolge werden, wie es nicht anders sein kann, die Operationen zuerst an positiven ganzen Zahlen erklärt und behandelt. In Bezug auf die Reihenfolge der Erweiterungen pflegt man sich nicht an das Schema der Operationen zu binden. Nach dem Schema würden die Negativen vor den Brüchen einzuführen sein, weil die Division später als die Subtraction gelehrt wird. Es empfiehlt sich aber die Negativen später einzuführen, wodurch ein vexirender mehrmaliger Wechsel der Anschauung vermieden wird. Der Verfasser sagt hier davon, man müsse die Abstraction nicht weiter treiben, als unbedingt notwendig ist, und die Begriffe

rent dem erweitern, wenn der Lehrsatz diese Erweiterung verlangt — mit der ganzen unbegrenzten, durch keine materiellen Annahmen beschränkten Genauigkeit, die von Beil. 1 an erhalten bleibt. Dieses Verfahren ist, schreibt mir Lie. Engel, Dagegen vorgebracht, es sei unklar, was unter Größen der Größe, Zahlen der Zahl zu verstehen sei, wenn es sich um Größen der Gattung, der Verhältnisse bereits angeführt war, davon eingegangen sei eine neue Zahl, auf der die entsprechenden Qualitäten sind, wodurch der Schüler, der die Identität nicht durchschauen kann, unnötigerweise in Verwirrung gebracht werde. Ich glaube nicht, daß dieses Bedenken stichhaltig ist. Wenn man z. B. von Größen der Gattung spricht, so ist damit doch ausgesprochen, daß man eingesehen hat, daß gewisse Eigenschaften, welche den Größen als solchen zukommen, auch den Größen der Gattung zukommen müssen, und wenn man dann

so wird es wol dem Ref. gestattet sein, an das nächstliegende Verfahren zu erinnern, welches Becker gar nicht in Betrachtung zieht. Ist die Definition der Multiplication mit ganzen positivem Zahlen $mB = B+B+B+ \ldots$ nicht auch für Brüche ausreichend? In der Tat bedarf es nur zur Anwendung der Zuziehung vorherbekannter Sätze, an welche die Schüler mit Nutzen erinnert werden, und die auch für den erweiterten Begriff unentbehrlich sind: 1) Der Multiplicand B ist beliebig benannt. 2) Der Bruch $\frac{m}{n}$ mit beliebiger Benennung ist gleichbedeutend mit der in Einheiten, deren n die ursprüngliche Einheit geben, gezählten Zahl m. Da nun $\frac{B}{n}$ das Zeichen für eine Zahl ist, deren n die Einheit B geben, so ist $\frac{m}{n}B$ nach gewöhnlichem Begriff dasselbe als $m.\frac{B}{n}$. Eine neue Definition ist demnach ganz überflüssig; es bedarf nur einer Erläuterung, damit das Bekannte richtig angewandt wird; eine solche würde aber nach jeder der genannten Definitionen ohnehin nötig sein, und letztere würden die Orientirung eher erschweren. Auch für die Multiplication der Irrationalen ist keine neue Definition, sondern nur Anleitung zum richtigen Gebrauch des Bekannten erforderlich. Zum Bekannten darf man wol rechnen die Darstellung der Irrationalen durch Decimalbruch bis zum beliebigen Grad der Genauigkeit, d. h. den Begriff der unendlich kleinen Differenz. Determinanten in Anwendung auf die elementare Behandlung der Gleichungen einzuführen verwirft der Verfasser, und dem wird man gewiss gern beistimmen, wenn man die detaillirte Ausführung vor Augen hat. So einfach die Determinantentheorie auf allgemeiner Basis ist, so complicirt und unerquicklich gestaltet sie sich, wenn man vom Speciellen aufsteigen will. Soll sie überhaupt auf Schulen gelehrt werden, so gehört sie ihrer Natur nach zur Combinatorik, mithin in die höhere Classe. Die übrige Mitteilung des Lehrgangs, mag sie auch ganz wesentlich für die betreffende Frage sein, können wir hier nicht wiedergeben. Gründe sind zwar für jede Wahl ausgesprochen; doch erscheinen dieselben nicht als entscheidend, solange der beliebten Methode keine andern gegenübergestellt werden, und dazu hätte der Aufsatz weit länger sein müssen.

In Betreff der Geometrie nehmen wir zu dem Wenigen, was dieses Capitel enthält, sogleich die Programmarbeit hinzu, welche die dazu gehörigen Fragen ausführlicher bespricht. Die erste Frage ist nach der Ursache, warum die Schüler so ungleiche Fortschritte in der Mathematik machen. Der Verfasser ist sehr schnell mit der Antwort

Digitized by Google

fertig: wenn wir nicht annehmen sollen, dass zum Lernen der Mathematik eine besondere, seltene Begabung gehört (dass würde heissen auf alle Erklärung verzichten), so kann nur die Lehrmethode schuld sein. Er hält also den erstern Fall, dass in einer Eigentümlichkeit der Mathematik ein wesentlicher Grund liegt, gar nicht der Betrachtung für wert, sondern lässt ihn beiseite, weil sein Extrem gewiss von niemandem behauptet wird. Dass freilich nur besonders begabte Schüler fähig sind Mathematik zu lernen, scheint nicht wol glaublich. Ob aber eine gewisse natürliche Geistesrichtung und Neigung, wenn auch nicht vorausgesetzt werden muss, so doch das Lernen sehr erleichtert, ist dadurch nicht entschieden, und umsomehr wert zu untersuchen, weil daraus wesentliche Gesichtspunkte für die Methode entspringen. Wir dürfen die Frage nicht übergehen: Was fordert die Mathematik vom Lernenden verschieden von andern Disciplinen? Es lassen sich sogleich 3 Dinge nennen: 1) Das Verweilen im engsten Ideenkreise; denn wer im Kleinen am Unterschiedlichen achtlos vorbeigeht, wird im Grossen kein Auge dafür haben. 2) Die absolute (vom Gemüt unabhängige) Gerechtigkeitsliebe und Unparteilichkeit, welche sich beim Zuviel sowenig beruhigt als beim Zuwenig. 3) Der Ordnungssinn, der Gesetze entdeckt. In diesen Punkten zeigen die Kinder schon im frühen Alter verschiedene, bisweilen entgegengesetzte Neigung; offenbar werden diejenigen, deren Triebe den 3 Forderungen entsprechen, einen grossen Vorsprung in der Mathematik haben. Hieraus erklären sich hinreichend die ungleichen Fortschritte. Becker erwähnt als specifische Eigenschaft der Mathematik nur die, dass sie abstracte Gegenstände habe. Gerade diese Aussage aber, sooft man sie auch hört, ist unzutreffend, und vermutlich der Ausdruck fehlgegriffen; es ist eben ein unüberlegtes, vom Gefühl eingegebenes Urteil. Abstracte Gegenstände haben alle Disciplinen ausser etwa der Geographie und Naturgeschichte. Mag vielleicht damit gemeint sein, dass die Gegenstände moralisch indifferent sind und dem Leben fern stehen; doch auch dies fällt nur darum auf, weil eben solche eine so minutiöse Sorgfalt beanspruchen.

Ist es nun Sache des Unterrichts auch diejenigen Schüler, welche die günstige Neigung nicht mitbringen, für Mathematik zu befähigen, so ist es jedenfalls unerlässlich, dass derselbe die genannten Forderungen selbst erfüllt. Davon abweichen zu wollen ist wol auch seit Euklid niemandem in den Sinn gekommen, bis die Reformbestrebungen an die Oeffentlichkeit traten, in denen namentlich die erste Forderung vielfach ausser Augen gesetzt ward. Da auch die gegenwärtige Schrift von der Reform des mathematischen Unterrichts handelt, so wird das Vorstehende darauf anzuwenden sein. Nennt

Digitized by Google

man wie gewöhnlich die vor den Reformsocialisten hervorhebt. Mit Recht; die Individualisten, an welche es doch in erster Linie dabei ist, eine Schrift eingerichtet zu haben, sind, diese Individualisten Arbeiter, Arbeiter, welche sich ihrer Lage bewußt sind, und welche sich ihrer Lage bewußt geworden sind. Aus dem Inhalt dieser Schrift, aus der ganzen socialistischen Lehre, darauf deuten die Ausgabe der gegenwärtigen hin, welche die sozialdemokratische Partei, die sie vertritt, in Deutschland hat, und die zahlreichen socialistischen Anhänger, welche. Der erste Satz: Sie gibt kein „positives" zusammenhängendes System, sondern eine Kritik von Thesen, die vor deutsch „Socialisten" verbreitet sind, dass der Redakteur der Zeitschrift, Herr Dr. Bernstein, ein Buch geschrieben hat, welches voraussetzt, dass die Leser dieser Zeitschrift, die dem Buche weite Reise immer Zustimmung, und dass man aus dieser beiläufigen Bemerkung den Schluss ziehen kann, dass unsere redaktionelle Thätigkeit lediglich einen vorübergehenden Charakter besitzt, es existiert man doch das Buch, und wenn es nicht existiert, so wird es doch bald existieren. Und dann: Kritik und Reformsozialismus, — was ist Reformsozialismus? Es, was immer gewesen ist, „dass" ein Lehrsatz richtig ist, während man eigentlich Elemente in den Lehrsatz hineinbringt, welchen eben gezeigt hat in den einzelnen Sätzen ausgeschwindelt ist. Reformsozialismus ist also, was immer gewesen ist, eine „Kritik" eigentlich nicht zu sein. Was mit Elementen und Begriffen gearbeitet ist, basierte freilich einer Erfahrung, daß aber die begründet, dass diese gehen, es wird, man weiß es nicht, es ist Vermutung. Jeder Satzes gibt doch zunächst das Warten auf eine dadurch erst möglich die Gewissheit, dass der Satz richtig sein. Die Gewissheit, sondern sie ausgeschwindelte werden, sind also nichts, das Vermutete ist Gewissheit geworden, das Gewissheit ist Vermutung. Und so ist es gegeben, wenn man die ganze Gesellschaft nach einem Plan, nach Wünschen der Volksmasse leitet, mehr zu sagen als an anderen Stellen. Denn manche Gewissheiten sind einfach gesagt, dass es an systematischer Ordnung gefehlt hat, und dass durch diese sonst wir Gewissheiten, Gewissheiten, welche sich ausgeschwindelte Gewissheiten, sind Vermutung, die man vermutet, nur gute daraus keine ausgeschwindelten Gewissheiten haben werden, dann keine vollständig die Benennung sollte. Eine so zusammenhängende Ordnung, wie sie sie in den Schriften der Reformsozialisten vorfinden, ist, man weiß es nicht, es ist Vermutung, es ist Vermutung

Wenn eine solche Leistung für die projectivische Geometrie möglich sei, so dürfe man nicht daran verzweifeln ein gleiches auch für die Anfänge der Geometrie zu erreichen. Damit also deutet der Verfasser, ohne den Euklidischen Standpunkt charakterisirt zu haben, an, dass sich doch ein höherer Standpunkt der Methode denken lasse. Doch in diesem Gedanken liegt von vorn herein ein Widerspruch. Nehmen wir an, wie in der Tat manche Lehrer aussagen, nach Steiner'schem Vorbild die Anfänger mit bestem Erfolge unterrichtet zu haben, die Schüler seien wirklich ohne Mühe zu einem so umfassenden Ueberblick gelangt; dann werden sie vergleichsweise in der Lage dessen sein, der zum erstenmal einen Fabrikraum betritt und das ganze Getriebe von einem Punkte aus überschaut, der aber, wenn er mit Arbeit und Maschinen nicht vorher im einzelnen bekannt geworden ist, keine Ahnung davon hat, was alles bedeutet. Sie werden unter den vielen Beziehungen die wesentlichen und notwendigen nicht unterscheiden können, manches zur Anwendung erforderliche wol gar nicht kennen lernen. Eben dieses Notwendige und zwar dieses allein gibt die Euklidische Methode und erfüllt damit die erste Forderung, die des Verweilens im engen Ideenkreise. Es ist ein Widerspruch, mit dieser Forderung das Streben, gleich anfangs den Blick zu erweitern, verbinden zu wollen; eins arbeitet dem andern entgegen.

Sehr oft lässt sich die Meinung vernehmen, das Festhalten an der Euklidischen Methode beruhe allein auf dem alten Herkommen. Nun sind aber nach Becker's Rechnung die Reformgedanken bereits 70 Jahre lang tätig. Wie geht es dann zu, dass noch keine wesentlich abweichende Bearbeitung entschiedene Anerkennung gefunden hat? Obgleich längst widerlegt, ist es immer von neuem das genannte Vorurteil, wodurch sich die Reform meistens einzuführen sucht. Jede fängt von neuem mit derselben Lästerung an und schliesst mit demselben Miserfolg. Die Reform würde auf einem weit klarerem Boden stehen und mehr Achtung gewinnen, wenn sie mit der Frage begönne: Welche Eigenschaften der Euklidischen Methode müssen festgehalten werden, damit der mathematische Unterricht seinen Zweck nicht verfehle? Der Verfasser legt sich diese Frage nicht vor, ist vielmehr gleich von Anfang und im allgemeinen und ganzen gegen Euklid eingenommen, zeigt sich aber offen für die Lehren seiner eigenen Erfahrung, welche ihn doch Punkt für Punkt dem Euklid näher führen. Er verteidigt die Darstellungsform, welche den Lehrsatz zu Anfang stellt und den Beweis folgen lässt, und gesteht, dass ihn die Uebereinstimmung in diesem Punkte günstiger für Euklid gestimmt habe. Diese Form ist doch also schon eine Eigenschaft der Methode, von der wir nicht abgehen dürfen. Auch ist dies nicht die einzige Concession: auch seine Erklärung, dass die projectivische

Digitized by Google

Gemeinsame nicht an die Stelle der Kubikzahlen zu setzen ist, obgleich dadurch, das unsere Aufgabe leichter, was sie nicht allzu schweren Aufgaben sind, noch leichter würde. Wir können uns nicht denken, das jemand die Figuren nicht kennen und aber in Stereometrie gute Kenntnisse besitze. Es ist gewissermaßen Pflicht, diese empfindlich, den streng Mathematischen gemäßen Unterricht hemmende Lücke auszufüllen. Die Figuren sind ihm in Quarta und Untertertia einen proviſoriſchen Unterricht zu ertheilen, wenn sie nicht schon in Quinta, wie es in einigen Anstalten geschieht, als dem besonderen Figurenlehrer die Figuren nicht bewußt. Ob diese Figuren in einem guten Buch stehen, muss von der Beschaffenheit eigen sein. Hier ist es jedenfalls sehr empfehlenswerth, dieses Buch in Elemente gegeben wird, dass ab- sondern, einzelnen Figuren, wie sie in Quinta und Untertertia vorkommen, Schnitte Grundkörperpunkte zur sehr aufgestellt sind, dass sie nicht nur zu sehr, sondern auch, wie es vielfach geschieht, in einer Reihenfolge stehen, welche den Schüler zu einem Urtheil über die Figuren nöthigt, ehe er sie kennt. Wenn z. B. Figuren, welche nur durch Schnitte entstehen, vor den Grundkörpern, aus denen sie entstehen, oder

Bücher des Verfassers. Die in diesem Archiv enthaltenen sind ziemlich reichlich bedacht worden. Die Hauptstellen sind in extenso mitgeteilt, und die Antwort darauf übergeht keinen Punkt mit Stillschweigen. Gleichwol ist die Behandlung der Fragen nicht der Art, dass sie dem Aufwand entsprechend den Zweck fördern könnte; sie ist mehr darauf gerichtet durch dialektische Kunstgriffe die Entscheidung hinauszuschieben und für diesmal noch dem Urteil zu entgehen als die Sache zu klären. Die erste Antwort beginnt mit einem persönlichen Ausfall gegen den Recensenten, indem sie demselben ein Dogma von vermeintlich unfehlbarer Wahrheit zuschreibt — wol nur um dem zuvorzukommen, dass man vom Verfasser ein gleiches sage. Es handelte sich um die Bedeutung der Axiome der Geometrie. Der Verf. erklärt sie für unmittelbar einleuchtende Sätze; hat aber an einer Stelle geäussert, dass man bei oberflächlicher Betrachtung für einleuchtend halten könne, was nicht einmal wahr sei. Der Ref. glaubt nicht an die Untrüglichkeit jener Divination, welche ohne bewussten, angebbaren Grund Urteile als sicher aufstellt, und hat nach Hinweis auf des Verf.'s eigene Mahnung zur Vorsicht an einem weitern Beispiel aus dessen Lehrbuch (Axiom III.) gezeigt, welcher Täuschung eine solche Divination ausgesetzt ist. Kann man hier von einem Dogma reden, so ist es nicht vom Ref., sondern vom Verf. aufgestellt und ohne Widerlegung des Entgegenstehenden festgehalten worden; der Zweifel daran kann doch kein Dogma sein. Jetzt verkehrt der Verf. zur Verteidigung alle Aussagen in ihr Gegenteil. Zunächst soll die obige Aeusserung nur von Fällen der Unachtsamkeit gelten, und unter „oberflächlich" verstehe er überhaupt „unachtsam". Ob jemand das für gleichbedeutend hält, sei dahingestellt; im Bericht ist beides unterschieden berücksichtigt. Der wörtliche Inhalt des dem Ref. zugeschobenen Dogmas lautet nun: „dass alle unmittelbare Erkenntniss nur oberflächlich sein könne". Dies sagt der Verf., wol zu merken, in seiner abweichenden Wortdeutung. Oberflächlich nennt man aber, wie das Wort selbst sagt, die Urteile, die auf das äussere Anschauen des Nächstliegenden hin ohne eingehendes Studium, ohne gründliche Untersuchung gefällt werden; es schliesst nicht aus, dass dieses Anschauen alles treu aufnimmt, was sich ihm darbietet. Da es nun ein Widerspruch ist, unmittelbar evident zu nennen, was auf gründlicher Untersuchung, ja überhaupt auf Ueberlegungen beruht, so war wol der obige Satz selbstverständlich. Auch war bis dahin dem Ref. durch keinen Einwand dagegen ein Anlass geboten ihn zu verteidigen. Erst jetzt hat der Verf. in der Wortdeutung ein Mittel gefunden ihn anzufechten. Was er von Verketzerung sagt, ist aus der Luft gegriffen; diese Beschuldigung möchte er doch mit Worten des Berichts belegen. Doch [illegible]z jener Umdeutung und gerade durch die Verkehrung der Auf-

Digitized by Google

einfangen vielfach er mehrerlei in den gemeinsamen Widerspruch, dem sich dieses entgegensetzt, stellt. Auf keine von diesen Art unserer Gegnerschaft, dass es bei oberflächlicher Betrachtung für einen gehalten werden könnte. Der Verf. erwähnt jene Gegnerschaft nicht, sie ist überhaupt für ihn nicht vorhanden. Er verfährt, indem er seine Lehre vorträgt, als wenn es überhaupt keine Gegnerschaft gäbe, als wenn es überhaupt keine Lehre, die seiner Lehre auch nur einen Widerspruch tun könnte, gäbe. Er verfährt, wie wenn er seine Lehre vorträgt, als wenn es überhaupt keine Lehre, die seiner Lehre auch nur einen Widerspruch tun könnte, gäbe. Er verfährt, wie wenn er seine Lehre vorträgt, als wenn es überhaupt keine Gegnerschaft gäbe

Th. Craig: Ueber vierfache Thetafunctionen. — Ueber gewisse Gruppen von Relationen, denen jene genügen. — Ueber Thetafunctionen mit complexen Charakteristiken.

A. L. Daniels: Zwei Noten über Weierstrass' Theorie der elliptischen Functionen.

G. S. Ely: Die graphische Methode angewandt auf zusammengesetzte Teilungen.

Dr. F. Franklin: Note über die Entwickelung eines algebraischen Bruches.

A. S. Hathaway: Einige Aufsätze über die Zahlentheorie.

M. Hermite: Ueber eine Formel bezüglich auf die Theorie der Functionen einer Variabeln.

G. W. Hill: Ueber gewisse mögliche Kürzungen in der Berechnung der langperiodischen Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes infolge directer Einwirkung der Planeten.

E. W. Hyde: Rechnung der Richtung und Lage.

M. Jenkins: Beweis eines Satzes über Teilungen. — Fernere Liste der Correctionen zu Prof. Sylvester's constructiver Theorie der Teilungen.

W. W. Johnson: Die imaginäre Periode der elliptischen Functionen.

E. McClintock: Ueber die Lösungen der Gleichungen 5. Grades.

P. A. Mac Mahon: Semivarianten und symmetrische Functionen. — Note über die Entwickelung eines algebraischen Bruches. — Symmetrische Functionen der Wurzeln einer Gleichung 13. Grades.

H. A. Rowland: Ueber die Fortpflanzung einer beliebigen elektromagnetischen Störung, über sphärische Lichtwellen und die dynamische Theorie der Diffraction.

Ch. H. Smith: Eine graphische Methode der Lösung sphärischer Dreiecke.

W. E. Story: Ueber die absolute Classification der quadratischen Oerter und ihre Schnitte mit einander und mit linearen [illegible]ertern.

J. J. Rivière: Vorlesungen über die Prinzipien der allgemeinen Algebra.

C. A. van Velzer: Zusammengesetzte Determinanten.

E. P. Young: Principles der Lösung von Gleichungen höhern Grades, nebst Anwendungen. — Lösung höherer Gleichungen b. Grades.

Jens Mathematica, Zeitschrift herausgegeben von **G. Mittag-Leffler.** 4. Heftchen 1886. F. u. G. Suhr: Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der Inhalt des 4. Bandes ist:

E. Appell: Über die Functionen dreier reeller Variabeln, die der Differentialgleichung $\Delta^2 u = 0$ genügen.

C. A. Bjerknes: Hydrodynamische Untersuchungen. 1. Die Bewegungsgleichungen und die ergänzenden Bedingungen.

H. Cramer: Von der Möchtigkeit vollkommener Zusammenhänge von Punkten.

G. Darboux: Lobrede auf die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung der orthogonalen Systeme.

H. Goursat: Beweis des Cauchyschen Satzes.

Ch. Hermite und **L. Pasche:** Über eine Entwicklung in Kettenbruch.

Sophie Kowalewski: Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abelscher Integrale 3. Ranges auf elliptische Integrale.

E. Laguerre: Über einige Punkte der Theorie der ausserordentlichen Gleichungen.

L. Matthiessen: Untersuchungen über die Lage der Brennlinien und Brennflächen eines Strahlenbündels gegen einander und gegen eine Kugelfläche.

G. Mittag-Leffler: Über die analytische Darstellung der sogenannten gleichförmigen Functionen einer unabhängigen Variabeln. — Neuer Beweis des Laurent'schen Satzes.

Retrodigitized by Google

H. Poincaré: Ueber die Gruppen der linearen Gleichungen.

L. Scheffler: Beweis des Laurent'schen Satzes.

N. Sonine: Ueber die Verallgemeinerung einer Formel von Abel.

Chr. Zeller: Zu Euler's Recursionsformel für die Divisorensummen.

H.

Litterarischer Bericht
VI.

Physik.

Die Physik im Hörsaal und Laboratorium, der Kunst und der praktischen Lehre. Ein Handbuch von Dr. J. von Kries, Abteilungsvorsteher und der deutschen Sprache in Hamburg, C. Strakwitsch, beim Postamt in Frankfurt a. M., Dr. E. Hartwig, Assistent an der Sternwarte in Strassburg, Dr. H. Grossmann, Professor an der Univ. Erlangen, Dr. P. Riebe, Prof. an d. Univ. Königsberg, Dr. A. Schmidt, Prof. an der Univ. Tübingen, Dr. H. Schwarze, Ingenieur in Leipzig, Dr. A. v. Urbanitzky, Assistent an d. techn. Hochschule zu Wien, Dr. H. W. Vogel, Prof. an d. techn. Hochschule zu Berlin, Dr. J. H. Wallentin, Prof. an Obergymnasium in Ill. Bruck a. Mur, herausgegeben von Dr. G. Krebs, Hochschule an der Hochschule (Hintergymnasium) zu Frankfurt a. M. Stuttgart 1885. Ferdinand Enke.

Das Werk bekundet eine Anzahl mehrer physikalischer Entdeckungen und Erfindungen, welche in der Gegenwart Gegenstand der Forschung bildeten und sind. Es giebt in den folgenden 15 Abschnitten seine Erfindungen und Forschungsergebnisse und so viel von der Theorie und Technik, als zum Verständnis der Zusammenhänge erforderlich ist, mit einigen eingehenden Bemerkungen. Der Verfasser Achilles sind: Vorgeb. in physikalischen Schriften. Lehrbuch der Physik. Handbuch der Physik. Lehrbuch der Physik. Lehrbuch der Physik. Lehr

Kleingewerbes. Urbanitzky: Die elektrischen Maschinen. Wallentin: Kerzen und Lampen. Urbanitzky: Der Kampf des elektrischen Lichtes mit dem Gaslichte. Wallentin: In der galvanoplastischen Werkstätte. Grahwinkel: Die Telephonie und ihre Verwendung im Verkehrsleben der Gegenwart. Hartwig: Auf der Sternwarte. H.

Die Spannungs-Elektricität, ihre Gesetze, Wirkungen und technischen Anwendungen. Von K. W. Zenger, o. ö. Professor der Physik an der k. k. böhm. techn. Hochschule in Prag. Mit 86 Abbildungen. Pest, Leipzig (1884). A. Hartleben. 252 S.

Das Buch gibt genau das, was der Titel sagt. Es eignet sich zur Selbstbelehrung ohne Rücksicht auf Studium und Beruf. Der Inhalt ist selbstverständlich. H.

Die Generatoren hochgespannter Elektricität mit vorwiegender Berücksichtigung der Elektrisirmaschinen im engeren Sinne. Von Dr. Ignaz G. Wallentin, k. k. Professor. Mit 75 Abbildungen. Wien. Pest, Leipzig (1884). A. Hartleben. 271 S.

Auch dieses Buch ist, wie das vorige, zur Selbstbelehrung ohne Rücksicht auf Studium und Beruf eingerichtet. Seine Aufgabe besteht darin, die Apparate in erforderlicher Vollständigkeit zu beschreiben und ihre Wirkungsweise darzulegen. Unter diesen werden nach einander behandelt: die Reibungselektrisirmaschinen, die Elektrisirmaschinen, welche auf den Principien der Influenz und des Transportes der Ladungen beruhen, Apparate nach dem Princip der Metallinductoren, Inductionsapparate als Generatoren hochgespannter Elektricität, Accumulatoren, die rheostatische Maschine. Hierbei werden keine Kenntnisse des Gegenstandes vorausgesetzt, sondern die zum Verständniss erforderlichen Begriffe vorher erläutert, weiterhin auch das zur Messung der Kräfte gehörige Verfahren gelehrt. H.

Die physikalischen Grundsätze der elektrischen Kraftübertragung. Eine Einleitung in das Studium der Elektrotechnik. Von Josef Popper, Mit einer Figurentafel. Wien, Pest. Leipzig (1884). A. Hartleben. 55 S.

In dieser Arbeit war der Verfasser bestrebt, das theoretisch so interessante und praktisch so wichtige Problem der elektrischen Kraftübertragung in seiner grössten Allgemeinheit als elektrischen

Digitized by Google

Transport von Energie überhaupt — in gründlicher und systematischer Weise zu behandeln, um dem Physiker, Elektrotechniker, wie auch dem Unternehmer die Kenntniss aller jener Factoren zu verschaffen, die bei diesem Problem massgebend sind. Um diesen Zweck zu erreichen, wird zuerst eine allgemeine Uebersicht über die verschiedenen Arten von Kraftübertragung überhaupt gegeben, sodann gezeigt, welche Grössen speciell bei dem elektrischen Transport von Arbeit gemessen werden müssen, und welche physikalische Bedeutung denselben zu Grunde liegt; dabei wird der allgemeine Arbeitsbegriff und der sonst so schwierig zu erfassende Begriff des Potentials in leichtfasslicher Weise von der elementaren Mechanik angefangen bis hinein in das Capitel der statischen und dynamischen Elektricität gleichartig durchgeführt und hiedurch auch die Bedeutung der elektrischen Maassmethoden principiell klargelegt. Gegen Schluss der Arbeit werden die für den Elektrotechniker und Unternehmer wichtigen Betrachtungen über die Oekonomie des Betriebes, Ausnützung des Anlagecapitals, Einfluss der Distanzen, der Spannungen u. s. w. in conciser Weise zusammengefasst, so dass sich Jedermann auch von Fall zu Fall ein Urteil zu bilden vermag über jene Umstände, von welchen das Ergebniss einer elektrischen Kraftübertragung abhängt, und welche näheren Detailstudien stets zu machen sind, um eine solche Anlage geschäftlich calculiren zu können. Zur noch grösseren Erleichterung des Verständnisses wird schliesslich der bisher am vollständigsten studirte und gemessene Fall einer elektrischen Kraftübertragung durchgeführt und unter Zugrundelegung des Diagrammes dazu benützt, jede einzelne der conventionell bezeichneten Grössen vor das Auge zu führen und die allgemeinen Begriffe und Betrachtungen an einem speciellen Falle zu illustriren. Nach dem Studium dieser Arbeit wird wohl Jeder eine gründliche Einsicht in das Problem der elektrischen Kraftübertragung gewonnen haben und mit Leichtigkeit im Stande sein, dessen weitere Entwicklung mit selbständigen Urteil zu verfolgen

A. Hartleben's Verlag.

Diesem Urteile treten wir vollkommen bei.

Die Redaction.

Analytische Theorie der Wärme. Von M. Fourier. Deutsche Ausgabe von Dr. B. Weinstein. Mit 21 in den Text gedruckten Holzschnitten. Berlin 1884. Julius Springer. 476 S.

Die Uebersetzung der „Théorie de la chaleur" vertritt zugleich mit dem in Breslau erschienenen unveränderten Abdruck eine neue Ausgabe des Werks, welche lange Zeit gefehlt hat, besitzt aber vor

Digitized by Google

dieser den Vorzug, dass darin nach sorgfältiger Revision der analytischen Rechnungen die zahlreichen Druckfehler des Originals beseitigt sind. In der Abfassung ist nichts geändert, nur haben einige Hinzufügungen stattgefunden: die kleinern Teile haben Ueberschriften erhalten, hin und wieder ist der Calcul des leichtern Verständnisses wegen erweitert, und den Reihenentwickelungen sind überall die Grenzen der Gültigkeit hinzugeschrieben. Anmerkungen sind selten; die Litteratur ist am Schlusse zusammengestellt. Das Originalwerk ist bekannt als bahnbrechend für mathematische Behandlung der Physik, es hat die dazu dienenden Mittel der Analysis bedeutend vermehrt durch die Theorie der trigonometrischen Reihen. Es behandelt die Bewegung der Wärme, hauptsächlich in festen Körpern nebst Ein- und Austritt unter äusseren Einflüssen. Die Hauptabschnitte sind folgende. Nach einer Einleitung, welche die analytische Gestaltung der physikalischen Gesetze vollzieht, kommt: Gleichungen für die Verbreitung der Wärme; Verbreitung in einer unendlichen rechteckigen Halbplatte; variirende Bewegung in einem Ringe; radiale Verbreitung in einer Kugel; desgl. in einem unendlich langen Cylinder; stationäre Bewegung in einem einseitig unendlich langen rechteckigen Prisma; Bewegung in einem Würfel; Diffusion der Wärme; allgemeine analytische Ergebnisse über Integration von Differentialgleichungen und Darstellung von Functionen; Analyse und Grundlage der Wärmetheorie. H.

Das internationale elektrische Maasssystem im Zusammenhange mit anderen Maasssystemen dargestellt von F. Uppenborn, Ingenieur, Redacteur des Centralblattes für Elektrotechnik. (Enthält die Beschlüsse der beiden Pariser Congresse (1881 und 1884) nebst genauer Erläuterung von deren Consequenzen.) 2. Auflage. München und Leipzig 1884. R. Oldenbourg. 26 S.

Das elektrische Masssystem beruht auf dem mechanischen. Obwol man diese Grundlage als bekannt und feststehend zu betrachten pflegt, so war es doch nicht überflüssig eine eingehende Erörterung derselben vorausgehen zu lassen. Einesteils lässt die Wahl der Einheiten Verschiedenheit zu, über welche Entscheidung und Definition erfordert wird: andernteils kommen auch Zweifel über Begriffe vor. Der Umstand, dass das Gewicht meistens auf eine Frage nach der Masse antwortet, verleitet sehr stark dazu den Urbegriff des Gewichts als einer Kraft preiszugeben. Dem ist hier vorgebeugt durch Hinweis auf die Erklärung des Congresses, welche das Grammgewicht als Kraft bezeichnet und die es repräsentirende Masse Grammmasse nennt. Die fundamentalen Einheiten sind nun Centimeter *C*, Gramm-

Digitized by Google

zusatz G und Gutzmann H. Auf die weiteren die formen methodischen Erörterungen des Verfassers, Beschreibungen, Kraft, Ausdauer und des Übungs relativ. Die deren abweichenden technischen Einrichtungen und Arten aufgeführt. Von der Gutzmann'schen Methode wirden das elektrotechnische und elektromagnetische behandelt. Die Gutzmann'schen Apparate, Kraftmesser, Ausdauermesser, Übungsmesser, der Phonometer aus Gummi, Gummiball, Gummiballon, Elektrischer Kraftmesser beschrieben. Elektrischer Kraftmesser nach Kraft. Die dieses kommen für die Gutzmann'schen Apparate und die Zeichnung der Tabellen. Das Personen handelt von den gesetzlichen Bestimmungen und Gutachten. Ki.

Zeitschrift zur Förderung der physikalischen Unterricht. Herausgegeben und redigiert von Physikalisch-technischen Institut, Literat a. Braunschweig. Erster Jahrgang 1888. Berlin 1888. Lieser u. Braunbe.

Diese neue Zeitschrift, welche mit Oktober 1. J. in monatlichen Heften erscheinen soll, will in erster Linie Mitteilungen über Neuerungen im Demonstrationsfache, ferner Berichte über Fortschritte der Elektrizität und, insonderheit Experimente neuangegebene. Beiträge sind auch die Gegenstände der Aufsätze, mit welchen sich die Redaktion Hilfsmittel, besonders Literatur der Physik an dem Unterrichtene wichtigst bieten.

Vermischte Schriften.

Archiv für Mathematik und Naturwissenschaft. Unter Mitwirkung Lie. Werm Weiher ag O. S. Kurz. II. III. IV. V. VI. VII. Band. Nördlingen 1877—1882. 40. Gummiwappen.

Ueber den Anfang einer Zahnrad. 11. Bd. Nr. 113. S. 57. Der S. Nr. 1. Band enthält an mathematischen Abhandlungen:

1. Lie. Neue integrationsmethode der Monge-Ampère'schen Gleichungen. — Einige Bemerkungen zu Herrn Prof. Schlömilch's Aufsatz. — Eine Eigenschaft der Determinanten. Fläche. — Ueber eine Aufgabe Maximalfläche. — Ueber einige algebraische Maximalfläche. — Ueber Curvenbüschel. — Ueber die Bestimmung der Maximalfläche. — Theorie des Flächen Problems P. — Ueber Bestimmung der Maximalfläche. — Ueber die Maximalfläche. — Ueber eine Maximalfläche. — Ueber eine Maximalfläche. — Ueber eine

flächen, II. III. 3. — Bestimmung aller in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung $s = 0$. 4. — Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. 4. 5. — Weitere Untersuchungen über Minimalflächen. 4. — Ueber Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind. 4. — Bestimmung aller Flächen constanter Krümmung. 5. — Discussion der Differentialgleichung $s = F(z)$. 6. — Transformationstheorie einer partiellen Differentialgleichung. 6. — Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Classe linearer partieller Differentialgleichungen. 6. — Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen. 6. — Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden. 7. — Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten. 7. — Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. 7.

S. A. Sexe: Wie man die imaginäre Grösse vermeidet. 4. — Sollte sich nicht ein reeller mathematischer Ausdruck finden lassen, der die Rolle der imaginären Grössen übernehmen und dieselben Dienste leisten könnte wie diese Grössen? 7. —

H. Geelmuyden: Die konische Pendelbewegung. 5. — Bemerkungen über die Theorie des Zodiakallichtes. 7.

Elling Holst: Ueber algebraische cykloidische Curven. 6. — Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Curven. 7. — Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes. 7. — Ein Par synthetische Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen. 7.

J. J. Åstrand: Ueber eine neue Methode zur Lösung trinomischer Gleichungen $n$ten Grades. 6. H.

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. Francesco Gomes Teixeira, Professor de mathematica na Universidade de Coimbra, Socio correspondente da Academia Real das sciencias de Lisboa e da Sociedade de sciencias physicas e naturaes de Bordeaux. Volume III. IV. Coimbra 1881—1883. Imprensa da Universidade.

Der 3. und 4. Band enthalten folgende Abhandlungen.

A. Schiappa Monteiro: Ueber eine im Journal de mathématiques élémentaires (herausgeg. zu Paris von Bourget u. Koehler) gestellte Aufgabe. — Lösung der Aufgabe 17. — Note bezüglich auf descriptive Geometrie über den Schnitt der Flächen 2. Grades. — Lösung der Aufgabe 16. — Note über die Strictionslinie des Hyperboloids. — Lösung der Aufgaben 15. 14. — Ueber die Teilung

Digitized by Google

der Gerade und den Ecken in gleiche Teile, lieferlich auf eine Aufgabe von Newton-Cotes. — Von den Integralen einer Klasse transzendenter Funktionen. Kreise über einen andern Kegelschnitt und über einige geometrische Örter.

J. V. Martinez Fortunato: Über die geometrischen Probleme, welche sich auf die Kegelschnitte beziehen. Übersetzung aus dem spanischen Manuskript. A. d. Arg. Separat-Abdruck aus Band 1 der Revista Industrial. Eine Reihe von Aufgaben über Kegelschnitte, deren Lösung vielfacher bestimmter Integrale. — Darunter einen Satz von Steiner. — Über den Transformationsmodul eines bestimmten Integrals. — Über einige neue Formeln betreffend die Summe der ungeraden Binomialkoeffizienten. — Lösung der Aufgabe 12.

F. Gomes Teixeira: Vorlesungen über die Prinzipien der Infinitesimalrechnung. — Über die Multiplikation der Determinanten.

Pedro Gomes Teixeira: Über einige arithmetische Sätze.

Bernardo Machado: Über einen Satz betreffend die Summe der Binomialkoeffizienten.

J. M. Rodrigues: Über eine Formel von Wronski. — Über die Theorie der Funktionen. — Über eine Formel von Euler. — Ueber eine Formel von Lagrange.

Theodoro Augusto Pires de Moraes.

M. Roger Hansen: Verallgemeinerung der Legendre'schen Formel für $\Gamma(x)$.

Ernesto Luiz Pereira Braga: Eigenschaften der Kegelschnitte.

Duarte Leite Pereira da Silva: Ueber einige interessante Integrale. — Integration einiger Gattungen von $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, wo R eine ganze rationale Funktion 4. Grades ist. — Über eine Problem der elementaren Geometrie.

Ausserdem sind 7 neue Aufgaben, No. 13—19, gestellt, und einige Fachlexikon über verschiedenen Bücher gegeben.

J. Neuberg: Journal von Wolstenholme. Dazu XI. Amsterdam 1884. 2. Folge. 8°.

Der Inhalt der 11. Lieferung ist folgendermaßen in Ungarisch:

L. János Dr.: Über die graphische Auflösung der schiefwinkligen Dreiecke und damit gegebenfalls zusammenhängende und astronomische Aufgaben.

Fr. von Gagl: Die Methode von Hamilton.

Dr. Hieronymus G. Zeuthen: Zwei Sätzen über die Brennlinien der Kegelschnitte. — Ein neuerer Satz über Kreis von Albert Girard, gewissen geometrischen Orten.

Dr. Julius von Zsigmondy: Über die geometrische Verbindung zwischen den Mittelpunkten der Berührungskreise und denen der Ankreise.

Ferner sind mitgeteilt ein Beweis des Ptolemäischen Satzes, welchen ein Schüler 4. Classe der höhern Bürgerschule in Tiel gefunden hat; ein Beweis der Formel für die Anzahl der Combinationen, von W. Mantel; und die in den Winterversammlungen der Wiskundig Genootschap in Amsterdam verhandelten Themata.

H.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Correspondent de l'Académie royale de Belgique, etc. et J. Neuberg, Professeur à l'Université de Liége, Membre de la Société royale des sciences de Liége, etc avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Tome quatrième, année 1884. Gand 1884. Ad. Hoste. Paris, Gauthier Villars.

Der 4. Band enthält folgende Abhandlungen.

P. Mansion: Abriss der Theorie der hyperbolischen Functionen. — Aus dem Leben von W. Snel. — Der 200ste Jahrestag der Erfindung der Differentialrechnung. — Curven mit Verzweigungspunkt. — Erfindung der Differentialrechnung.

Barbarin: Sätze über die Ellipse. — Aufgaben über die Kugel

E. Catalan: Ueber einen Satz von Abel.

Angelo Genocchi: Zusammenstellung verschiedener Untersuchungen über die Ovalen von Descartes und einige andre Curven.

De Rocquigny: Arithmetische Aufgaben.

Gelin: Algebraische Aufgaben.

M. d'Ocagne: Ueber die centralen Transformationen der ebenen Curven.

J. Mister: Schwerpunkt einer abgestumpften dreiseitigen Pyramide. — Schwerpunkt des schräg abgeschnittenen Prismas und Parallelepipeds.

E. Césaro: Untersuchung über Transversalen. — Wahrscheinlichkeit gewisser arithmetischer Facta. — Ueber die innere Gleichung der Curven.

H. Brocard: Aufgaben. — Geometrische Eigenschaft einer gewissen Gruppe von 2 Systemen concentrischer Kreise.

H. Schoentjes: Ueber die Erzeugungsart der Conchoide.

Radicke: Ueber die Summen der gleichhohen Potenzen einer Reihe von Cosinus.

E. Lemoine: Verschiedene Sätze über die Antiparallelen der Seiten eines Dreiecks.

Weill: Ueber ein Zweieck und ein Dreieck aus Kreisbogen gebildet.

Digitized by Google

Anwendung erhält der A. Satz Lösungen vieler in den vorhergehenden gestellter Aufgaben und für eine Anzahl, die sich in Nr. 3 Bd. 2 der Zeitschrift citirt sind Enumerationen. H.

Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Nr. 3. 4. 1883. 104. — 16 + 32 S.

Aus den Vorträgen und Sitzungs-Gegenständen von interessa lerer:

E. Reitz: Ueber die im Werk gewisse Verbindung der Mathematik mit Physik und Technik.

A. Kiehnle: Ueber Cometen- und Cometenbahnen.

H. Liebreich: Untersuchungen über die Absorption weißer homogener Körper.

Fischer: Ueber die Wirksamkeit des Fixsterns Sirius. Bericht der Zusammenstellung der von 1665 bis 1881 erhaltenen 30 Werte für Sirius. H.

W. H. H. Reiss: Ueber den Hallmann-Cavallischen Planimeter.

J. W. Behrendsen: Ueber die Constantenbestimmung der Fouriereihen durch Wahrscheinlichkeitsrechnung bei stark abweichenden Beobachtungen.

P. Jaenicke: Ueber die Bahn der Lemniscate und einige Anwendungen der Elliptischen. — Ueber anomale Dispersion.

Reitz: Ueber das Verhältniss der Fehlergrenzen bei Bestimmung des Ausflusses unter Druckhöhe durch Normalöffnungen.

Kiehnle: Ueber die Anordnung des Begriffs der 7 arithmetischen Operationen von Arbeit an S. Beck.

Reitz: Ueber die Bestimmung der elliptischen Functionen zur Geometrie.

Wagner: Ueber die Abhängigkeit einer Curve und Fläche vom Maße.

Kruse: Ueber die Verwendung der Resultate photometrischer Messungen.

Reitz: Ueber die Entwicklung von Functionen in unendliche Producte.

Kiehnle: Ueber die Bedeutung der Zahl π in den Aufgaben über Berührung der Kreise und Bestimmung von Cometenbahnen.

H. Liebreich: Ueber eine gewisse Function von Configurationen.

— Die achromatischen Verhältnisse des Auges und seine Accommodation. Daraus, daß es Strahlen gibt, welche 4 gegebene Netzhäute schneiden.

P. Jaenicke: Lösung der Gleichung $x^{n+1} + x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$.

Association Française pour l'avancement des sciences. Congrès de Lille 1884. Congrès de la Rochelle 1882. Paris, au secrétariat de l'Association.

Wie aus einem Auszug aus den Statuten zu ersehen, ist die Association Française eine dauernd bestehende Gesellschaft, der Jeder durch Anmeldung bei dem Conseil beitreten kann, mit einem Capital in Teilen zu 500 Francs. Sie unterscheidet Gründer, die wenigstens einen solchen Teil zeichnen, und Mitglieder mit jährlichem Beitrag von 20 francs. Ueber die Congresse in den einzelnen Städten Frankreichs und die aus denselben hervorgehenden Publicationen sind keine nähern Angaben gemacht. Zwei solche Publicationen liegen dem Ref. vor; eine dritte aus dem Congress zu Algier 1881 ist bereits im 275. litt. Bericht besprochen. Die gegenwärtigen sind verfasst von M. E, Lemoine, Ingénieur civil, Ancien élève de l'École polytechnique. Die erste behandelt die Peaucellier'sche Vorrichtung, welche mittelst eines lenkbaren Gestänges bei Führung eines Punkts im Kreise einen andern Punkt in gerader Linie bewegt, ein Princip welches im Auslande mehr bekannt sei als in Frankreich. Die zweite, bestehend aus 2 Arbeiten, leitet 17 neue Dreieckssätze her.

H.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 3^{me} série, t. I.—V. 1881—1883. Bruxelles, F. Hayez.

Die 5 ersten Bände der 3. Reihe enthalten folgende mathematische Arbeiten nebst Referaten über dieselben.

C. Le Paige: Note über die Theorie der Polaren. — Ueber gewisse Covarianten. 1. — Ueber die Curven 3. Ordnung. 1. 3. 4. — Ueber die Theorie der binären Formen für mehrere Reihen von Variabeln. 2. — Ueber die geometrische Darstellung zweier einförmigen Transformationen. 3. — Ueber einige einförmige geometrische Transformationen. 4. — Note über die Homographie 3. Ordnung. — Ueber die Flächen 2. Ordnung. 5.

P. Samuel: Note über ein Instrument zur Beschreibung von Ellipsen. 1. 2.

Folie (gemeinsam mit Le Paige): Ueber die Curven 3. Ordnung. 1. 3.

Catalan: Ueber die Legendre'schen Functionen X_n. — Magisches Quadrat von la Villa Albani (Rom). 2. — Ueber die Addition der elliptischen Functionen 1. Gattung. — Einige Sätze der elementaren Geometrie. 4. — Note über die Theorie der Kettenbrüche d gewisse Reihen. — Ueber eine Doppelreihe. 5.

Digitized by Google

Darboux: Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques. Paris 1896. 2. Aufl. 1914.

Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie. Bd. I, Abt. 1. Leipzig 1876. Bd. I, Abt. 2. Leipzig 1891.

Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie. Bd. II, Abt. 1. Leipzig 1906.

Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie. Bd. III, Abt. 1. Leipzig 1910.

Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie. Bd. III, Abt. 2. Leipzig 1922.

Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie. Bd. III, Abt. 3. Leipzig 1923.

Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie. Bd. III, Abt. 4. Leipzig 1923.

Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie. Bd. III, Abt. 5. Leipzig 1923.

Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie. Bd. III, Abt. 6. Leipzig 1923.

Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie. Bd. III, Abt.

Der Report enthält unter der Ueberschrift: „Record of recent scientific progress" einen übersichtlichen Bericht über die jährlichen extensiven Fortschritte in der Erforschung der materiellen Tatsachen. Dieser Teil des Buchs umfasst etwa die Hälfte des Raumes. Der Bericht erstreckt sich auf folgende Wissenschaften: Astronomie, Meteorologie, Physik, Chemie, Botanik, Zoologie und Anthropologie. Die Theorie wird in keiner derselben berührt, daher ist auch die Mathematik gänzlich ausgeschlossen. Es handelt sich allein um neue Beobachtungen und deren Mittel. H.

Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Vol. IV. V. Published by the co-operation of the Smithsonian Institution. Washington 1881. 1883.

Aus dem Namen „philosophische Gesellschaft" würde man geneigt sein zu entnehmen, dass dieselbe der Pflege der ideellen, theoretischen Wissenschaft gewidmet sei, daher der Mathematik eine vorwaltende Stelle eingeräumt werden müsse. Die Statuten sprechen überhaupt nicht vom Zwecke der Gesellschaft, sondern nur von der Verwaltung, sie beschränken die Gegenstände der Verhandlungen und Publicationen durch keine Festsetzung, nicht einmal auf wissenschaftliche. Die Verhandlungen deuten auf ein gleiches Interesse für ideelle und reale Wissenschaft; das ideelle Interesse lassen die einleitenden Fragen erkennen, auch tritt es in dem ehrenvollen Andenken an den ihr zugehörenden Mathematiker Peirce hervor. Wenn nun gleichwol die Resultate aller publicirten Vorträge auf blosse Ausdehnung materieller Kenntnisse gerichtet sind, so leitet eine Aeusserung von S. Newcomb in einem Vortrag „über die Beziehung der wissenschaftlichen Methode zum socialen Fortschritt" auf eine Erklärung des Umstandes. Er findet, dass in Amerika eine weit grössere Trennung zwischen Wissenschaft und praktischem Leben als in der übrigen civilisirten Welt gemacht wird, nur schreibt er die geschilderte Ansicht dem gemeinen Manne, nicht dem Gelehrten zu. Ohne Zweifel ist aber auch letzterer nicht von diesem Einflusse frei. In Amerika findet die Realwissenschaft auf ihrem bekannten Standpunkt ohne theoretische Vertiefung so viel Verwertung, dass das ideelle Studium nicht daran denkt etwas nützliches zu schaffen und sich sorglos beliebigen Speculationen hingibt. Im vorliegenden Falle kommt weiter hinzu, dass die grosse Ausdehnung des bearbeiteten Feldes jede Concentration unmöglich macht. In den am je zweiten Sonnabend stattfindenden Sitzungen würde ein theoretischer Vortrag ganz vereinzelt bleiben. H.

Digitized by

Atti della R. Accademia dei Lincei anno CCLXXXI. 1883—84. Serie terza. Transunti. Volume VIII. Roma 1884. Tipografia.

In diesem Bande sind folgende mathematische Abhandlungen oder deren Auszüge enthalten.

A. Vitali: Die Abbildungsmöglichkeiten der hyperbolischen Ebene.

S. Robert Paulin: Warum die Gleicher rechtwinkelig.

G. Trudeau: Ueber einige Sätze in der Theorie der Substitutionen. — Die Gruppen zu 5 Dimensionen.

Angeli: Die Determinante einer Tactinie von Curven.

D. Bianconi: Ueber die der Gegenfläche conjugirten Transformationen.

A. Capelli: Ueber die Zusammensetzung der Substitutionsgruppen.

F. Brioschi: Ueber eine Classe von Curven 4. Ordnung.

A. Luigi: Ueber die harmonischen Eliminanten.

E. Beltrami: Ueber die Differentialparameter der Homographie (zweite Note von beliebig vielen Variablen).

V. Vallarino: Ueber die Integrabilität der Gleichungen und nicht holonomen Systeme. — Ueber ein elektrodynamisches Problem.

F. Beniamini: Ein einiges psychologisches Schwierigkeiten, welche sich der Begriffe der Grundzahlen bietet.

G. Mengarini: Methode der Bestimmung des Ohm in absolutem Maass. E.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen herausgegeben von Dr. Otto Böklen, Lehrer der Realschule in Reutlingen. Heft 1. 1883. Tübingen 1884. Fues. Fasc. 96 S.

Diese neue Zeitschrift ist zum Organ der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion der Reallehrerversammlung bestimmt. Aufsätze erscheinen im Heft in gleichen Lieferungen. Das erste enthält 12 Aufsätze, welche zum grössten Teil der reinen Mathematik über die Kegelschnitte angehören. Einzelne Aufsätze sind recht elementar. Bemerkenswert dagegen ist der Aufsatz von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich, über die Anwendung der Methoden der neueren Geometrie auf die Theorie der Kegelschnitte. Dieser Aufsatz ist ein Auszug aus dem Buche des Verfassers: Darstellende Geometrie, 2. Auflage, Leipzig 1883. Teubner. Bd. 2. S. 1—96. Ref.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

VI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, M., üb. d. sogenannten Seqt. d. aegypt. Mathematiker. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

Methode und Principien.

Harms, F., Metaphysik. Hrsg. v. H. Wiese. Breslau, Köhler. 2 Mk. 40 Pf.

Secchi, A., die Einheit d. Naturkräfte. Ein Beitr. z. Naturphilosophie. Uebers. v. R. L. Schulze. 2. Afl. 5. Lfg. Leipzig, Frohberg. 2 Mk.

Siemens, Sir W., üb. d. Erhaltung der Sonnen-Energie. Uebers. v. C. E. Worms. Berlin, Springer. 4 Mk.

Weyrauch, J. J., das Princip v. der Erhaltg. d. Energie seit Mayer. Zur Orientirung. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Sammlungen.

Dölp, H., Aufgaben zur Differential- u. Integralrechnung. 4. Afl. Giessen, Ricker. 3 Mk. 40 Pf.

Heis, E., Sammlg. v. Beispielen u. Aufg. aus d. allg. Arithmetik u. Algebra. 66. Afl. Köln, Du Mont-Schauberg. 3 Mk.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Sammlg. a. allen Zweigen der Rechenkunst etc. 141—155. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Kraft, F., Sammlg. v. Problemen d. analyt. Mechanik. 5. u. 6. Lfg. Stuttgart, Metzler's Verl. à 2 Mk.

Lieber, H. u. F. v. Lühmann, geometr. Konstructions-Aufgaben. 7. Afl. Berlin, Simion. 2 Mk. 70 Pf.

Digitized by Google

Litterarischer Bericht VII

Methode und Principien.

Die Grundlagen der Aesthetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Von Dr. G. Fr i g e, a. o. Professor an der Universität Jena. Breslau 1884. Wilhelm Koebner. 122 S.

Der Hauptzweck der Schrift ist Kritik von Meinungen. Die ist nicht nur der wenigstbeste Leistungen, sondern auch der worauf auch allen Dinge. In der absoluten und die nützen Begründung des Verfahrens, das man den Gegenstand gestellten Urteil, hier begegnet man auch häufig genug Bemerkungen von Interesse. Wenn sich von der Entwickelung der eigenen Ansicht d e s Verfassers nicht ein gleiches Interesse erwecken lässt, so liegt das an der Natur des Gegenstandes. Die eigene Ansicht ist nicht das Ergebniss einer ausführlichen Untersuchung, sondern nimmt nur das Princip e i n, welches der Verfasser nach Verwerfung einer Reihe fremder Ansätze als letzten bei Antlitz suchen können. Gehen wir jetzt der Kritik nach.

Die Kritik der Aufstellungen der Fechnerschen Aesthetik, die den Wesen der Schrift einer Untersuchung entwickelt, und dem Begriff durch dem Gebiete, wo sie unbrauchbar erscheint. Die Grund welche sich Fechner entwickelt, sein daselbst gestellt, ist, wie Fr i g e selbst richtig erklärt, ein, therefore kommt es darauf an, ob die Verwerfung auf dem auf Grund richtig ist. Letzteres Verfahrens, kennt der Schrift nicht; sie hat deshalb nur den positiven Wert

steht dieselbe noch auf dem Standpunkte, wo ihr die Fähigkeit zu urteilen als Endziel der Erkenntniss erscheint, unbekümmert darum, ob uns das Urteil einen Schritt weiter bringt, wo insbesondere von einer Definition nur gefordert wird, dass die irgend woher zusammengesuchten und ausprobirten Bedingungen alles unter den Begriff fallende ein-, alles andere ausschliessen, gleichviel ob sie mit der Bedeutung des Begriffes etwas zu tun haben oder ihr fremd sind. Der Begriff ist einem solchen Logiker nicht eine Errungenschaft, sondern ein vorgefundenes Stück, das er in Arbeit nimmt, wie der Chemiker das Fossil oder den Meteorstein. Bezeichnend in dieser Beziehung ist die Auslassung der Einleitung auf Seite III. Der Verfasser nennt es betrübend und entmutigend, dass schon errungene Erkenntnisse wieder verloren gehen, weil sich die Schuldoctrin mit ihrer „rohen" Auffassung des Zahlbegriffs begnügt und die von Herbart gegebene Richtigstellung als überflüssig bei Seite lässt, ein Schicksal das hiernach wol auch sein Untersuchungsergebniss treffen werde. Da der Verfasser dem Gedanken nicht Raum giebt, dass die angeblichen Verbesserer die Schuld ganz oder zum Teil selbst tragen, so muss hier an Folgendes erinnert werden, was die Erscheinung wol genügend erklären wird. In der Entwickelungsgeschichte der exacten Begriffe, die der Verfasser gänzlich ignorirt, lassen sich 3 Stadien unterscheiden: 1) bis zur objectiven Gestaltung der Vorstellungen und Begriffe, 2) bis zur Gewinnung exacter Fundamentalbegriffe, 3) von da an die Theorie bis zum heutigen Standpunkte umfassend. Jedes Stadium schliesst mit einer deutlichen, entschiedenen Leistung, die mit der Elimination aller der Merkmale verbunden ist, die im neuen Stadium ausser Anwendung kommen. Als hervorragende Beispiele mögen genannt werden im ersten Stadium die Elimination der ophthalmocentrischen Data bei Bildung des Körper- und Raumbegriffs, im zweiten die Elimination der individuellen Unterschiede bei Bildung des Gattungs- und Zahlbegriffes, durch welchen die articulirte Sprache bedingt ist, im dritten die Elimination des Grössenursprungs in Zahl und Ausdehnung bei Bildung der Begriffe der Analysis. Die Mathematik der Schule bewegt sich im dritten Stadium und setzt die Erzeugnisse des zweiten voraus, wenn auch der Unterricht vielleicht propädeutisch auf das zweite zurückgreift und in Definitionen und Axiomen das Erworbene formulirt. Was eliminirt ist, hat auf den Fortgang der zu lehrenden Theorie keinen Einfluss. Der Anfänger weiss, dass er Aepfel und Glockenschläge mit Hülfe derselben Begriffe (der abstracten 1, 2, 3, etc.) zählen kann, und begegnet beim Erlernen der Arithmetik keiner fundamentalen Lücke seines Wissens. Wenn nun Frege von ihm eine befriedigende Antwort auf die Fragen, was Einheit und was Zahl sei, verlangt, so sind wir doch gewiss ebenso berechtigt ihn zu fragen, was die von ihm geforderten

Digitized by Google

Ernste oder Leichte und Tolle, wie es auf Reisen zu gehen pflegt. Die Einleitung schwankt. Wenn Heine Recht hat, daß man seine Memoiren unmittelbar beginnen kann, wo es sich darauf ankommt, sich selbst zu schildern, so ist es ihm hier nicht gelungen. Er hat sich nicht gefunden. Er hat sich nicht gefaßt. Er bedarf von Zeit zu Erinnerungen, welche dem Leser die Gestalt des Autors, welche dem Autor sich selbst vergegenwärtigen sollen, dem Leser — aber, wie dem Verfasser nicht von den Lippen, sondern aus der Feder fließen. Es ist ein Unterschied, ob man sich mündlich oder schriftlich ausdrückt, und die Forderung vorliegt, daß man sich schriftlich ausdrücken soll. Wenn wir das Leben nicht, wie es sich zeigt, dem Verfasser Preis für Preis, seine er eine eigene Bemerkung, sich selbst eine weniger verschleiern würde, als er es in seinen Memoiren thut. Wir wollen nicht sagen, daß die Bekenntnisse des Verfassers eine Faschingsmaske sind, aber wir können nicht leugnen, daß sie uns so scheinen. Der Autor handelt nicht wie ein geschickter Maler, der sich selbst malt, was man will, sondern, was er will. Er will sich nicht, wie er ist, sondern, wie er sein will, darstellen

nächst die, sich im Finstern nicht zu stossen. Der Arithmetiker empfindet sie nicht, weil er der Frage den Rücken zukehrt. Aber auch der begegnet keiner Schwierigkeit, welcher die Entwickelung des Begriffs von Anfang an verfolgt. Jedenfalls ist es sehr begreiflich, dass von keiner Seite eine Nachfrage nach der angeblichen Lösung stattfindet, wo sie von der einen leicht entbehrt, von der andern leicht vollständig gegeben werden kann.

Folgende Stelle der Einleitung p. V. scheint auf das Vorstehende Bezug zu haben. „— — Eine gründliche Untersuchung des Zahlbegriffs wird immer etwas philosophisch ausfallen müssen. Diese Aufgabe ist der Mathematik und Philosophie gemeinsam. Wenn das Zusammenarbeiten dieser Wissenschaften trotz mancher Anläufe von beiden Seiten nicht ein so gedeihliches ist, wie es zu wünschen und wol auch möglich wäre, so liegt das, wie mir scheint, an dem Ueberwiegen psychologischer Betrachtungsweisen in der Philosophie, die selbst in die Logik eindringen. Mit dieser Richtung hat die Mathematik gar keine Berührungspunkte, und daraus erklärt sich leicht die Abneigung vieler Mathematiker gegen philosophische Betrachtungen.“ Dies bestätigt zum Teil direct das Gesagte: der Mangel an Erfolgen der philosophischen Mitwirkung wird eingeräumt. Dass der behauptete Grund davon gerade der entgegengesetzte ist, legt jene unklare Begriffsmischung der doctrinären Logiker an den Tag, welche Mittel und Wege der Erkenntniss von ihrem Product nicht unterscheiden können. Allerdings hat die Mathematik als fertiges Product mit psychologischer Betrachtungsweise nichts zu tun; denn dass dasselbe vollkommen objectiv sei, ist eben die Forderung der Wissenschaft. Aber die ganze Arbeit, welche das Product schafft, die Wahl der Transformationen, die Bildung geeigneter Begriffe, die Beweise, überhaupt alles, was einen Zweck verfolgt, sind ihrer Natur nach psychische Vorgänge; wer darüber principiell und allgemein urteilen will, darf gegen die psychische Natur des Gegenstandes nicht blind sein, und das ist es doch, was der Verfasser mit der Abweisung der psychologischen Betrachtung schlechthin fordert. Der doctrinäre Logiker pflegt in der Täuschung befangen zu sein, er könne der Ueberzeugungskraft der Beweise bestimmte Formen der Schlüsse unterlegen. Er wird aber nicht gewahr, dass er sich auf das Allersubjectivste und noch dazu das Unwissenschaftlichste stützt: auf den Glauben an die unverstandene Wunderkraft der Schlussformen und auf seine eigene Unfähigkeit anders zu denken. Hat nun der Verfasser richtig bemerkt, dass die logischen Fragen in neuerer Zeit mehr und mehr psychologisch in Angriff genommen werden, so kann man wol zugeben, dass dies Untersuchungsgebiet dem rein theoretischen Arithmetiker ferner liegt als das der formalen Logik; nur er-

Digitized by Google

hätte der Umstand wohl, daß sie die dahin einschlagenden Arbeiten eigene gesellschaftliche Zusammenarbeiten hätten in Gang stehen können, sie nicht abhalten sollen, sich mit der Angelegenheit zu befassen, wenn sie sonst dazu Lust hätten. Die Schuld an diesen Verwirrungen möchte der Verein auf sich nehmen, wenn er meine Absicht, die Sache zu fördern, nicht erkennt.

Nach der Erörterung folgten die Anträge, welche, wie bereits erwähnt, in Vorschlägen über Ausstellungen, Wettbewerb, Archivalien, Adressbücher". Es ist eine Art Chaos, welches gewissermaßen von jeglicher bisherigen Unterordnung befreit zu werden pflegt, obgleich solche in besseren ist, dass die betreffenden Fragen wieder aufgenommen werden, indem in weiteren nicht darauf Bezug hat. Im Vorliegenden ist es nicht anders, und wenn auch Einzelnes sich wiederholt, so waren die sehr wichtige und wenn auch manches Bedenken gegen einzelnen Thatsachen folge nicht". Hiermit aber schlossen der Vorsitzende, „Wenn man überhaupt allgemeine Vorschläge machen wollte, Andreae rief: richtige Wirkung erwarten, so muss man auch sagen, dass es nicht Sache der Versammlung sei, sich mit Einzelheiten zu befassen, Mittel sich wählen". Er selbst theile Ansichten, Sorgen und Wünsche, welche in Bezug auf Ausstellungen, Wettbewerb, Archivalien, Adressbücher" hegen, Ausdruck gegeben haben. Ebenso stellt sich die obige Anordnung der Dinge gerade viel nur so dar, dass sie Einzelheiten nicht, sondern Mittel sich. Was also ganz einfache Bestrebung des Zugrundeliegenden Gedankens

auf blosse recurrente Definition von 2, 3, 5 gestützt, eine Lücke enthält, wird keiner Einwendung begegnen. Wenn hingegen der Verfasser der Behauptung Mill's, dass die Definitionen der Arithmetik beobachtete Tatsachen enthalten, mit der Frage entgegentritt: welche beobachtete Tatsache in der Definition der Zahl 777864 behauptet wird; wenn er ferner es misslich nennt, einen grundsätzlichen Unterschied zwischen kleinen und grossen Zahlen zu machen, so scheint doch alles Verständniss für empirische Erkenntniss zu fehlen. Nehmen wir den Fall, jemand lese eine unendliche Reihe, welche wie oft geschieht durch Angabe der Anfangsglieder ausgedrückt ist; dann wird er in der Tat das millionste Glied auf Grund einer Beobachtung erkennen, aber nicht wie der Verfasser meint der analogen Beobachtung eben dieses Gliedes, sondern etwa des 2ten und 3ten Gliedes, so viele deren genügen das Gesetz des Fortschritts daraus zu entnehmen. Hier ist wirklich ein Unterschied zwischen kleinen und grossen Zahlen vorhanden; die Theorie ist davon frei, aber für ihre Basis ist dieses psychische Element unentbehrlich. Ebenso genügt die Beobachtung an kleinen, vorstellbaren Zahlen zur Entdeckung, dass zur recurrenten Begriffsbestimmung die Specialität der Zahl nicht mitwirkt, mithin zur Gewinnung eines Begriffs von unbegrenzter Ausdehnung. Da Frege, wie aus vielen Aeusserungen hervorgeht, kein Werden der Begriffe kennt, so ist ihm erklärlicherweise der Fall nicht in den Sinn gekommen, dass bei Bildung eines homogenen Begriffs zwischen Anfang und Vollendung ein heterogener Geistesact als notwendiges Glied eintreten, der einfache Begriff auf zusammengesetztem Boden stehen könne, obwol dieser Fall, wie z. B. bei der Function a^x, bekannt genug ist. Frege nennt es ein Vorurteil von Mill, dass alles Wissen empirisch sei. Nach seiner Logik ist es also ein Vorurteil, dass man erklären kann, was er als auf einem Urwissen beruhend unerklärt lässt: analog ist es dann auch ein Vorurteil der Baumeister, dass man Häuser bauen kann! Gewöhnlich aber spricht man von Vorurteil, wo eine Meinung der Erkenntniss hinderlich ist, und das trifft gewiss zu bei Frege's Meinung über die empirischen Wissenschaften, deren wesentliches logisches Organ er irrigerweise im Inductionsschluss sieht, denn diese hindert ihn von der erfolgreichen Logik der Empirie Kenntniss zu nehmen. Aus dem Mitgeteilten lässt sich nicht beurteilen, ob Mill eine richtigere Auffassung der Empirie besass; denn das Wesentliche darin würde doch bei der Wiedergabe unbeachtet geblieben sein. Dass Mill für jede Zahl eine besondere Beobahtung fordere, ist nur Frege's Conjectur aus unzureichenden Gründen, von Mill nicht ausgesprochen.

Die ferneren Fragen sind folgende: Sind die Gesetze der Arith-

Digitized by Google

metik inductive Wahrheiten? Sind sie syntheticch apriori oder analytisch? Die Fragen über die Anzahl lauten: Ist sie eine Eigenschaft der äussern Dinge? Ist sie etwas subjectives? Die über Einheit und Eins: Drückt das Zahlwort „ein" eine Eigenschaft von Gegenständen aus? Sind die Einheiten einander gleich? Ueberall leidet die Untersuchung bei aller Vielseitigkeit an demselben Mangel, an dem Ausserachtlassen der Genesis. Aus vielem Argumentiren kommt heraus, dass die Anzahl, soviel sie auch subjective Seiten zeigte, doch objectiv sei. Das war nun eigentlich durch die Existenz der Arithmetik vorher bekannt. Vermischt man aber mit diesem auf das dritte Stadium bezüglichen Urteile solche aus den frühern Stadien, so darf man sich nicht wundern, wenn manches unvereinbare zutage kommt. Ein Fall derart liegt vor, wo der Verfasser bei Abschluss der Kritik fremder Meinungen die restirende Schwierigkeit findet: wir müssten denselben zufolge den Einheiten zwei widersprechende Eigenschaften beilegen: die Gleichheit und die Verschiedenheit. In der Tat ist die Verschiedenheit im ersten Stadium notwendig als Motiv zum Zählen, im dritten die Gleichheit der Einheiten als Gegenstand der Theorie; die Verschiedenheit ist im resultirenden Begriff eliminirt, ein Widerspruch weder da noch hier vorhanden. Unter der Ueberschrift: „Lösung der Schwierigkeit" — werden zunächst folgende Urteile über die Zahl zusammengestellt, welche aus den vorhergehenden Betrachtungen stammen. Die Zahl ist nicht in der Weise wie Farbe, Gewicht, Härte von den Dingen abstrahirt, nicht in dem Sinne wie diese Eigenschaft der Dinge. Sie ist nichts physikalisches, aber auch nichts subjectives, keine Vorstellung. Sie entsteht nicht durch Hinzufügung von Ding zu Ding. Die Ausdrücke Vielheit, Menge, Mehrheit sind wegen ihrer Unbestimmtheit ungeeignet zur Erklärung der Zahl zu dienen. Die Abgegrenztheit, die Ungeteiltheit, die Unzerlegbarkeit sind keine brauchbaren Merkmale für das, was wir durch das Wort „Ein" ausdrücken. Wenn man die zu zählenden Dinge Einheiten nennt, so ist die unbedingte Behauptung, dass die Einheiten gleich seien, falsch. Dass sie in gewisser Hinsicht gleich sind, ist richtig aber wertlos. Die Verschiedenheit der Dinge ist sogar notwendig, wenn die Zahl grösser als 1 werden soll. Es ist ein Unterschied zwischen Eins und Einheit zu machen. Das Wort Eins ist als Eigenname eines Gegenstandes der mathematischen Forschung eines Plurals unfähig. Es ist also sinnlos Zahlen durch Zusammenfassen von Einsen entstehen zu lassen. Nach allen diesen negativen Merkmalen, denen keine problematische positive Bestimmung, d. h. Aussage, wozu der Begriff notwendig ist, was er leistet, gegenüber gestellt wird, erwartet man nun wenigstens die Erklärung des Verfassers, welche Stelle er selbst dem Begriffe zuerteilt, womit freilich auch nur eine neue Meinung aufgestellt wäre, während er

schlechthin eine Lösung versprochen hat. Aber diese Erklärung folgt nicht, sie scheint vergessen zu sein; denn nachdem die Schrift in Betrachtungen und Erwägungen noch einige Seiten fortgefahren hat, ist einmal, dann öfters von der Ansicht des Verfassers, als wenn sie vorher ausgesprochen wäre, die Rede. Soviel sich nun aus dem, was zu ihrer Verteidigung gesagt wird, entnehmen lässt, besteht die gedachte Ansicht darin, dass die Zahl als Merkmal am Gattungsbegriff haftet, so dass z. B. die Begriffe Jupitersmond, Angehöriger des deutschen Reichs sich verändern, wenn bzhw. ein fünfter entdeckt, ein neuer geboren wird — Beispiele die der Schrift entlehnt sind. Für diese Ansicht werden allerhand Bestätigungen zusammengesucht, ohne auch nur das Allerbekannteste zu erwähnen, womit sie im Widerstreit steht. Schon aus der Grammatik, wenn sie auf die logischen Verhältnisse etwas näher eingeht, ist bekannt, dass Gattung und Zahl zwei sich einander ergänzende Begriffe sind, deren Leistung durch ihre Sonderung, durch die Fähigkeit unabhängig von einander zu variiren bedingt ist. Dasselbe lehrt der gewöhnliche Gebrauch. In der Isolirung der Bestandteile, welche einzeln variiren können, liegt der Fortschritt der Erkenntniss, indem daraus der constante Bestandteil, der sich als dauernder Begriff festhalten lässt, gewonnen wird. Diesen Forschritt, und damit die ganze Bedeutung der Begriffe Gattung und Zahl macht der vorliegende Versuch zunichte. Erwähnt mag noch sein, dass der Verfasser die Null als diejenige Zahl definirt, welche einem in der Wirklichkeit nicht repräsentirten, vielleicht sogar unsinnigen Begriffe als Merkmal zugehört. Das Genannte wird wol zur Genüge gezeigt haben, dass der Verfasser sehr mit Unrecht die Arithmetiker getadelt hat, welche von seiner Belehrung keinen Gebrauch machen. Hoppe.

Der Grenzbegriff in der Elementar-Mathematik. Von Heinrich Vogt, Programm des Königl. Friedrichs-Gymnasiums zu Breslau 1885. 53 S.

In der Einleitung sagt der Verfasser, das Vorhandensein von Axiomen sei für die Elementarmathematik keine Schwierigkeit; denn der Anfänger könne begreifen, warum sie notwendig sind. Dagegen gebe es Schwierigkeiten in den Grundbegriffen, namentlich im Begriff der Grenze. Es ist schon auffällig, dass er den Doppelsinn dieses Wortes nicht gleich bei erster Nennung hebt, noch mehr aber, dass er wirklich in beiderlei Sinne von Grenze spricht, als ob es dieselbe Sache wäre, so dass man kaum umhin kann anzunehmen, das ihn der gleiche Terminus dazu verführt hat zwei ganz unähnliche Begriffe zu mischen. Dieser Umstand allein würde ihm Grund genug

Digitized by Google

prüfen können. Gelehrsamkeit an sich besaß er nicht viel. Seine Lessings Wesen Gelehrsamkeit stand mit seiner Art zu arbeiten, Schaffen, Schreiben, Denken, ja mit seiner ganzen Persönlichkeit in Zusammenhang. Darum ist es wenig wert, Einzelheiten aus der Gelehrsamkeit Lessings zu sammeln, wenn man nicht zugleich seine Persönlichkeit, sein Wesen kennt. Die Persönlichkeit Lessings ist aber so eigenartig, daß sie sich nicht in Einzelheiten auflöst. Er liebt vielmehr die Extreme, nimmt am liebsten eine Position ein, die zwischen zwei Extremen liegt, wirft, wenn er sich verteidigt, mit unbarmherzigen Hieben, und wo er angreift, mit unbarmherzigen Hieben, kann also verschiedene Temperate besitzen, nie aber einen gemäßigten. Was will der Verfasser des preußischen Kriegsliedes damit sagen? Meint Lessing, weil Gleim in seinen Kriegsliedern Preußen und Deutschland mit Sparta und Rom vergleicht, und dann verschiedene Helden aus der Geschichte dieser Völker aufzählt, die ungefähr denselben Wert haben wie Gleims Helden, so sei Gleim ein Spartaner oder Römer? Oder meint er, Gleim sei ein Spartaner oder Römer, weil er sich selbst mit Tyrtäus vergleicht? Wenn Lessing das meint, so ist es ein Irrtum. Gleim ist weder Römer noch Spartaner, sondern ein Deutscher, und zwar ein deutscher Anakreontiker. Und er ist es nicht nur in seinen Liedern, sondern auch in seinen Kriegsliedern. Er ist es in seinen Kriegsliedern, weil er sich nicht vorstellen kann, daß man sich für sein Vaterland anders begeistern könne, als wie man sich für Wein und Liebe begeistert

H. Krey: Einige Anzahlen für Kegelflächen.

E. Goursat: Ueber eine Classe von Doppelintegralen.

E. Picard: Ueber die unbestimmten ternären quadratischen Formen zu conjugirten unbestimmten und über die entsprechenden hyperfuchsischen Functionen.

C. Le Paige: Neue Untersuchungen über die Flächen 3. Ordnung.

H. G. Zeuthen: Ueber die einer kubischen Fläche eingeschriebenen Pentaeder.

H. Schroeter: Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.

H. Poincaré: Abhandlung über die zetafuchsichen Functionen.

Ch. Hermite: Ueber einige arithmetische Folgerungen aus den Formeln der Theorie der elliptischen Functionen.

W. Fiedler: Ueber die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen. H.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Naturkunde. Tweede reeks. Negentiende, twintigste deel. Amsterdam 1884. Johannes Müller. 441 + 452 S.

Der 19. und 20. Teil enthalten folgende mathematische Abhandlungen:

T. J. Stieltjes: Ueber die quadratische Zerlegung von Primzahlen der Form $3n+1$. (19).

C. le Paige: Ueber die Flächen 3. Ordnung. (19).

F. de Boer: Erweiterung des Satzes von Rolle. (19). — Discussion der allgemeinen Gleichung 4. Grades. (20).

P. H. Schoute: Ueber eine specielle Curve 4. Grades mit 3 Doppelpunkten. (19).

J. A. C. Oudemans: Das Problem des Snellius aufgelöst von Ptolemaeus. (19).

D. J. Korteweg: Ueber die Bahnen beschrieben unter dem Einfluss einer centralen Kraft. (20).

G. J. Michaëlis: Ueber die Theorie der Federkraft-Nachwirkung. (20).

D. Bierens de Haan: Baustoffe für die Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften in den Niederlanden. (19. 20.). H.

Digitized by Google

Litterarischer Bericht
VIII.

Lehrbücher.

Leitfaden zum Unterrichte in der Arithmetik und Algebra an Gymnasien und verwandten Anstalten. Von Dr. Joh. Chr. Walberer, Professor am königlichen Gymnasium in Amberg. Zweite, durchgesehene und mit Uebungsaufgaben versehene Auflage. München 1884. Theodor Ackermann. 152 S.

Die erste Auflage ist im 241. litt. Bericht, S. 4. besprochen. Das Buch steht auch noch jetzt auf dem niedrigsten didaktischen Standpunkt. Die Sätze der Arithmetik werden nur als Auswertungsregeln aufgefasst, und selbst in diesem Sinne bleiben die Erklärungen defect. Die Division ist nur als Messung durch wiederholte Subtraction, nicht aber als Teilung erklärt. Sollte man nach der gegebenen Regel 4 Meter durch 4 dividiren, so hätte man die abstracte 4 so oft davon zu subtrahiren bis kein Rest bleibt. Dass auch sinnlose Aufstellungen, wie $\frac{a}{0} = \infty$, vorkommen, kann kaum auffallen, wo die ganze Behandlungsweise auf gedankenloses Rechnen abzielt.

H.

Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Arithmetik an höheren Lehranstalten. Von Prof. H. Köstler, Oberlehrer am Domgymnasium zu Naumburg a. S. Zweite, vermehrte und teilweise umgearbeitete Auflage. Halle a. S. 1885. Louis Nebert. 42 S.

Der Leitfaden enthält auf 15 Seiten diejenigen Sätze, welche der Anfänger erlernen muss, um mit den 4 Species der Buchstabenrechnung vertraut zu werden, nebst Andeutung der Beweise. Die

Formulirung ist deutlich und correct. Was die Grenzen des Lehrstoffs betrifft, so ist die Bedeutung der Buchstaben auf positive ganze Zahlen beschränkt, die algebraische Division nicht zugezogen. Dagegen ist die Rechnung mit algebraischen Summen nicht, wie im Vorwort angegeben, ausgeschlossen, vielmehr + und — als Operations- und Vorzeichen eingeführt, und alles dafür nötige erklärt und in Uebung gebracht. Auch die Addition der Brüche fehlt nicht, und ist in einem Anhang zur Bildung der Generalnenner Anleitung gegeben. Ein zweiter Anhang betrifft die Decimalbrüche. Unrichtig ist in dem Buche nur die anfängliche Definition des Begriffs Rechnen, die mit allem was folgt im Widerspruch steht. Aus zwei oder mehrern Zahlen nach gewissen Regeln eine neue bilden nennt in praxi niemand rechnen, auch im folgenden der Verfasser nie. Vielmehr entsteht durch diesen Act erst ein Rechnungsausdruck, enthaltend eine Rechnungsaufgabe, die unter Umständen ausgeführt werden soll oder kann. Das letztere heisst hier stets ausrechnen, und ein anderes Rechnen kommt nicht vor. Den noch grössern übrigen Teil des Buchs bildet eine Zusammenstellung von 357 Aufgaben zur Einübung der vorher behandelten Rechnungsweisen, nach diesen geordnet.

H.

Vorschule der Geometrie. Von Prof. H. Köstler, Oberlehrer am Domgymnasium zu Naumburg a. S. Dritte, vermehrte und teilweise umgearbeitete, und vierte, verbesserte Auflage. Mit 49 in den Text gedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1884. 1885. Louis Nebert. 24, 21 S.

Diese Vorschule besteht aus 2 Teilen, der Formenlehre und der Constructionslehre. Der actuellen Abfassung nach stellen sich beide als Auswahl aus dem Lehrstoff der elementaren Geometrie ohne merklich verschiedene Gestaltung dar. Die Formenlehre macht den Schülern mit den Gegenständen der Doctrin, also mit den einfachen Gebilden und den gebräuchlichen Festsetzungen bekannt, wendet dazu jedoch auch nur die gleichen Definitionen und Worterklärungen an. Der Verfasser betrachtet als Aufgabe der Formenlehre, den Schüler von der sinnlichen Anschauung zur Abstraction der begrifflichen Erklärung emporzuführen, die Aufstellungen des Buchs als die blossen Resultate, deren Erreichung dem Lehrer überlassen bleibt. Sowol die zu befolgende Methode als auch die Art der Tätigkeit der Schüler wird unbestimmt gelassen. In der Constructionslehre ist letztere von selbst deutlich. Sie soll den Gebrauch von Lineal und Zirkel einüben, es sind zu diesem Zwecke die einfachsten Elementaraufgaben ausgewählt. Am Schluss werden zur Formenlehre Fragen, zur Constructionslehre Aufgaben gestellt.

H.

Digitized by Google

Lehrbuch der ebenen Geometrie. Von Julius Hoch, Lehrer der Mathematik an der von Grundschule'schen Realschule in Berlin. I. Teil: Linien, Winkel, Kongruenz und Gleichheit der Figuren. Mit 161 Figuren im Text. Leipzig, Göschen'sche Verlagshandlung. 1900. 8. Schmidt. 144 S.

Die vorliegende Arbeit entspricht der Abfassung und Weise nach vollständig einem unserer Lehrbücher der Geometrie, welche in unserer Zeitschrift Anzeige und Besprechung gefunden haben. Dieses trifft auch in der That zu einer Weise, welche ein geschickt gewähltes Übungsmaterial, Schlussfolgerungen auf sich anschließenden Figurenteile und schwierigeren Folge der einzelnen, Übungen ganz wichtigen Theoremen darbietet an den Tag. Ob es das Ansinnen des Verfassers sei, dass der Unterricht nach einem so beschaffenen Lehrbuche, wie es vorliegt, sich gestalte, ist nicht ausdrücklich gesagt und der Vorrede Verfassung, die Anregung, welche sie bietet, ist genügend, um zu Vermutungen anzugeben; doch darf man wohl annehmen, dass er sein Buch nicht in blosser Übungsbuch-methode behandelt hat benutzen wollen. Eine Vorzugsstellung der Übungsbuchmethode, welche sie vor anderen Methoden haben soll, will es bestreiten die Ansicht des Verfassers, dass sie eine Methode selbsttätiger Form gegeben, dagegen stelle ein prinzipieller Mangel den logischen Unterschied in der Folge. Es ist gegen, dass sie nicht auf der Bestimmung des Bildungsunterrichtes dient, aber nicht, wie die Geschichte, wie Naturwissenschaften und Sprachen, durch Anregung und Übung, was die Vorbildung für Richtungen bei verschiedenen Individuen ausmacht, sondern durch Übung, was die Vorbildung für Richtungen bei allen Individuen auch sein kann, was Wissen ist von Indem, Ort, und der logischen Folge lässt sich allgemein verfahren. Wenn die Anordnung der Figuren und Übungen nicht nach Gegenstand, sondern nach Gebieten: Linien, Winkel, Figuren, Ort u. Kongruenzlehre eine Übungsbuchmethode ist, so ist sie nicht nach der Methode, welche nach der Natur des Stoffes, das Theorem, das Problem, das Axiom, die Konstruktion und Übung, Analysis und Synthese, Beweis und Konstruktion, Lehrsatz und Aufgabe, Definition

Die Uebungssätze und Aufgaben sind vermehrt und insbesondere dafür gesorgt, die schwierigeren Aufgaben durch leichtere vorzubereiten. Ferner unterscheidet sich die neue Auflage durch manche Zusätze und Erweiterungen. In der Proportionslehre wird der Fall der Incommensurabilität erwähnt, und die Gültigkeit eines Satzes für denselben in einem Zusatz ohne Beweis ausgesprochen, doch findet er weder verständliche Erörterung noch theoretische Berücksichtigung.

H.

Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten. Von Dr. F. W. Fischer, Oberlehrer am Gymnasium zu Kempen. Erster Teil: Planimetrie. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Freiburg i. Br. 1884. Herder. 184 S.

Der Inhalt des Buches ist kein abgeschlossener. Obgleich der Lehrgang von seiner Aufgabe der Entwickelung der Grundlagen der Doctrin nie abweicht, so begrenzt er sich doch nach keiner Seite hin auf ein bestimmtes Quantum des Notwendigen, sondern zieht im weitern Fortschritt mehr und mehr Themata und Fragen nach dem Gesichtspunkt des Interesses der Schüler in den Kreis der Betrachtung. Besonders zu nennen sind etwa die Transversalenlehre, Fragen über Maxima, Pol und Polare am Kreise, harmonische Teilung u. a. Die Methode steht auf Euklidischem Boden. Die Darstellung ist ausführlich und darauf eingerichtet dem Schüler als Muster zu dienen. Nicht ausführlich genug ist der Anfang der Lehre von den Winkeln. Der Winkel war durch seine Entstehung erklärt. Zur exacten Auffassung mussten die Consequenzen der Erklärung für die fertig vorliegenden Winkel, d. h. die Sätze über Addition und Grössenvergleichung der Winkel ausgesprochen werden. Unter dem Parallelensatz steht ganz unzutreffend: „Beweis" — denn es folgt dann nur die wiederholte Behauptung des Satzes in anderer Form. Die Elementaraufgaben sind von den Lehrsätzen getrennt. Ausser ihnen folgen auf jeden Abschnitt viele Aufgaben und Sätze zur Uebung.

H.

Leitfaden für den Unterricht in der Stereometrie mit den Elementen der Projektionslehre. Von Dr. Carl Gusserow, Oberlehrer am Dorotheenstädtischen Realgymnasium in Berlin. Berlin 1885. Julius Springer. 96 S.

Die Lehrmethode dieses Leitfadens ist durchaus originell. Sie unterscheidet sich von der gewöhnlichen durch die anfängliche Ein-

Digitized by Google

führung und unausgesetzte Anwendung des Projectionsbegriffs. Derselbe dient grösstenteils zur Deduction, während die resultirenden Sätze davon unabhängig auftreten; doch gibt es ausser den Sätzen, welche die Projectionen an sich betreffen, auch Sätze über Raumgebilde, die mit Anwendung des Begriffs formulirt werden; jedenfalls scheint nicht zum Ziele genommen zu sein, die erzeugte Mannichfaltigkeit der Betrachtung, wo sich dies nicht von selbst vollzieht, zu einer einheitlich constanten hinzuführen. Die hier eingeführten Projectionen sind Parallelprojectionen in beliebiger Richtung auf beliebige Ebenen, nicht aber auf feste, gemeinsame Grundebenen, sondern auf solche, die zur Figur gehören. Der Begriff ist also ein ganz flüssiger, beweglicher auf einem Felde von doppelt unendlicher Mannichfaltigkeit. Fragt man nun: kann ein Schüler auf dem so eröffneten Felde der Betrachtung in dem kurzen Laufe des elementaren stereometrischen Lehrcursus orientirt werden und einigermassen einen Ueberblick gewinnen? — so muss man dies wol entschieden verneinen. Nur der Lehrer macht sich seine Aufgabe durch diese Methode leicht, die Schüler werden ganz abhängig von seiner Führung. Dass der bezeichnete Missstand nicht grössere Ausdehnung annehmen kann, bewirkt in der vorliegenden Gestaltung der Doctrin die Reihe feststehender Sätze. Wäre das Ganze so in den Projectionsbegriff verwebt, wie der Anfang, so würde alles Wissen wie an schwimmenden Strohhalmen hangend erscheinen. Der Verfasser empfiehlt die Methode damit, dass sie die zu starken Anforderungen an das Vorstellungsvermögen, welche der Uebergang von der Planimetrie zur Stereometrie auferlegt, durch Vermittlung mildere, indem anfänglich nie mehr als zwei Ebenen in gegenseitiger Lage betrachtet werden. Ausserdem seien manche Vorteile damit verbunden: es werden weniger Figuren erfordert, und die Beziehung der elementaren Stereometrie zur Projectionslehre wirkt vorbereitend für letztere. Rechnen wir beide Vorteile zu dem mancher Erleichterung der Deduction hinzu, so wollen wir das Unternehmen als einen beachtenswerten Versuch der Verbesserung der Methode gern anerkennen; nur müssen wir das, was bisher mit gutem Grunde als Norm gegolten hat, aufrecht halten, dass nämlich alle zur Theorie gehörigen Sätze absolut und ohne Beziehung zu willkürlicher Betrachtung aufgestellt werden. Letzterer kann nur die Bedeutung eines Hülfselementes eingeräumt werden, wie sie den Hülfslinien zukommt. Hier hingegen erscheint der Einführung zufolge die Projection als wirklicher Lehrgegenstand. Noch ist als charakteristisch zu erwähnen, dass den Körpern, den eben- und krummflächigen, insbesondere ihrer Inhaltsbestimmung, eine recht eingehende Behandlung zuteil wird. Auch die Schwerpunkte, rein geometrisch erklärt, bilden einen besonderen Gegenstand. Nach der Einleitung sind die Hauptabschnitte: die Stellung der Ge-

Digitized by Google

raden zur Ebene; die Lage zweier, dann mehrerer Ebenen zu einander; Polyeder; krummflächige Körper; Schwerpunkt. Der Anhang enthält: das Pyramidenproblem; den Euler'schen Satz und die regelmässigen Polyeder; 2 Lehrsätze. H.

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Von Dr. Th. Spieker, Professor am Realgymnasium zu Potsdam. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Potsdam 1885. Aug. Stein. 134 S.

Das Buch zeigt keine wesentlichen Verschiedenheiten von den gewöhnlichen gleichen Inhalts. Es gibt vollständig das Notwendige und dieses mit Fleiss und Geschick bearbeitet. Die Einleitung enthält die Geschichte der Entstehung der Trigonometrie. Die goniometrischen Functionen werden am rechtwinkligen Dreieck, dann am Kreise erklärt, zuerst als 6 coordinirte, dann in gegenseitiger Beziehung. Nun folgt die Berechnung des rechtwinkligen, dann gleichschenkligen Dreiecks, dann regelmässigen Vielecks, hierauf erst die Additionsformeln mit allen Consequenzen und ihrer Anwendung, dann die Berechnung des beliebigen ebenen Dreiecks, der Vierecke und Vielecke, dazu einige Aufgaben. Die Herleitung der sphärisch trigonometrischen Formeln ist die gewöhnliche mit Hülfe des Polardreiecks; hierzu gleichfalls einige Aufgaben. Dann folgen die Formeln über den um- und einbeschriebenen Kreis und den Inhalt des sphärischen Dreiecks, nebst Uebungen. H.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. Von Adolf Sickenberger, Professor am k. Maximiliansgymnasium in München. Dritte, umgearbeitete Auflage. München 1885. Theodor Ackermann. 188 S.

Die erste Auflage ist im 288. litt. Bericht S. 33, die zweite im 247. l. B. S. 24. besprochen. Aenderungen in der gegenwärtigen sind nicht angegeben. H.

Lehrbuch der Mathematik. Für den Schul- und Selbst-Unterricht bearbeitet von Dr. Hermann Gerlach, Oberlehrer am Friedrich-Franz-Gymnasium in Parchim. Zweiter Teil. Elemente der Planimetrie. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 134 Figuren in Holzschnitt und 682 Uebungssätzen und Aufgaben. Dessau 1885. Albert Reissner. 158 S.

Die vierte Auflage ist im 245. litt. Bericht S. 6. besprochen. Veränderungen in der neuen Bearbeitung betreffen die Entfernung

eines Punkts von einer Geraden, die gleichschenkligen Dreiecke, die Tangentenvierecke, die Berührung zweier Kreise, die Kreisfläche, das Product zweier Strecken, die proportionirten Linien, die harmonischen Strahlen, die Polaren und die Chordalen. In der Aufgabensammlung sind die 67. und 68. Aufgaben durch neue ersetzt.

H.

Die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse, Proportionen und Progressionen mit Anwendung auf die Zinseszins- und Rentenrechnung (Kursus der Obersekunda des Gymnasii) für den Schulgebrauch bearbeitet von Dr. E. Wrobel, Gymnasiallehrer in Rostock. Rostock 1885. Wilh. Werther. 44 S.

Das Lehrbuch behandelt in exact euklidischer Form (Definition, Lehrsatz, Beweis, Zusätze, nachfolgende Erläuterungen und Beispiele) nach einander: die arithmetischen Verhältnisse und Proportionen, die geometrischen Verhältnisse und Proportionen, arithmetische Progressionen I. Ordnung, höhere arithmetische Reihen, darunter die figurirten Zahlen, dann die geometrischen Progressionen, nebst Begriff und Kriterien der Convergenz für arithmetische und geometrische Reihen, zuletzt die Zinseszinsrechnung und Rentenrechnung. Es wird vorausgesetzt die Kenntniss der 7 Elementaroperationen und der Gleichungen 1. Grades.

H.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst vielen Uebungsaufgaben. Für Lehrerseminarien und höhere Bürgerschulen, sowie für den Selbstunterricht bearbeitet von A. P. L. Claussen, Königl. Seminarlehrer in Bütow. Potsdam 1884. Aug. Stein. 240 S.

Norm der Abfassung des Buches scheint zu sein, dass sich der Lernende nicht zu sehr mit Denken anstrenge und lieber auf dem Umwege manches Irrens und Missverstehens mit der Zeit zum Ziele gelange. Für die Geistesbildung des einzelnen Autodidakten würde letzteres gewiss kein Schade sein. Erwägt man aber, dass ein Missverständniss, ehe die Klärung eintritt, sich vom Buche auf Hunderte von Seminaristen, von jedem wieder auf Tausende von Kindern übertragen kann, so können uns die Folgen eines ungenauen Ausdrucks doch nicht so gleichgültig sein. Der Vortrag beschränkt sich zum grossen Teil auf blosse kategorische Mitteilung dessen, was dem Rechner geläufig ist. Die Aufstellungen sind bis auf weniges concinn und richtig, obwol mehr in familiärer Sprache ausgedrückt. Sollte ein Leser einen Satz wie den: Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die 3 letzten Ziffern es sind — so verstehen, es müssten die 3 letzten

Digitized by Google

Ziffern 0 oder 8 sein, so möchte der Irrtum geringfügig scheinen. Schlimmer ist jedenfalls die falsche Aussage, $\frac{a}{0}$ sei unendlich, über deren Sinn es dem Leser nicht verwehrt wird sich Gedanken zu machen, welche er will. Im Verhältniss zu der hier vorausgesetzten niedrigen Entwickelungsstufe des Denkens ist nun der Umfang des Lehrstoffs sehr gross. Er erstreckt sich auf Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, die algebraischen Gleichungen bis zum 3. Grade, diophantische Gleichungen, arithmetische und geometrische Progressionen, Exponentialgleichungen und Zinsrechnung. Uebungsaufgaben sind reichlich beigegeben. H.

Leitfaden der Physik. Von R. H. Hofmeister, Professor an der Kantonschule und ausserordentlicher Professor an der Hochschule in Zürich. Vierte Auflage. Zürich 1884. Orell Füssli u. Co. 195 S.

Das Buch zeigt eine ungemeine Vielseitigkeit, Umsicht und Beherrschung des so vielteiligen, verschiedenartigen Stoffs. Die Abfassung ist so abgekürzt als es ohne Uebergehung irgend eines wichtigen Punktes möglich ist. Jeder Punkt wird eben nur berührt; doch sind die Angaben hinreichend und deutlich, um den Lehrer an alles zu erinnern, was zu erörtern und zu berücksichtigen ist. Es wird uns durch das Buch das Bild einer empirischen Wissenschaft entfaltet, deren Begriffe nicht aus ideellen Principien auf den Gegenstand übertragen, sondern durch die Erfolge der in alle Erscheinungen eindringenden Specialuntersuchungen als feste Haltpunkte gewonnen worden sind, einer Wissenschaft also, welche die Natur nach deren eigener Anleitung zu beherrschen strebt. Wenn je dem Schulunterricht in der Physik die Fähigkeit zugeschrieben worden ist, zur allgemeinen, innern Bildung beizutragen, so kann ihm wol die unersetzliche Stelle darin zuerkannt werden, dass er die Idee einer wissenschaftlichen Empirie erzeugt. Dazu ist aber erforderlich, dass der Schüler, wenn gleich auf viel kürzerem Wege als die Entdecker, mit den Elementen der Empirie vertraut wird, um erst zu lernen für geringen Zuwachs an Realerkenntniss dankbar zu sein, ehe er über die höchsten Resultate der Forschung mitzusprechen anfängt. Aus diesem Geiste scheint auch der vorliegende Leitfaden bearbeitet. Die Erklärungen, auch wenn sie von weiterer Bedeutung sind, schliessen sich meist an die besondern Gegenstände an. Die Hauptteile sind: Physik der Materie, Physik des Aethers; die Gegenstände des ersten, d. i. der Mechanik: Wirkungen der äussern, der innern Kräfte, Wellenbewegung, Akustik. Unter diesen vertritt der zweite die Statik, die 2 letzten die Dynamik der Elasticität, während beim ersten Gleichgewicht und Bewegung die unterste Abteilung bilden.

Digitized by Google

Die in der Mechanik behandelten Themata beruhen auf Auswahl. Eine Beschränkung auf Anwendung der Schulmathematik lässt sich nicht als massgebend betrachten, sonst hätte manches Thema ausgeschlossen werden müssen, wo doch qualitative Aufstellungen und quantitativ vergleichende Gesichtspunkte sich verständlich geben liessen. Die Physik des Aethers enthält: Wärmelehre, Optik, Reibungselektricität, Galvanismus, Magnetismus, Wirkungen zwischen Strömen und Magneten, Elektromagnetismus, Induction, Thermoelektricität, tierische Elektricität. H.

Lehrbuch der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen. Im Auftrage der Königlichen Kommission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Württemberg ausgearbeitet von Dr. Ludwig Blum, Professor an der K. Realanstalt in Stuttgart. Dritte, vermehrte Auflage, bearbeitet von Richard Blum, Professor am K. Lyceum in Esslingen. Leipzig 1885. C. F. Winter. 539 S.

Der Verfasser hat zu gleichzeitigem Gebrauche zwei Bücher herausgegeben, deren eines er bei sonst gleichem Titel „Grundriss", das andere „Lehrbuch" nennt. Ersteres, im 241. und 260. litt. Bericht bzhw. S. 10. und S. 41. besprochen, ist für den Gebrauch der Schüler, letzteres für den Gebrauch des Lehrers bestimmt. Der Vortrag des Lehrbuchs, geteilt in 44 geschlossene Themata, jedes für 1 Stunde berechnet, ist gleichmässig pragmatisch beschreibend, Erscheinung, Erklärung, Gesetze werden in populärer Breite für jeden einzelnen Gegenstand vorgeführt, reichlich durch eingelegte Figuren unterstützt, ohne je den Gedanken einer einheitlichen Theorie anzuregen. So ist z. B. von Beharrung, Centrifugalkraft, Tangentialkraft die Rede, als wenn jedes eine Sache für sich wäre. Manches im Buche nimmt Bezug auf gewerbliche Anwendung; doch selbst dieses geht nur auf Mitteilung von Wissen, nicht aber auf Ausbildung von Fähigkeiten aus. Im ganzen lässt sich kein rechtes pädagogisches Ziel erkennen. H.

Sammlungen.

Aufgaben aus der Stereometrie und Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von K. Jüdt, k. Professor und Rektor der Realschule in Ansbach. Dritte, vermehrte Auflage. Ansbach 1885. Fr. Seybold. 56 S.

Das Buch enthält Uebungsmaterial für den Unterricht in der Stereometrie und Trigonometrie, welches auch für descriptive Geometrie

Digitized by Google

zu verwenden sein soll, was sich indes nur auf die ersten 28 Aufgaben beziehen kann. Alle übrigen sind Rechnungsaufgaben, und zwar fordern die nächsten 205 Berechnung von Bestimmungsstücken von Körpern. Die folgenden 96 Aufgaben sind goniometrisch, die noch übrigen 76 teils unmittelbar trigonometrisch, teils geometrisch aufgestellt und mit Trigonometrie zu lösen. Die Resultate stehen am Schluss. H.

Tabellen.

Saggio di tavole dei logaritmi quadratici del Co. Antonino di Pampero. Udine 1885. G. B. Doretti e Soci. 55 S.

Quadratische Logarithmen, bezeichnet durch Lq, sind Logarithmen von Logarithmen, definirt durch

$$LqN = x; \qquad N = a^{2^x}$$

Sie sollen die Potenzirung unmittelbar auf Addition zurückführen. Zum Gebrauch dieser Function hat der Verfasser 2 Tafeln berechnet. Die erste gibt auf 1 Seite für jeden Exponenten E, mit dem man potenziren will, den Wert von $\frac{\log E}{\log 2}$. Die zweite hat 15 Columnen überschrieben E, Lq, N_0, N_1, N_2, ... N_{12}, und zwar ist N_{10} die gegebene Zahl, die folgenden stehen dazu in der Beziehung:

$$N_k = N_{k-1}{}^2$$

Natürliche Reihenfolge findet man in der Columne N_{10}, welche von 10 beginnt und durch die Zehntel bis 100 fortschreitet; darüber hinaus geht dann die Columne N_9 von 10 durch die Hundertel bis 11. Ein Anhang gibt die Tafel der Exponenten für die Basen 2 bis 50. H.

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln von Dr. E. F. August. Vierzehnte, verbesserte Auflage besorgt von Dr. F. August, Professor an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule bei Berlin. Leipzig 1884. Veit u. Comp. 204 S.

Die 11. Auflage ist im 239. litt. Bericht, S. 36. besprochen. Nach ihr zeichnet sich zuerst die gegenwärtige durch Vermehrung und Verbesserung aus. Bei der Kreismessung ist die letzte Ziffer einiger Zahlen um 1 erhöht. In den astronomischen Angaben ist das tropische Sonnenjahr und der Sterntag hinzugekommen, die Masse des Mars nach der neuesten Bestimmung durch Hall, die halbe Ro-

Digitized by Google

tationsart der Erde in Erbsenbestimmung mit den Tafeln von Gauss und der Berechnung von Zeiten derselben, in den Elementargesetzen des Vorkommens der Bestimmung der Gesamtheit mittels der Methode der kleinsten Quadrate. 3.

Logarithmentafeln, sowie Resultate zu den Beispielen zur Aufgaben des Lehrbuches der Arithmetik und Algebra. Von A. F. L. Winnink. Königlich Niederländischer Rat. Utrecht. Van Boekhoven. Bussy. 45 S.

Die Logarithmen sind fünfstellig, im gewöhnlichen Umfang, mit vollständigen Proportionalteilen der Differenzen. Auf p. 2 Naturzahlen sowie die Logarithmen von 1000 Zahlen. Vorher gibt eine Tafel der Logarithmen der Zahlen bis 99. Die Resultate betreffend vergl. S. 46.

Geodäsie.

Handbuch der niederen Geodäsie. Von Friedrich Hartner, Hofrat und Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien. In 2. und 3. Auflage bearbeitet und verändert von Josef Wastler, k. k. Regierungsrat und o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Graz. 2. Band. 3. Auflage. Mit 259 Holzschnitten und 2 Tafeln. Wien. Gerold. 1900. XII und 512 S. 8.

Der 2. Band des bei Besprechung des 1. Bandes (Bericht XII, 1899, 46) eingehend charakterisierten und seine Anlage betreffen das Theodolitinstrument und für damit im Zusammenhang stehende Spezialaufgaben, nachdem das Gebiet über Gesamtheit der Längenmessungen, über Distanzmessung, mikroskopische Schraubenablesungen, Reiterlot, Winkelmessung, Berechnung der Polygonzüge, Detail-Aufnahme, Höhenmessung, Nivellierinstrumente, Nivellierarbeiten, Höhenberechnung der Nivellements, Tachymetrie etc. waren also bereits früher der Wissenschaft entgegenkommt erschienen.

Die Berechnung der trigonometrischen Verebnungen mit Rücksicht auf die sphärische Gestalt der Erde. Von A. G. P. Schiavon. Zweite, deutsche Bearbeitung der Abhandlung „Die trigonometrische Verebnungen“. Mit 1 Figur im Text. Wien. Gerold. 1900. 32 S. 8. (Aus: Mitteilungen des k. k. Technischen Militär-Komitees. 1900.)

Der Titel des Originalwerkes ist: Die trigonometrische Berechnung trigonometrischer Verebnungen mit Rücksicht auf die sphärische Gestalt der Erde. Triumph. Fritz. Abhandlung. Turin. 1866. 48 Fragmen

der Universität Tübingen erschienen und enthält in einfachster Form einen vollständigen Abriss der elementaren Aufgaben der höhern Geodäsie. Das Vorliegende unterscheidet sich von den zahlreichen Schriften gleichen Inhalts, die sich auf Bohnenberger's Abhandlung stützen, als eine bis auf gewisse Punkte treue Uebersetzung der Urschrift. Da es jedoch zum Hülfsmittel des Studiums der Geodäsie für unsere Zeit bestimmt ist, so waren einige Aenderungen und Vermehrungen unerlässlich. Statt der Toise ist das Meter eingeführt, die Dimensionen der Erde sind nach Bessel's Angaben zugrunde gelegt, die ursprünglich für die würtembergische Landesvermessung bestimmten Tafeln sind soweit ausgedehnt, dass sie für Deutschland ausreichen. Ueber das Nähere gibt das Vorwort des Uebersetzers Rechenschaft.

H.

Revue Suisse de Topographie et d'Arpentage. Organe de la Société Suisse de Topographie et des Géomètres de la Suisse romande. Paraissant à Genève le 15 de chaque mois. 1. année. Nr. 1. 1885.

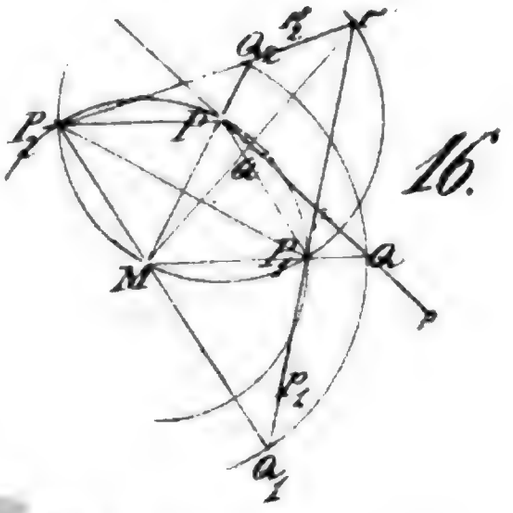
Diese neue Zeitschrift, redigirt von Oscar Messerly in Genf, soll nach dem dreijährigen Bestehen des Bulletin de la Société Suisse de Topographie an dessen Stelle treten und durch gegenseitige Belehrung ein Band zwischen den Schweizer Topographen und Geometern schaffen. Die erste Nummer enthält: Biographie von Plantamour, Director des Genfer Observatoriums, dem E. Gautier gefolgt ist, Triangulation, Plan der wissenschaftlichen Erforschung des Genfer Sees, polygonometrische Merkzeichen, dann unter Varietäten: Die Tribulationen eines römischen Geometers und die merkwürdige Beobachtung, dass im Augenblick des Erdbebens in Spanien die Brüsseler Sternwarte eine geneigte Stellung angenommen hat, so dass also das Erdbeben von einer Erdeinsenkung in grosser Entfernung begleitet war. Die Mitteilungen in den genannten Artikeln sind sehr spärlich und kaum hinreichend die Aufmerksamkeit auf die Tätigkeit der Gesellschaft zu lenken, viel weniger davon Kenntniss zu geben.

H.

Taf. II.

Taf. I.

Teil II.



16.

VII STANFORD LIBRARY

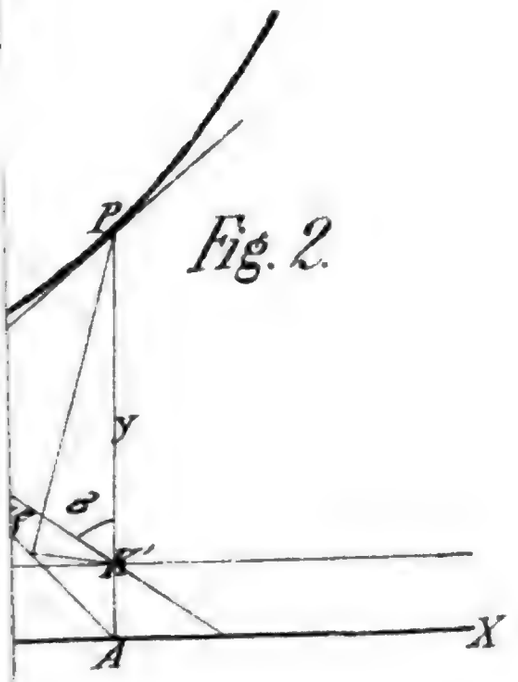
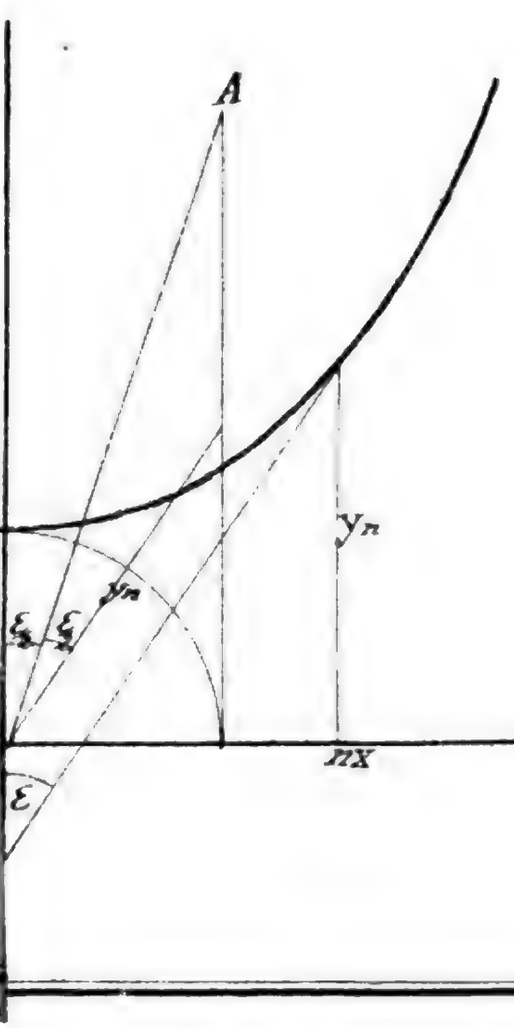


Fig. 2.



Digitized by Google

VIII. I

Fig. 1. 2.

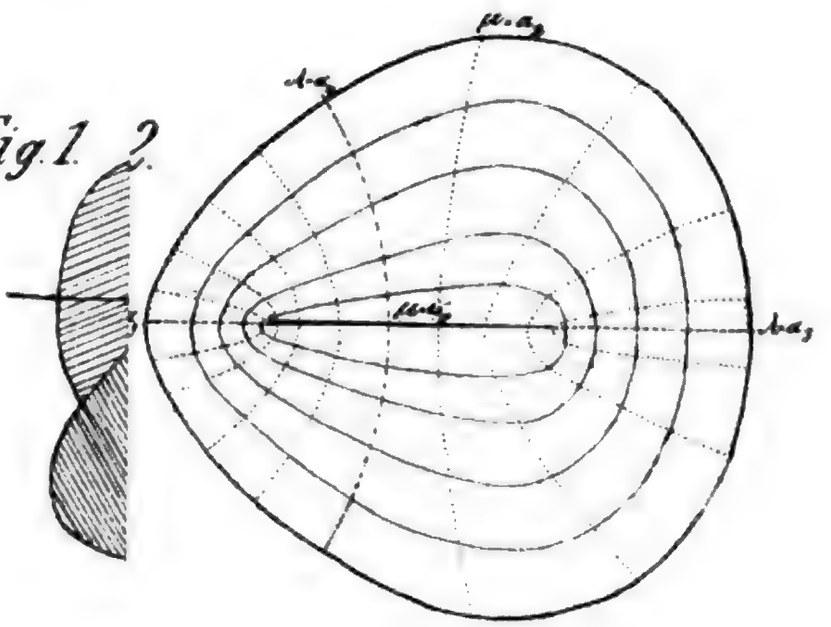
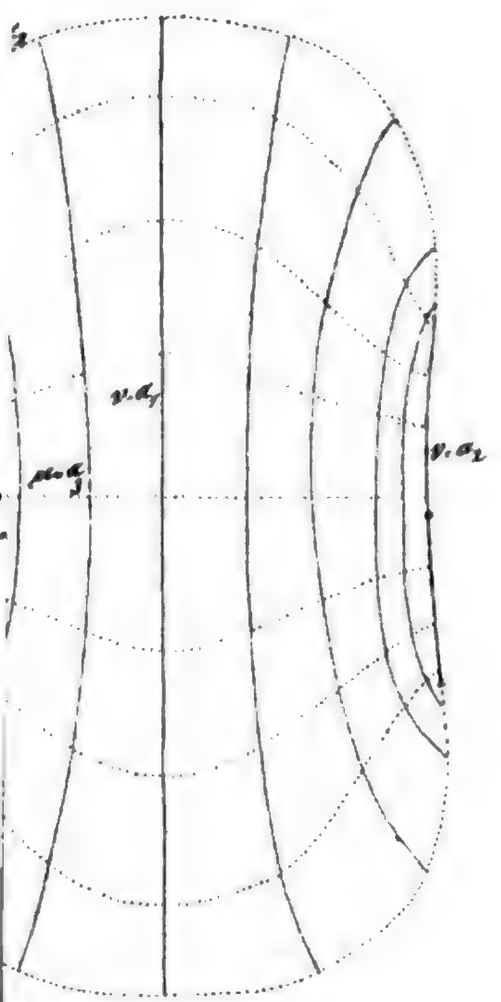
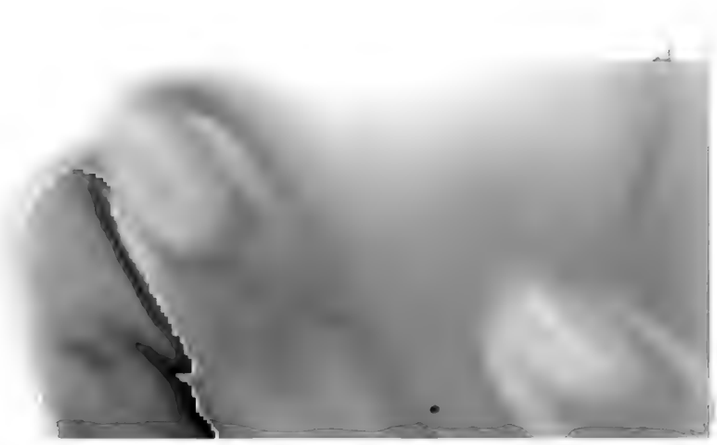


Fig. 3.





XIV

STANFORD LIBRARY

2.

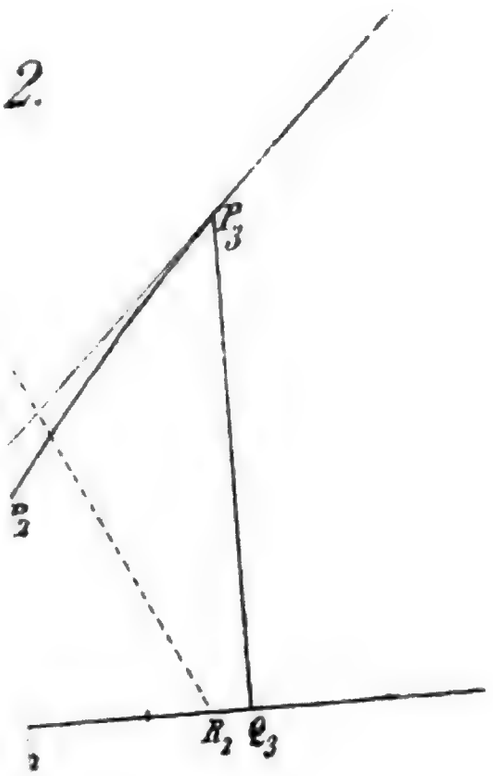
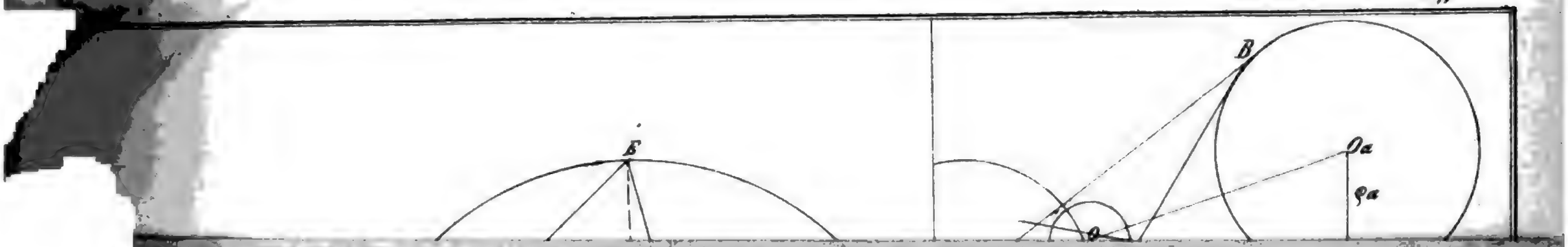


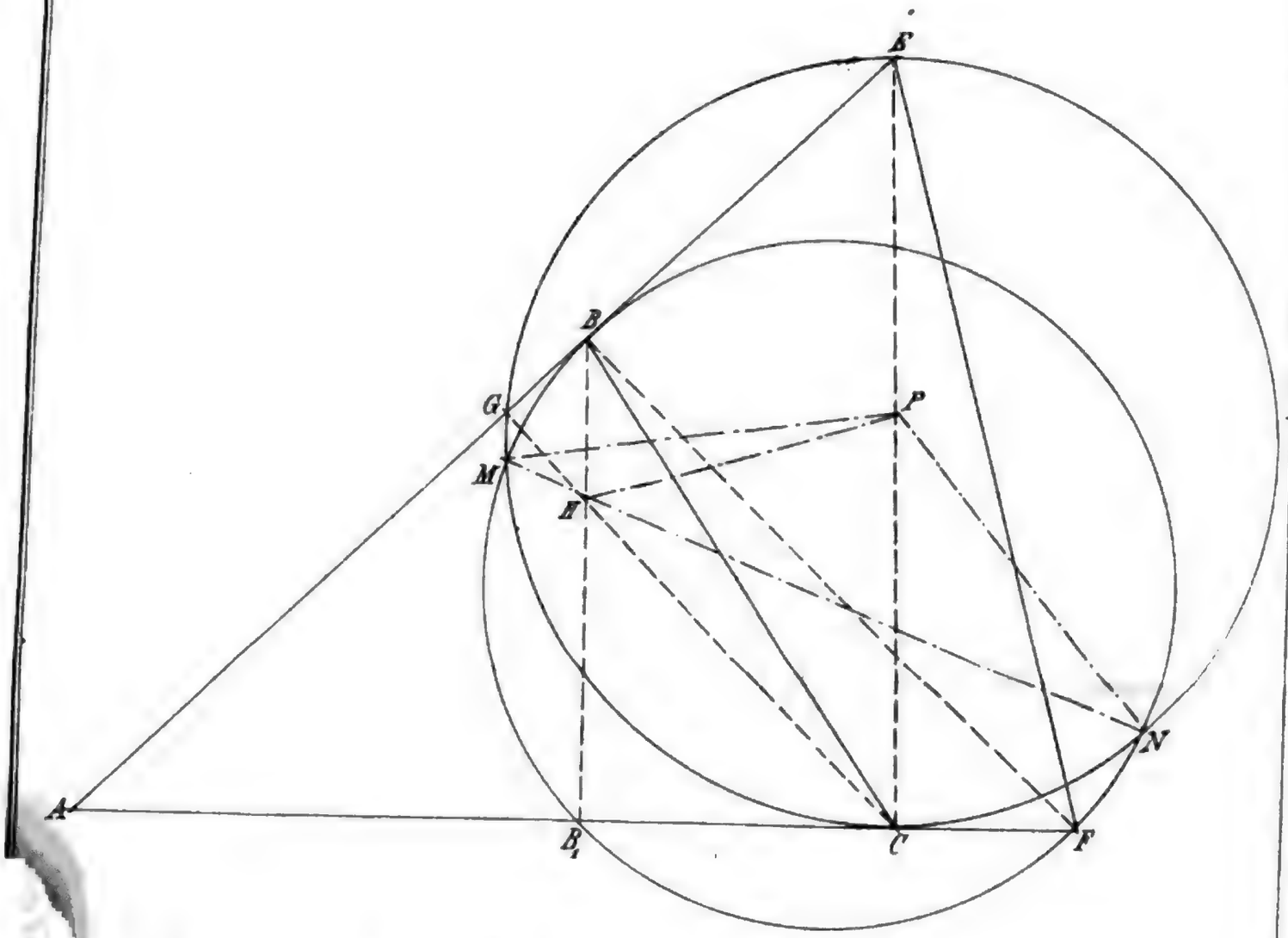
Fig. 5.

arst. d. Flächen 4. Ordnung.

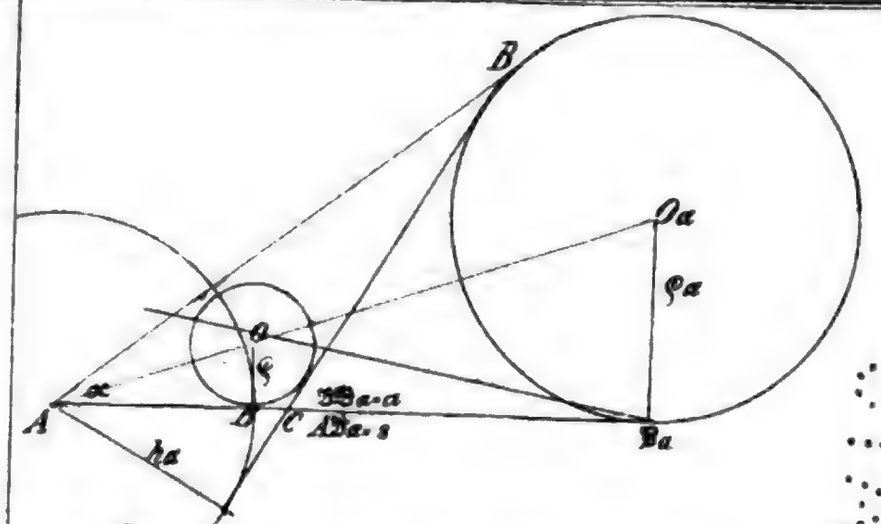
Digitized by Google


B
Qa
φa
Q
B

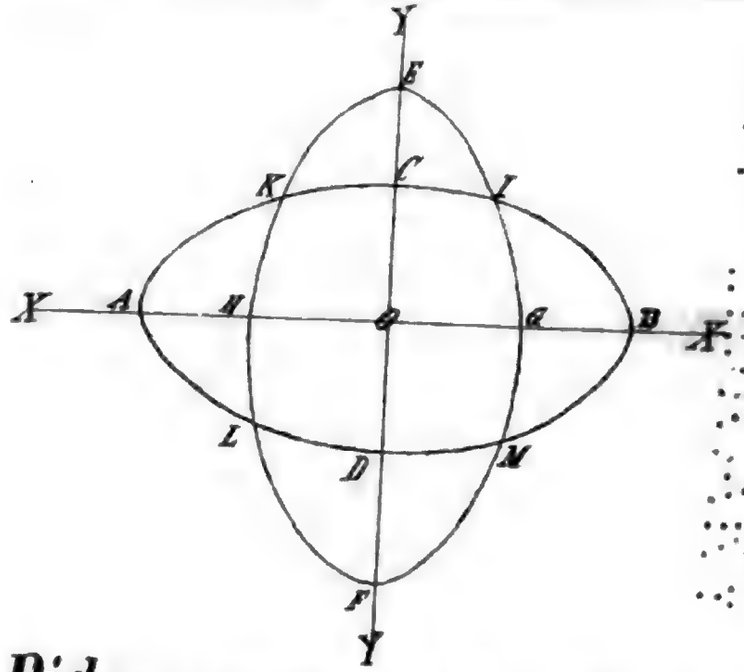
Digitized by Google



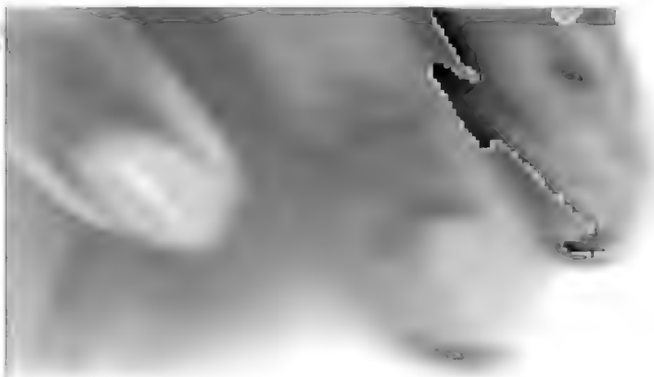
XI. **Sporer:** *Ein Satz über Kegelschnitte.*

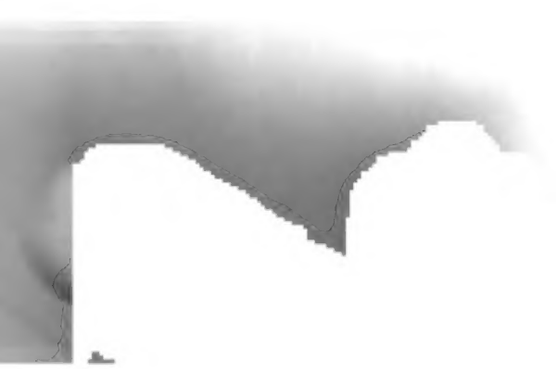


XXI. **Lange:** *Eine Gruppe plan. Maxima u. Min.*



XXI. **Bieler:** *Körper mit 3 Rotationsachsen*





Digitized by Google

To avoid fine, this bo returned on
or before the ' below .

Digitized by Google

3 1833 00900 3449

E10.5
C473
U.S.

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days

DATE DUE

RAGE AREA

DEC 2 1 1995
DEC 21 1995
JAN 01 1996
JAN 1 6 1996
MAR 04 1997